微积分 I (第一层次)期末试卷 2018.1.10

一、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)\mathrm{d}t}{x^2}$.

2. 求不定积分 $I_1=\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$. 3. 求不定积分 $I_2=\int\dfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求定积分 $I_3=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.

2. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3. 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 的一段弧的弧长.

三、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求广义积分 $I_4=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$.

2. 设 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 γ.

3. 求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $L:\begin{cases}x-y+z+5=0,\\5x-8y+4z+36=0\end{cases}$ 的距离.

四、(10分) 设 $x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{1}{x_n^2}\right)$, $n=0,1,2,\cdots$, 求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

五、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并绘出草图.

七、(10分) 设直线 $L:\begin{cases}2x-y-2z+1=0\\x+y+4z-2=0\end{cases}$, 平面 Π 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, a,b,c 均不等于 0, 且 $b=c$, 平面 Π 过直线 L, 求平面 Π 的方程.

八、(6分，本题非商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，$f(0)=0, f(1)=0$, 且 $\forall x\in(0,1)$, 有 $f(x)\neq 0$. 求证：$\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4$.

九、(6分, 本题商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x)>0$, 求证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

微积分 I (第一层次)期末试卷 2019.1.2

一、计算下列各题(6分× 4=24分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.

2. $y=x^2e^{3x}$, 求 $y^{(10)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(xt)dt}{x^3}$.

4. 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程.

二、计算下列各题(6分× 4=24分)

1. 求积分 $\int x\ln(2+x)dx$.

2. 计算积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^5+x^3+x^2+x+\sin x}{1+x^2}dx$.

3. 计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x\le 2, \end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)dt\ (0\le x\le 2)$, 求 $F(x)$.

三、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln\frac{n+1}{n}}{n+1}+\dfrac{\ln\frac{n+2}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\ln\frac{2n}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

四、(10分) 求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线以及直线 $x=1, x=e^2$ 所围成的图形面积最小.

五、(12分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并绘出草图.

六、(12分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]\ (a>0)$ 上具有二阶连续导数.

(1) 如果 $f''(x)>0\ (x\in[-a,a])$, 证明：$\int_{-a}^{a}f(x)dx\ge 2af(0)$;

(2) 如果 $f(0)=0$, 证明：在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 ζ, 使得 $a^3f''(\zeta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$.

七、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\ge 0$, 满足 $f^2(x)\le 1+2\int_0^x f(t)dt,\ x\in[0,1]$. 证明：$f(x)\le 1+x,\ x\in[0,1]$.

微积分I期末试卷 2019.12.30

一、求下列不定积分(6分× 3=18分)

1. $I_1=\int\sqrt{1+3\cos^2 x}\cdot\sin(2x)\mathrm{d}x$.　2. $I_2=\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.　3. $I_3=\int\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题 (6分× 3=18分)

1. 求定积分 $I_4=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

2. 求由 $y^2=-4(x-1)$ 与 $y^2=-2(x-2)$ 所围平面图形的面积.

3. 求心脏线 $\rho=a(1-\sin\theta)\ (a>0)$ 的全长 s.

三、计算下列各题 (6分× 3=18分)

1. 求广义积分 $I_5=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

2. 已知三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=3,|\boldsymbol{c}|=4$, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

3. 设有两条直线 $L_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$, $L_2:\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$, 证明它们是异面直线.

四、(10分) 设 $f(x)$ 是连续函数，又 $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ (A 为常数)，求 $g'(x)$, 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

五、(10分) 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}}{n}$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出图像.

七、(10分) 求一条直线 L, 使得 L 过点 $P(2,3,4)$, 且与平面 $\Pi:2x+y-2z+7=0$ 平行，又与直线 $L_1:\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-5}{-1}$ 相交.

八、(6分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

微积分 I 期末试卷 2021.1.4

一、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{5}{n^2}+\cos\dfrac{5}{n}\right)^{3n^2}$. 2. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$. 3. 求函数 $y=(x+3)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

二、计算下列各题 (6分× 3=18分)

1. $I_1=\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x-\cos^4 x}dx$. 2. $I_2=\displaystyle\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$. 3. $I_3=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^7\cos^{10}x}{1+x^2}dx$.

三、计算下列各题 (6分× 2=12分)

1. 已知三个单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

2. 将直线的一般式方程 $\begin{cases} x-y+z+5=0, \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases}$ 化为点向式方程.

