“十二五”江苏省高等学校重点教材(编号：2014-1-137)
普通高等教育“十三五”规划教材

南京大学 · 大学数学系列

微 积 分 II
(第三版)

张运清　廖良文　周国飞
邓卫兵　孔　敏　黄卫华　编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本套书由《微积分 I（第三版）》、《微积分 II（第三版）》两本书组成.《微积分 I（第三版）》内容包括极限与函数的连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、广义积分、向量代数与空间解析几何. 在附录中简介了行列式和矩阵的部分内容.《微积分 II（第三版）》内容包括多元函数微分学、二重积分、三重积分及其应用、曲线积分、曲面积分、场论初步、数项级数、幂级数、广义积分的敛散性的判别法、傅里叶级数、常微分方程初步等. 本套书继承了微积分的传统特色，内容安排紧凑合理，例题精练，习题量适、难易恰当.

本套书可供综合性大学、理工科大学、师范院校作为教材，也可供相关专业的工程技术人员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. Ⅱ/张运清等编. —3 版. —北京：科学出版社, 2020.8

“十二五”江苏省高等学校重点教材　普通高等教育“十三五”规划教材. 南京大学·大学数学系列

ISBN 978-7-03-065848-7

Ⅰ. ① 微…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 149775 号

责任编辑：许　蕾　曾佳佳／责任校对：杨聪敏
责任印制：徐晓晨／封面设计：许　瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 8 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2016 年 6 月第　二　版　印张：17 3/4
2020 年 8 月第　三　版　字数：420 000
2020 年10月第十一次印刷

定价：69.00 元

第三版前言

本书第三版是在第二版的基础上, 根据多年的教学实践中积累的经验, 进行修订而成.

在此次修订中, 我们保持了这套教材原有的编写思想与基本内容框架, 但对第二版使用中发现的不能适应课堂教学的部分进行了修改. 我们纠正了第二版中的一些排版错误, 更正了习题参考答案中的个别错误答案. 我们对部分知识点进行了重写 (如无穷大量的定义), 增加了部分内容 (如利用曲面积分计算立体的体积), 增加了一些例题 (如极限部分和曲面积分部分增加了例题), 修改了一些定理的证明 (如第 5 章链式法则的证明), 并对与章节内容不适应的习题做了调整 (如第 1 章、第 5 章和第 10 章的习题), 从而使本书内容更适应于微积分课程的教学, 也更适合学生自学和自我检测.

此次修订工作由张运清老师完成, 邓卫兵、黄卫华、孔敏、廖良文和周国飞老师提供了具体的修订意见, 并进行了审阅. 很多任课教师对本书的编写和修订提出了宝贵的意见和建议, 在此谨向他们致以诚挚的谢意.

新版中存在的问题, 欢迎广大专家、同行和读者给予批评指正.

编　者

2020 年 6 月

第二版前言

本书第一版在 2013 年 8 月正式出版, 2014 年被江苏省教育厅列入江苏省高等学校重点教材立项建设名单 (修订教材). 自 2013 年以来, 我们在南京大学 2013、2014、2015 级的本科生中使用了该教材, 在教学使用中取得了良好的效果. 在使用过程中, 我们也发现了第一版存在的一些问题和不足之处. 在多次倾听任课老师的建议以及学生的意见后, 根据这些建议和意见, 并根据教学实践中积累的经验, 我们对第一版进行了修订, 从而形成了本书的第二版.

在此次修订中, 我们保持了这套教材原有的编写思想与基本内容框架, 但对一些在教学过程中发现的不能适应课堂教学的部分进行了修改. 我们首先纠正了第一版中的一些排版错误, 更正了习题参考答案中的个别错误答案. 其次, 我们对部分知识点进行了重写 (如第 7 章两类曲线积分之间的关系, 第 10 章微分方程积分因子等), 修改了一些结论的证明 (如第 7 章格林公式的证明、第 8 章正项级数柯西积分判别法的证明等), 修改了一些例题的解法 (如第 6 章二重积分换元积分法部分的例题, 第 7 章格林公式部分的例题, 第 8 章幂级数部分的例题, 以及第 8 章广义积分敛散性判别法部分的例题等), 并对微积分 I 和微积分 II 的几乎所有章节都有针对性地增加了大量难度不同的习题, 删除了第一版中某些难度不合适的习题, 从而使本书更加适应于微积分课程的教学, 也更适合学生自学和自我检测.