四、(10 分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\sin x)^{\sin x}-x^{\sin x}}{\sin^2 x\arcsin x}$.

五、(10分) 设 $f(x)$ 在 R 上可导且 $f(0)=0, f'(x)\geq 0$. 证明 $\left(\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right)^2\leq 2\int_0^x tf^2(t)dt$.

六、(10分) 求由曲线 $y=\ln x$ 在 $(e,1)$ 处的切线与 $y=\ln x$ 以及 x 轴所围成的平面图形 D 的面积 S,

D 分别绕 x 轴、y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x, V_y.

七、(14分) 讨论函数 $y=x\arctan x$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出函数图像.

八、(8 分) 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$.

求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3f''(\xi)$.

微积分I期末试卷 2022.1.4

一. 计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

3. 设$f(x)$ 在 a 的一个邻域内二阶连续可导，$f'(a)=\sqrt{2}, f''(a)=2$, 求

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(x)}\right).$$

二、计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 计算积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$;

2. 计算积分 $\displaystyle\int x^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$.

3. 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$.

三、计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 求与直线 L_1: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 及 L_2: $\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ 都平行且与它们等距的平面方程.

2. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

3. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围图形面积 S.

四、(6分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$，求方程 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在 (a,b) 内根的个数.

五、(12分) 讨论函数 $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，渐近线，并作出草图。

六、(10分) 1. 证明 $\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$. 2. 计算 $\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

七、(10分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二次可微, 并且 $f''(x)>0$. 设 L_t 为曲线 $C: y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ 的切线, $A(t)$ 为曲线 C 与直线 $L_t, x=a, x=b$ 所围图形的面积. 问 $A(t)$ 在哪些点取到最小值? 说明你的理由.

八、(8分) 设函数$f(x)$ 在$[-1,1]$ 上有三阶连续导数.

证明: 极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)\right|$ 存在.

微积分 I 期末试卷 2023.2.21

一. 计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{5}{x^2}}$.

2. 设 $f(x)=x^2\ln(1-x)$, 求 $f^{(10)}(0)$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\displaystyle\int_{-\infty}^{c}te^{2t}\mathrm{d}t$, 求 c 的值.

二、计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}x$; 2. 计算 $\displaystyle\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x$. 3. 计算 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

三、计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 设直线 L 的方程为 $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{5}$, 平面 Π 的方程为 $3x+y+2z+20=0$, 求直线 L 与平面 Π 的夹角 θ 与交点 M.

2. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\ln(n+i)-\ln n\right)$.

3. 计算由曲线 $y=\sin x, y=\cos x, x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围的最小的平面图形的面积.

四、(10分) (1) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, $g(x)$ 是偶函数, $f(x)+f(-x)\equiv A$(A 为常数), 证明：

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_{0}^{a}g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 利用 (1) 的结论求 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\arctan(e^x)\mathrm{d}x$.

五、(12分) 讨论函数 $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹向与拐点, 渐近线, 并作出草图.

六、(8分) 求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线，以及直线 $x=1, x=e^2$ 所围成的图形面积最小.

七、(8分) 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$ 上有连续的一阶导数, 证明 $\forall x\in[0,1]$, 有

$$|f(x)|\le\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)\mathrm{d}t.$$

八、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有二阶连续导数，且 $\forall x\in(0,+\infty)$, 都有 $f(x)\ge 0, f'(x)\le 0$. 又存在正数 M 使得 $|f''(x)|\le M, (x\in(0,+\infty))$. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(注：此题中的条件 $|f''(x)|\le M$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，二者只需一个成立即可)

微积分I(第一层次)期末试卷参考答案2018.1.10

一、 1. 1; 2. $I_1=\dfrac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C.$ 3. $I_2=\arctan(x+1)+\dfrac{1}{x^2+2x+2}+C.$

二、 1. $\dfrac{\pi a^4}{16}.$ 2. $\dfrac{16}{3}p^2.$ 3. $\ln 3-\dfrac{1}{2}.$ 三、 1. $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}.$ 2. $\dfrac{\pi}{3}.$ 3. $\sqrt{\dfrac{223}{13}}.$ 四、1. 五、$\dfrac{2}{\pi}.$

六、定义域 $x\neq 1$; 单调减区间$(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$, 单调增区间$(-1,1)$; 极小值$f(-1)=-\dfrac{1}{4}$, 下凹区间$(-\infty,-2)$, 上凹区间$(-2,1),(1,+\infty)$; 拐点$(-2,-\dfrac{2}{9})$; $x=1$是铅直渐近线; $y=0$是水平渐近线.

七、$7x-2y-2z+1=0.$

八、证明：因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，且 $f(x)\neq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不变号，不妨设 $f(x)>0$.
$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由最值定理，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最大值 M. 设 $f(x_0)=M>0, x_0\in(0,1)$.
由拉格朗日中值定理，$\exists\,\alpha\in(0,x_0),\beta\in(x_0,1)$, 使得

$f(1)-f(x_0)=f'(\beta)(1-x_0)$, 即 $f'(\beta)=-\dfrac{M}{1-x_0}$; $f(x_0)-f(0)=f'(\alpha)(x_0-0)$, 即 $f'(\alpha)=\dfrac{M}{x_0}$

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{1}{M}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geq\frac{1}{M}\int_\alpha^\beta|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geq\frac{1}{M}\left|\int_\alpha^\beta f''(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{M}|f'(\beta)-f'(\alpha)|$$

$$=\frac{1}{M}\left|-\frac{M}{1-x_0}-\frac{M}{x_0}\right|=\frac{1}{x_0(1-x_0)}=\frac{1}{\frac14-(\frac12-x_0)^2}\geq 4.$$

九、证明：函数 $f(x)$ 在 $\dfrac{a+b}{2}$ 展开成泰勒公式

$$f(x)=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac12 f''(\xi)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2>f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big),$$

两边积分得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>\int_a^b\Big(f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)\Big)\mathrm{d}x=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a).$

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案2019.1.2

一、 1. $\dfrac{2}{3}$; 2. $y^{(10)}=3^8\mathrm{e}^{3x}(9x^2+60x+90)$; 3. $\dfrac{1}{2}$; 4. $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}.$

二、1. $\dfrac12 x^2\ln(2+x)-\dfrac14 x^2+x-2\ln(x+2)+C$; 2. $2-\dfrac{\pi}{2}$; 3. $\dfrac{\ln 2}{4}$; 4. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac13, & 0\leq x<1;\\ x-1, & 1\leq x\leq 2.\end{cases}$

三、$2\ln 2-1$. 四、切线方程为 $y-\ln\dfrac{1+e^2}{2}=\dfrac{2}{1+e^2}x-1.$

五、单调增区间 $(-\infty,-4),(0,+\infty)$, 单调减区间 $(-4,-1),(-1,0)$; 极大值 $f(-4)=-\dfrac{256}{27}$, 极小值 $f(0)=0$; 下凹区间 $(-\infty,-1)$, 上凹区间 $(-1,+\infty)$; 没有拐点; 铅直渐近线 $x=-1$; 斜渐近线 $y=x-3$.

六、(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2\geq f(0)+f'(0)x\Longrightarrow\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\geq\int_{-a}^a(f(0)+f'(0)x)\mathrm{d}x=2af(0).$

(2) $f(x)=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2\Longrightarrow\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^a f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^a\frac{f''(\xi)}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac12\int_{-a}^a f''(\xi)x^2\mathrm{d}x,$

设 $M=\max\limits_{x\in[-a,a]}f''(x)$, $m=\min\limits_{x\in[-a,a]}f''(x)$, 则 $m\leq\dfrac{3}{a^3}\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\leq M$. 对 $f''(x)$ 用介值定理即得.

七、证明：设 $u(x)=1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $u(0)=1, u'(x)=2f(x)\le 2\sqrt{u(x)}$, 而 $\sqrt{u(x)}-1=\int_0^x \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}\mathrm{d}t\le\int_0^x \mathrm{d}t=x$, 所以 $f(x)\le\sqrt{u(x)}\le 1+x$.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案2019.12.30

一、 1. $I_1=-\frac{2}{9}(1+3\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}+C$; 2. $I_2=x(\arctan x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;

$$3.\ I_3=-\int\frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\frac{1}{x\sin x+\cos x}=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\mathrm{d}\frac{x}{\cos x}$$
$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$$

二、 1. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$; 2. $\frac{8}{3}$; 3. $8a$. 三、 1. 0； 2. $-\frac{29}{2}$.

四、$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ $g'(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ \frac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$ $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

五、原式 $=\exp\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}\Big)=\exp\Big(\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\Big)=\frac{4}{\mathrm{e}}$.