此次修订工作由张运清老师具体负责, 邓卫兵、黄卫华、孔敏、廖良文和周国飞老师提供了具体的修订意见, 并进行了审阅. 南京大学数学系主任秦厚荣教授、副主任朱晓胜教授对本书的再版提供了很多具体的支持和帮助, 很多任课教师也对本书的编写和修订提出了许多宝贵的意见和建议, 在此谨向他们致以诚挚的谢意. 编者特别感谢科学出版社黄海、许蕾等编辑和工作人员为本书的出版所付出的辛勤劳动.

由于编者水平有限, 书中错误和不足之处在所难免, 期盼广大读者批评指正.

编　者

2016 年 6 月

第一版前言

为了使大学数学的教学内容更加适应新形势的需要, 我们根据南京大学新的招生形式(按大类招生)、国际交流的需要以及 "三三制" 教学模式的要求, 在数学系和教务处的指导下, 对我校非数学系的外系科大学数学的教学进行了多次研讨, 确定了外系科大学数学的教学模式和教学大纲. 微积分是大学生必修的基础数学课, 学习微积分学可以培养学生的逻辑思维能力, 提高学生的数学素养, 对学生以后的发展起着重要的作用. 本教材是我们为南京大学理工科第一层次的一年级本科生 (包含物理、电子、计算机、软件工程、天文、工程管理、地球科学、大气科学、地理科学以及商学院等专业) 编写的大学数学教材. 南京大学理工科第一层次大学数学共开设两个学期, 总课时为 128 课时, 另加 64 课时的习题课. 整套教材分上、下两册, 上册主要包含极限, 一元函数微积分学, 空间解析几何与向量代数; 下册主要包含多元函数微积分学, 级数及常微分方程初步等.

在编写本教材的过程中, 我们参阅了国内外部分教材, 汲取其精华, 根据我们的理解和经验, 对教材作了现有的编排, 并配备了相当数量的习题. 其中黄卫华编写了第 1、4 章以及附录, 邓卫兵编写了第 2 章, 孔敏编写了第 3 章, 张运清编写了第 5、6 章, 廖良文编写了第 7、8、9 章, 周国飞编写了第 10 章. 张运清绘制了上、下册的大部分图形. 全书由黄卫华统稿, 周国飞对下册也作了部分统稿工作. 附录中, 我们给出了习题的参考答案. 但建议读者不要依赖参考答案, 尽量独立思考.

在本教材的编写过程中, 我们得到了系领导的关怀, 无论在资金还是时间上都得到了他们大力的支持, 在此表示衷心的感谢! 数学系党委书记秦厚荣教授、系主任尤建功教授、副系主任师维学教授、尹会成教授、朱晓胜教授、数学系陈仲教授、罗亚平教授、宋国柱教授、姚天行教授、姜东平教授、梅家强教授等对本教材进行了审阅并提出了非常宝贵的意见. 此外, 在本教材的试用阶段 (2010.9~2013.6), 邓建平、陆宏、潘灏、肖源明、耿建生、李军、吴婷、李春、崔小军、苗栋、王奕倩、程伟、谭亮、王伟、刘公祥、窦斗、石亚龙、杨俊峰、钱志、李耀文、陈学长等老师也提出了许多有益的建议, 在此表示感谢!

此外, 在 2009 年本教材获南京大学 "985 工程" 二期 "精品教材" 建设基金的支持, 在此表示由衷的感谢!

由于我们水平有限, 错误和缺点在所难免, 期盼读者批评指正.

编　者

目　录

附录 部分习题参考答案

扫码获取

第 5 章　多元函数微分学

在前面几章中, 我们讨论的函数是只有一个自变量的函数, 即一元函数, 研究的是一元函数的微积分. 但在现实问题中, 常常出现一个变量依赖于两个或两个以上变量的情形, 这就是多元函数. 因此, 将一元函数的微积分推广到多元函数的微积分是必要的, 也是自然的. 本章讨论多元函数及其微分学, 多元函数的积分学则留到下面的章节讨论.

5.1　多元函数的极限与连续性

5.1.1　点集基本知识

为了讨论多元函数, 我们需要先介绍 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中点集的基本知识. 首先我们把距离及邻域的概念推广到 n 维空间.