六、定义域 $(0,+\infty)$; 单调增区间 $(0,\mathrm{e})$, 单调减区间 $(\mathrm{e},+\infty)$; 极大值 $f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$, 下凹区间 $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$, 上凹区间 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty)$; 拐点 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$; $x=0$ 是铅直渐近线; $y=0$ 是水平渐近线.

七、 $\frac{x-2}{15}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z-4}{8}$.

八、 证明：$f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2$$

设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M, 最小值为 m, 则

$$f(x)\le f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{M}{2}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2$$

两边积分得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b\Big(f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{M}{2}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big)\mathrm{d}x$

$$=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)+\frac{M}{24}(b-a)^3.$$

同理，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)+\frac{m}{24}(b-a)^3$.

所以 $m\le\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)}{\frac{(b-a)^3}{24}}\le M$, 对 $f''(x)$ 用介值定理即得.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案2019.12.30

一、 1. $I_1=-\frac{2}{9}(1+3\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}+C$;　　2. $I_2=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;

$$3.\ I_3=-\int\frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\frac{1}{x\sin x+\cos x}=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\mathrm{d}\frac{x}{\cos x}$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$$

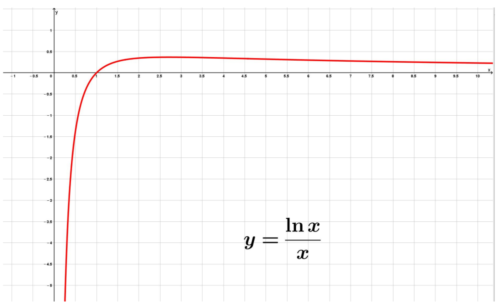
二、 1. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$;　2. $\frac{8}{3}$;　3. $8a$.　　三、 1. 0;　2. $-\frac{29}{2}$.

四、 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$　　$g'(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ \frac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$

$g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

五、原式 $=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}\right)=\exp\left(\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\right)=\frac{4}{\mathrm{e}}$.

六、 定义域 $(0,+\infty)$; 单调增区间 $(0,\mathrm{e})$, 单调减区间 $(\mathrm{e},+\infty)$; 极大值 $f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$, 下凹区间 $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$, 上凹区间 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty)$; 拐点 $\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$; $x=0$ 是铅直渐近线; $y=0$ 是水平渐近线.



七、 $\frac{x-2}{15}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z-4}{8}$.

八、 证明：令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=f(x)$, $F''(x)=f'(x)$, $F'''(x)=f''(x)$, 且 $F(a)=0$.

$F(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处的2阶泰勒公式为

$$F(x)=F\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2}f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2+\frac{1}{6}f''(\xi_1)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^3 \tag{1}$$

其中 ξ 在 x 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间. 在 (1) 中分别令 $x=a$ 和 $x=b$, 得

$$0=F\Big(\frac{a+b}{2}\Big)-f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{(b-a)^2}{4}-\frac{1}{6}f''(\xi_2)\frac{(b-a)^3}{8},\quad a<\xi_2<\frac{a+b}{2} \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{1}{6}f''(\xi_3)\frac{(b-a)^3}{8},\quad \frac{a+b}{2}<\xi_3<b \tag{3}$$

(3) − (2) 得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}\Big(f''(\xi_2)+f''(\xi_3)\Big)$$

由 $f''(x)$ 的连续性可知 $f''(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_3]$ 上有最大值 M 和最小值 m, 再由介值定理，$\exists\xi\in[\xi_2,\xi_3]\subset(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{1}{2}(f''(\xi_2)+f''(\xi_3))$, 所以 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2021.1.4

一、 1. $\mathrm{e}^{-\frac{45}{2}}$; 2. e; 3. $x=0$ 是铅直渐近线，$y=x+4$ 是斜渐近线.

二、 1. $I_1=\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x|+C$. 2. $I_2=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$; 3. $I_3=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{3}$.

三、 1. $-\dfrac{3}{2}$. 2. $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$.

四、 $-\dfrac{1}{6}$

五、设 $F(x)=\Big(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big)^2-2\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$, 则

$$F'(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)-2xf^2(x)=2f(x)\cdot x\cdot f(\xi)-2xf^2(x)=2xf(x)(f(\xi)-f(x)),$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间. 因为 $f'(x)\ge 0$, 所以 $f(x)$ 单调增加.