设 $P_1(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $P_2(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, 我们用

$$\rho(P_1,P_2) \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}$$

表示两点 P_1,P_2 间的**距离**.

定义 5.1.1 (邻域)　设 $P_0\in\mathbb{R}^n$, $\delta>0$, 点集

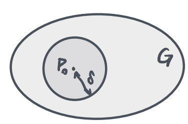
$$N_\delta(P_0)=\{\,P\,|\,P\in\mathbb{R}^n,\ \rho(P,P_0)<\delta\,\}$$

称为点 P_0 的δ **邻域**, 简称**邻域**. 点集

$$\mathring{N}_\delta(P_0) \;=\; N_\delta(P_0)\backslash\{P_0\}$$

称为点 P_0 的**去心 δ 邻域**, 简称**去心邻域**.

下面我们给出 n 维空间中内点、外点、边界点、聚点以及开集和闭集的概念.



定义 5.1.2 (内点, 外点, 边界点, 聚点)　设 $G\subseteq\mathbb{R}^n$,

(1) 若 $P_0\in G$, 且存在 $\delta>0$, 使得 $N_\delta(P_0)\subset G$, 则称 P_0 是 G 的**内点**. G 的内点的集合称为 G 的**内部**, 记为 G°.

(2) 若 $P_0\notin G$, 且存在 $\delta>0$, 使得 $N_\delta(P_0)\bigcap G=\varnothing$, 则称 P_0 是 G 的**外点**. G 的外点的集合称为 G 的**外部**.

(3) 若 $P_0\in\mathbb{R}^n$, 且对任意的 $\delta>0$, $N_\delta(P_0)$ 中既有点属于 G, 又有点不属于 G, 则称 P_0 是 G 的**边界点**. G 的全部边界点的集合称为 G 的**边界**, 记为 ∂G.

(4) 若 $P_0\in\mathbb{R}^n$, 且对任意的 $\delta>0$, $\mathring{N}_\delta(P_0)$ 中总有点属于 G, 则称 P_0 是 G 的**聚点**.

聚点的另一定义: 存在G中点的无穷序列, 其极限为P_0.

定义 5.1.3 (开集, 闭集) 设 $G \subseteq \mathbb{R}^n$,

(1) 若 G 的所有点都是 G 的内点, 即 $G = G^\circ$, 则称 G 为**开集**.

(2) 若 G 关于全集 $\mathbb{R}^n$ 的补集 (即 $\mathbb{R}^n \setminus G$) 为开集, 则称 G 为**闭集**. $\Longleftrightarrow$ G所有聚点的集合

(3) 如果点集 G 内任意两点, 都可用曲线连接起来, 且该曲线上的点都属于 G, 则称 G 为**连通集**.

(4) 若 G 是开集, 又是连通集, 则称 G 为**开区域**.

(5) 若存在非空开区域 A, 使得 $G = A \bigcup \partial A$, 则称 G 为**闭区域**.

(6) 开区域与闭区域统称**区域**.

我们规定, 空集 $\varnothing$ 既是开集又是闭集, 因而全空间 $\mathbb{R}^n$ 既是开集又是闭集. 除此之外, $\mathbb{R}^n$ 的任何非空真子集都不可能既是开集又是闭集.

定义 5.1.4 (有界集) 设 $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \mathbb{R}^n$. 若存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得 $G \subset N_k(P_0)$, 则称 G 为**有界集**, 此时称

$$d(G) = \sup\{\rho(P_1, P_2) \mid \forall P_1, P_2 \in G\}$$

为 G 的**直径**. 否则, 称 G 为**无界集**.

例 5.1.1 设 $\mathbb{R}^3$ 中的点集

$$A = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\},$$

$$B = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\},$$

$$C = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

则由定义可得下列结论:

(1) $A^\circ = B^\circ = A, C^\circ = \varnothing$;

(2) $\partial A = \partial B = \partial C = C$;

(3) 集合 A, B 的聚点的集合都是 B, C 的聚点的集合是 C;

(4) A, B, C 都是连通集, 也是有界集, 直径都是 2;

(5) A 是开集也是开区域, B 是闭集也是闭区域, C 是闭集但不是闭区域.