当 $x>0$ 时，$f(x)\ge f(\xi)\ge f(0)=0$, 故 $F'(x)\le 0, F(x)$ 单调减少, 因此 $F(x)\le F(0)=0$;

当 $x<0$ 时，$f(x)\le f(\xi)\le f(0)=0$, 故 $F'(x)\ge 0, F(x)$ 单调增加, 因此 $F(x)\le F(0)=0$;

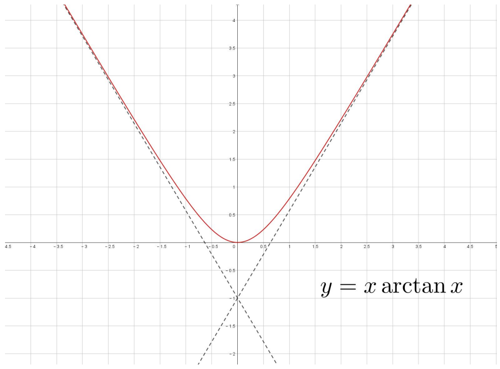
综上所述，$F(x)\le 0$, 即 $\Big(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big)^2\le 2\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$.

六、$S=\displaystyle\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\Big(\mathrm{e}^y-\frac{\mathrm{e}y^2}{2}\Big)\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$.

$$V_x=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}-\pi\int_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}-\pi(x\ln^2 x-2x(\ln x-1))\Big|_1^{\mathrm{e}}=2\pi(1-\frac{\mathrm{e}}{3}).$$

$$V_y=\pi\int_0^1(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^2y^2)\mathrm{d}y=\pi\big(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^2y^3\big)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(\mathrm{e}^2-3).$$

七、定义域 $(-\infty,+\infty)$; 偶函数;
$y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}$,
单调增区间 $(0,+\infty)$, 单调减区间 $(-\infty,0)$;
极小值 $y(0)=0$;
$y''=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}>0$, 上凹区间$(-\infty,+\infty)$; 无拐点;
渐近线 $y=\dfrac{\pi}{2}x-1, y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$.



八、令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=f(x), F''(x)=f'(x), F'''(x)=f''(x)$, 且 $F(a)=0, F''(a)=F''(b)=0$.

函数 $F(x)$ 在 $x=a$ 处的2阶泰勒公式为

$$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}F''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(x-a)^3$$

$$=f(a)(x-a)+\frac{1}{6}f''(\xi_1)(x-a)^3$$

其中 $a<\xi_1<x$. 令 $x=b$, 得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\xi_2)(b-a)^3$, $(a<\xi_2<b)$, (1)

函数 $F(x)$ 在 $x=b$ 处的2阶泰勒公式为

$$F(x)=F(b)+F'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}F''(b)(x-b)^2+\frac{1}{3!}F'''(\eta_1)(x-b)^3$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(b)(x-b)+\frac{1}{6}f''(\eta_1)(x-b)^3$$

其中 $x<\eta_1<b$. 令 $x=a$, 得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\eta_2)(b-a)^3$, $(a<\eta_2<b)$, (2)

(1)+(2)得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big)(b-a)+\frac{1}{6}\Big(\frac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}\Big)(b-a)^3$,

因为 $f''(x)$ 在区间 $[\xi_2,\eta_2]$ (或 $[\eta_2,\xi_2]$) 上连续，由最值定理，$f''(x)$ 在区间 $[\xi_2,\eta_2]$ (或 $[\eta_2,\xi_2]$) 上有最大值 M 与最小值 m, 而$m\le\dfrac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}\le M$, 则由介值定理，$\exists\xi\in[\xi_2,\eta_2]\subset(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}$, 于是 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3$.

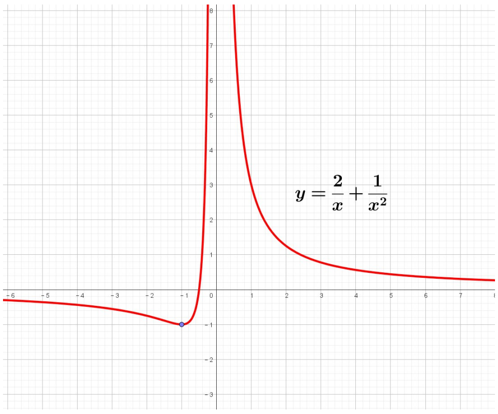
一、1. $e^{-1/2}$.　　2. $(-1)^n\dfrac{n!}{6}(\dfrac{1}{(x-4)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{(n+1)}})$.　　3. $\dfrac{1}{2}$.