例 5.1.2 设 $\mathbb{R}^2$ 中的点集 $G = \left\{(x,y) \,\middle|\, x = \dfrac{1}{n}, y = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, 则由定义可得下列结论:

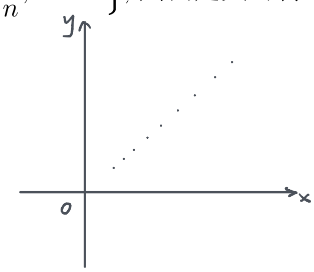
(1) $G^\circ = \varnothing$;

(2) $\partial G = G \bigcup \{(0,0)\}$;

(3) 集合 G 有唯一的聚点 $(0,0)$;

(4) G 不是连通集, 不是开集, 也不是闭集;

(5) G 是有界集且 $d(G) = \sqrt{2}$.



5.1.2 多元函数的概念

定义 5.1.5 (n 元函数) 设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 我们称映射

$$f: \quad D \to \mathbb{R}$$

为定义在 D 上的 n **元函数**. n 元函数也常常记为

$$y = f(P), \quad P \in D,$$

或

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D.$$

变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为**自变量**, y 称为**因变量**, D 称为函数 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$.

$$f(D) = \{\, f(P) |\, P \in D(f)\}$$

称为函数 f 的**值域**.

在记号上, 我们常将二元函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$ 记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D;$$

将三元函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^3)$ 记为

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D.$$

二元函数和二元以上的函数统称为**多元函数**.

与一元函数类似, 对于由解析表达式给出的多元函数, 常常并不明确表明定义域, 此时多元函数的定义域理解为其自然定义域, 也就是使这个解析表达式有意义时自变量所容许变化的范围. 例如, 二元函数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, 其自然定义域为 $\{(x, y) |\, x^2 + y^2 < 1\}$.

与一元函数类似, 我们可以定义多元隐函数、多元复合函数、多元初等函数, 以及多元有界函数, 在此不赘述.

例 5.1.3　讨论下列函数的定义域.

(1) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$;

(2) $z = \arcsin(x + y)$;

(3) $u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$;

(4) $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$.

解　(1) $D(z) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$;

(2) $D(z) = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x + y \leqslant 1\}$;

(3) $D(u) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$;

(4) $D(u) = \{(x, y, z) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9\}$. □

我们知道, 一元函数 $y = f(x)$ 的图形是所有满足等式 $y = f(x)$ 的点 (x, y) 的集合, 通常是平面上的曲线. 类似地, 二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形是所有满足等式 $z = f(x, y)$ 的点 (x, y, z) 的集合, 通常是空间曲面. 例如函数 $z = 2x + 3y + 4$ 的图形是空间中一平面, 而函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的图形是圆锥面.

$(x, y, f(x,y))$

5.1.3　多元函数的极限

极限的概念是研究函数性态的重要工具. 下面我们以二元函数为例来叙述多元函数极限的定义.

一、二重极限

定义 5.1.6 (二重极限) 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点. 若存在常数 A, 使得对于任意给定的正数 ε, 总存在正数 δ, 当 $P(x,y) \in D$ 且 $0 < \rho(P, P_0) < \delta$ 时, 恒有

$$|f(P) - A| = |f(x,y) - A| < \varepsilon,$$

则称**函数 $f(x,y)$ 在 $P \to P_0$ 时以 A 为极限**, 记为

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \quad 或 \quad f(P) \to A \quad (P \to P_0),$$

也记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ 或 } f(x,y) \to A \quad \big((x,y) \to (x_0,y_0)\big).$$

或

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A.$$

这个极限也称为**二重极限**.

简单地说, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时, 恒有 $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

以上关于二元函数的二重极限的概念, 可相应地推广到 n 元函数的 n 重极限, 读者可以自行完成. $|f(x)-A| \leqslant M|x-x_0|^\alpha$. 二重极限时放缩为 $M\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^\alpha$.