二、1. $\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$;　2. $\dfrac{1}{3}x^3\ln^2 x-\dfrac{2}{9}x^3\ln x+\dfrac{2}{27}x^3+C$.　3. $\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$.

三、 1. $5x+2y+z+1=0$.　2. $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.　3. $\dfrac{3}{2}\pi a^2$.

四、方程 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在(a,b)内有并且只有一个根.

五、定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;
单调增区间$(-1,0)$, 单调减区间$(-\infty,-1),(0,+\infty)$;
极小值$f(-1)=-1$, 没有极大值;
下凹区间$(-\infty,-\dfrac{3}{2})$, 上凹区间$(-\dfrac{3}{2},0),(0,+\infty)$;
拐点$\Big(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{8}{9}\Big)$;
$x=0$是铅直渐近线，$y=0$是水平渐近线.



六、2. $\dfrac{\pi^2}{4}$.

七、$f''(x)>0$,曲线C是凹的,

$$A(t)=\int_a^b(f(x)-f(t)-f'(t)(x-t))\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(t)-\frac{b^2-a^2}{2}f'(t)+(b-a)tf'(t).$$

$A'(t)=f''(t)(b-a)(t-\dfrac{a+b}{2})$. 令$A'(t)=0$, 得$t=\dfrac{a+b}{2}$.

当$a<x<\dfrac{a+b}{2}$时, $A'(t)<0$, 当$\dfrac{a+b}{2}<x<b$时, $A'(t)>0$,

所以$A(t)$在$t=\dfrac{a+b}{2}$取到最小值.

八、证明：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(\zeta)}{6}x^3.$$

$$|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|=|k(\frac{2f'(0)}{k}+\frac{f^{(3)}(\alpha_k)}{6k^3}+\frac{f^{(3)}(\beta_k)}{6k^3})-2f'(0)|\le\frac{M}{3k^2},$$

其中 $M=\max\limits_{-1\le x\le 1}|f^{(3)}(x)|$.

设$x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|$, 显然$x_n$是单调增加数列，又

$$x_n\le\sum_{k=1}^n\frac{M}{3k^2}<\frac{M}{3}\Big(1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\Big)<M.$$

x_n是单调有界数列，因此极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|$存在.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2021.1.4

一、 1. $\mathrm{e}^{-\frac{45}{2}}$; 2. e; 3. $x=0$ 是铅直渐近线，$y=x+4$ 是斜渐近线.

二、 1. $I_1=\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x|+C$. 2. $I_2=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$; 3. $I_3=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{3}$.

三、 1. $-\dfrac{3}{2}$. 2. $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$. 四、 $-\dfrac{1}{6}$

五、设 $F(x)=\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-2\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$, 则

$$F'(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)-2xf^2(x)=2f(x)\cdot x\cdot f(\xi)-2xf^2(x)=2xf(x)(f(\xi)-f(x)),$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间. 因为 $f'(x)\ge 0$, 所以 $f(x)$ 单调增加.

当 $x>0$ 时，$f(x)\ge f(\xi)\ge f(0)=0$, 故 $F'(x)\le 0, F(x)$ 单调减少, 因此 $F(x)\le F(0)=0$;

当 $x<0$ 时，$f(x)\le f(\xi)\le f(0)=0$, 故 $F'(x)\ge 0, F(x)$ 单调增加, 因此 $F(x)\le F(0)=0$;

综上所述，$F(x)\le 0$, 即 $\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2\le 2\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$.

六、$S=\displaystyle\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\left(\mathrm{e}^y-\frac{\mathrm{e}y^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1.$

$$V_x=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}-\pi\int_1^{\mathrm{e}}\ln^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}-\pi(x\ln^2x-2x(\ln x-1))\Big|_1^{\mathrm{e}}=2\pi(1-\frac{\mathrm{e}}{3}).$$

$$V_y=\pi\int_0^1(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^2y^2)\mathrm{d}y=\pi(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^2y^3)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(\mathrm{e}^2-3).$$

七、 定义域 $(-\infty,+\infty)$; 偶函数;

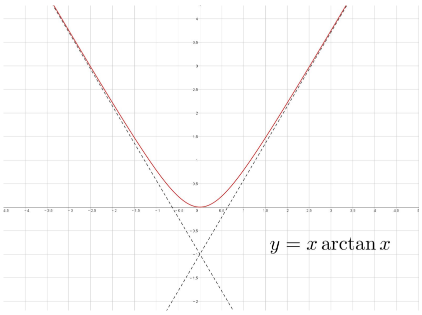
$y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}$,

单调增区间 $(0,+\infty)$, 单调减区间 $(-\infty,0)$;

极小值 $y(0)=0$;

$y''=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}>0$, 上凹区间$(-\infty,+\infty)$; 无拐点;

渐近线 $y=\dfrac{\pi}{2}x-1, y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$.



八、令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=f(x), F''(x)=f'(x), F'''(x)=f''(x)$, 且 $F(a)=0, F''(a)=F''(b)=0$.

函数 $F(x)$ 在 $x=a$ 处的 2 阶泰勒公式为

$$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}F''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(x-a)^3=f(a)(x-a)+\frac{1}{6}f''(\xi_1)(x-a)^3$$

其中 $a<\xi_1<x$. 令 $x=b$, 得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\xi_2)(b-a)^3$, $(a<\xi_2<b)$, (1)

函数 $F(x)$ 在 $x=b$ 处的 2 阶泰勒公式为

$$F(x)=F(b)+F'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}F''(b)(x-b)^2+\frac{1}{3!}F'''(\eta_1)(x-b)^3=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(b)(x-b)+\frac{1}{6}f''(\eta_1)(x-b)^3$$

其中 $x<\eta_1<b$. 令 $x=a$, 得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\eta_2)(b-a)^3$, $(a<\eta_2<b)$, (2)

(1)+(2)得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big)(b-a)+\frac{1}{6}\Big(\frac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}\Big)(b-a)^3$,

因为 $f''(x)$ 在区间 $[\xi_2,\eta_2]$ (或 $[\eta_2,\xi_2]$) 上连续，由最值定理，$f''(x)$ 在区间 $[\xi_2,\eta_2]$ (或 $[\eta_2,\xi_2]$) 上有最大值 M 与最小值 m，而 $m\le\dfrac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}\le M$，则由介值定理，$\exists\xi\in[\xi_2,\eta_2]\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}$，于是 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3$.

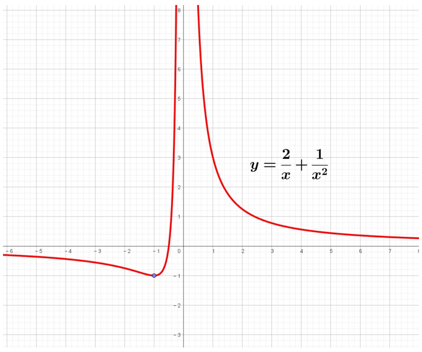
微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2022.1.4

一、1. $e^{-1/2}$.　　2. $(-1)^n\dfrac{n!}{6}\Big(\dfrac{1}{(x-4)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{(n+1)}}\Big)$.　　3. $\dfrac{1}{2}$.

二、1. $\ln\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C$;　　2. $\dfrac{1}{3}x^3\ln^2x-\dfrac{2}{9}x^3\ln x+\dfrac{2}{27}x^3+C$.　　3. $\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$.

三、 1. $5x+2y+z+1=0$.　　2. $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.　　3. $\dfrac{3}{2}\pi a^2$.

四、方程 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在 (a,b) 内有并且只有一个根.



五、 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;
单调增区间 $(-1,0)$, 单调减区间 $(-\infty,-1),(0,+\infty)$;
极小值 $f(-1)=-1$, 没有极大值;
下凹区间 $(-\infty,-\frac{3}{2})$, 上凹区间 $(-\frac{3}{2},0),(0,+\infty)$;
拐点 $\Big(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{8}{9}\Big)$;
$x=0$ 是铅直渐近线，$y=0$ 是水平渐近线.

六、2. $\dfrac{\pi^2}{4}$.

七、 $f''(x)>0$,曲线 C 是凹的,

$$A(t)=\int_a^b(f(x)-f(t)-f'(t)(x-t))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(t)-\frac{b^2-a^2}{2}f'(t)+(b-a)tf'(t).$$

$A'(t)=f''(t)(b-a)(t-\dfrac{a+b}{2})$. 令 $A'(t)=0$, 得 $t=\dfrac{a+b}{2}$.