例 5.1.4 试用定义证明 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (2x + 4y) = 10.$

解 因为

$$\begin{aligned}\big|(2x+4y) - 10\big| &= \big|2(x-1) + 4(y-2)\big| \\ &\leqslant 2|x-1| + 4|y-2| \\ &\leqslant 6\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2},\end{aligned}$$

所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$, 则当 $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$ 时, 恒有

$$\big|(2x+4y) - 10\big| < \varepsilon,$$

由定义可知

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (2x + 4y) = 10. \qquad \square$$

二重极限的定义与一元函数极限的定义在形式上并无多大差异, 因此, 一元函数极限的运算法则 (如四则运算法则, 无穷小的运算法则) 与有关性质 (如极限的唯一性, 局部有界性, 夹逼准则) 等都可以推广到二重极限中来. 但由于变量的增多, 二元函数的定义域是平面点集, 二重极限的复杂性在于点 $P(x,y)$ 在平面上趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式是多种多样的, 而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$ 是指点 $P(x,y)$ 在定义域中以任何方式趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,

$f(x,y)$ 都趋向于同一个常数 A. 因此, 如果 $P(x,y)$ 在定义域中以某一特殊的方式 (如沿着某条确定的直线或某条确定的曲线) 趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 趋向于某一常数, 我们并不能由此断定二重极限存在. 但是, 如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 趋向于不同的值, 那么我们就可以断定函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在.

极限不存在的判定.

例 5.1.5　试求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　方法 1: 因为

放缩为 ε-δ 形式

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

所以 $\forall \varepsilon>0$, 取 $\delta=2\varepsilon$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 恒有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon.$$

由定义可知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

方法 2: $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=x\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, x 是无穷小, $\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$ 是有界变量, 无穷小与有界变量的积是无穷小, 所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

方法 3: 记 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 则

换元, 减少变量

$$(x,y)\to(0,0) \Longleftrightarrow \rho\to 0^+, \qquad f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho\cos\theta\sin\theta,$$

所以　$\substack{x\to 0\\ y\to 0}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+}\rho\cos\theta\sin\theta=0. \qquad \square$$

例 5.1.6　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy^2}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y}$.

解　(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy^2}{x} = \lim\limits_{\substack{u\to 0\\ y\to 2}} y^2\dfrac{\sin u}{u}=4$;　等价无穷小: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x}=4$

(2) $0<\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+y}$, 而 $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+y}=0$, 由夹逼准则可知

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y}=0. \qquad \square$$

例 5.1.7　试证 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时无极限.

解 方法 1: 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=0$ 趋向于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{y=0\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0,$$

当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

由此可知, 当 (x,y) 以不同方式趋向于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 趋向于不同的值, 所以 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时无极限.

方法 2: 令 $x=\rho\cos\theta_0, y=\rho\sin\theta_0$, θ_0 为常数, 且 $0\leqslant\theta_0<2\pi$, 则

$$(x,y)\to(0,0)\Longleftrightarrow\rho\to 0^+,$$

$$f(x,y)=f(\rho\cos\theta_0,\rho\sin\theta_0)=\cos\theta_0\sin\theta_0,$$

由于点 P 沿着直线 $L: x=\rho\cos\theta_0, y=\rho\sin\theta_0$ 趋向于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\in L\\(x,y)\to(0,0)}} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0^+}\cos\theta_0\sin\theta_0=\cos\theta_0\sin\theta_0,$$

其极限值随着 θ_0 的变化 (即随着直线 L 的变化) 而取不同的值, 所以函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时无极限. □

二、累次极限

上面介绍的二重极限, 是当函数的两个自变量 (如果是 n 元函数, 就是 n 个自变量) 同时趋于各自的极限时所得出的. 除此之外, 有时我们还会遇到函数的两个自变量按先后次序分别趋于各自的极限的情形, 这就是累次极限.

对于二元函数 $f(x,y)$, 先把变量 y 固定 (视 y 为参数), 这时 $f(x,y)$ 只是 x 的一元函数, 如果对于一切固定的 y, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 则这个极限是与 y 有关的函数, 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y).$$

然后再让 $y\to y_0$, 考虑 $\varphi(y)$ 的变化, 若 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$ 也存在, 设为 A, 即

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A,$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**先对 x 后对 y 的累次极限**, 记为

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A.$$

类似地, 可定义函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**先对 y 后对 x 的累次极限**

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

例 5.1.8　求函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处的两个累次极限.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}0=0.$

同理可知 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0.$ □

例 5.1.9　讨论函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的二重极限和累次极限.

解　由无穷小与有界函数的乘积是无穷小易知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

但当 $x\neq 0$ 时, $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在. □

这两个例子说明二元函数的二重极限与累次极限是两个不同的概念, 二重极限存在并不能得出累次极限存在; 反过来, 二元函数的两个累次极限都存在且相等也不能得出二重极限存在. 在计算两种不同次序的累次极限时, 要注意不能随便交换极限次序, 而在求二重极限时, 也要注意不能用累次极限代替二重极限, 否则可能得出错误的结论.