$a<x<\dfrac{a+b}{2}$ 时, $A'(t)<0$, $\dfrac{a+b}{2}<x<b$ 时, $A'(t)>0$, 所以 $A(t)$ 在 $t=\dfrac{a+b}{2}$ 取到最小值.

八、证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f^{(3)}(\zeta)}{6}x^3$.

$$|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|=|k(\frac{2f'(0)}{k}+\frac{f^{(3)}(\alpha_k)}{6k^3}+\frac{f^{(3)}(\beta_k)}{6k^3})-2f'(0)|\le\frac{M}{3k^2},$$

其中 $M=\max\limits_{-1\le x\le1}|f^{(3)}(x)|$.

设 $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|$, 显然 x_n 是单调增加数列，又

$$x_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{3k^2} < \frac{M}{3}\Big(1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\Big) < M.$$

x_n 单调增加有上界，因此收敛，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|$ 存在.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2023.2.21

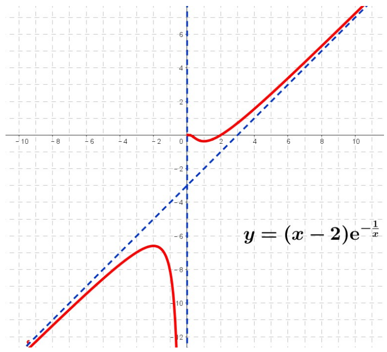
一、 1. e^{-10}; 2. $90\times 7!$; 3. $c=\frac{5}{2}$.

二、 1. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$; 2. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}+C$; 3. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

三、 1. $\theta=\frac{\pi}{3}, M(-5,3,-4)$. 2. 原式 $=\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = 2\ln 2-1$. 3. $\sqrt{2}-1$.

四、(2) $\cos x$ 是偶函数，$\arctan\mathrm{e}^x+\arctan\mathrm{e}^{-x}=\frac{\pi}{2}$, 所以原式 $=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

五、 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;
单调增区间 $(-\infty,-2),(1,+\infty)$,
单调减区间 $(-2,0),(0,1)$;
极大值 $f(-2)=-4\sqrt{\mathrm{e}}$, 极小值 $f(1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$;
下凹区间 $(-\infty,0),(0,\frac{2}{5})$, 上凹区间 $(\frac{2}{5},+\infty)$;
拐点 $\Big(\frac{2}{5},-\frac{8}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}\Big)$;
$x=0$ 是铅直渐近线，$y=x-3$ 是斜渐近线.



六、所求切线方程为 $y=\frac{2}{\mathrm{e}^2+1}x+\ln\frac{\mathrm{e}^2+1}{2}-1$.

七、方法一：$f(t)$ 连续，则 $|f(t)|$ 也连续，由积分中值定理，存在 $\zeta\in(0,1)$, 使得 $\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t=|f(\zeta)|$.
又 $f(x)=f(\zeta)+\int_\zeta^x f'(t)\mathrm{d}t$, 所以 $|f(x)|\le|f(\zeta)|+\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)\mathrm{d}t$.

八、方法一：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$; 又 $f'(x)\le 0$ 且 $f(x)\ge 0$, 所以 $f(x)$ 单调减少有下界，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$. 由微分中值定理，存在 $\xi\in(x,x+1)$, 使得 $f(x+1)-f(x)=f'(\xi)$, 上式两边令 $x\to+\infty$ 取极限可得 $B-B=A$, 所以 $A=0$.

方法二：由 $f'(x)\le 0$ 且 $f(x)\ge 0$, 可知 $f(x)$ 单调减少有下界，故极限存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.
对于任意给定的常数 $\delta>0$, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\frac{A-A}{\delta}=0$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists G>0$, 当 $x>G$ 时，总有 $\Big|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\Big|<\frac{\varepsilon}{2}$ $(\forall\delta>0)$. 由泰勒公式，$f(x+\delta)=f(x)+f'(x)\delta+\frac{1}{2}f''(\xi)\delta^2$,
则 $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi)\delta \Longrightarrow |f'(x)|\le\Big|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\Big|+\frac{1}{2}\delta M$,
则 $\forall\varepsilon>0,\exists G>0$, 当 $|x|>G$ 时，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$, 总有 $|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.