5.1.4　多元函数的连续性

一、多元连续函数的定义

定义 5.1.7 (连续性)　设 $G\subseteq\mathbb{R}^n$, 函数 f 在 G 上有定义, P_0 是 G 的聚点且 $P_0\in G$. 若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 f 在 P_0 处**连续**. 如果 G 内的每一点都是聚点, 且 f 在 G 的每一点都连续, 则称 f 在 G 上**连续**. 如果函数 f 在 P_0 处不连续, 则称函数 f 在 P_0 处**间断**, 并称 P_0 是函数 f 的**间断点**.

由定义可知,

f 在 P_0 连续 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $P\in G$ 且 $\rho(P,P_0)<\delta$ 时, 恒有 $|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$.

另外, 如果 f 是二元函数 $z=f(x,y)$, 记

$$\Delta x=x-x_0,\qquad \Delta y=y-y_0,$$

$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

分别称 Δx 和 Δy 为自变量 x 和 y 的增量, Δz 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**全增量**, 于是

$$\boxed{f(x,y)\ \text{在点}\ (x_0,y_0)\ \text{处连续} \Longleftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0.}$$

与一元函数类似, 有限个多元连续函数的和、差、积、商 (分母不为零) 仍是连续函数. 多元连续函数的复合函数仍是连续函数, 多元初等函数在其定义域上每一点连续.

例 5.1.10 设

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } xy=0,\\ 0, & \text{当 } xy\neq 0.\end{cases}$$

试证明函数 $f(x,y)$ 在原点处关于自变量 x 或 y 分别是连续的, 但该函数在原点处不连续.

证明 当固定 $x=0$ 或 $y=0$ 时, 有 $f(0,y)=f(x,0)=1$, 所以

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=f(0,0)=1, \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y)=f(0,0)=1,$$

因而函数 $f(x,y)$ 在原点处关于自变量 x 或 y 分别是连续的. 但容易看出 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在, 所以函数 $f(x,y)$ 在原点处并不连续. □

沿轴: →0
不沿轴: →1

例 5.1.11 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x+y}{x^2y^2}$.

解 函数 $\dfrac{x+y}{x^2y^2}$ 是二元初等函数, 在点 $(1,1)$ 处有定义, 故在点 $(1,1)$ 处连续. 所以

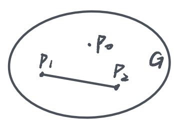
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x+y}{x^2y^2}=\frac{1+1}{1}=2.$$ □

二、有界闭区域上连续函数的性质

与一元函数类似, 定义在有界闭区域上的连续函数有如下重要性质 (我们略去定理的证明):

定理 5.1.1 (零点定理) 设 $G\subseteq\mathbb{R}^n$ 为有界闭区域, 函数 f 在 G 上连续, 若 $P_1,P_2\in G$, 且

$$f(P_1)f(P_2)<0,$$



则存在 $P_0\in G$, 使得 $f(P_0)=0$.

定理 5.1.2 (介值定理) 设 $G\subseteq\mathbb{R}^n$ 为有界闭区域, 函数 f 在 G 上连续, $P_1,P_2\in G$, 且 $f(P_1)\neq f(P_2)$. 设 μ 为满足不等式

$$f(P_1)<\mu<f(P_2) \qquad (\text{或}\ \ f(P_2)<\mu<f(P_1))$$

的任意实数, 则存在 $P_0\in G$, 使得 $f(P_0)=\mu$.

定理 5.1.3 (有界性定理) 设 $G\subseteq\mathbb{R}^n$ 为有界闭区域, 函数 f 在 G 上连续, 则函数 f 在 G 上有界.

定理 5.1.4 (最值定理) 设 $G\subseteq\mathbb{R}^n$ 为有界闭区域, 函数 f 在 G 上连续, 则函数 f 在 G 上取得最大值和最小值.

习题 5.1

1. 求下列函数的定义域, 并指出其是开集还是闭集, 是开区域还是闭区域, 是有界集还是无界集:

   (1) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

(2) $f(x,y)=\ln(2-|x|-|y|)$;

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-4}$;

(4) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$;

(5) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$;

(6) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{z}-x}}+\sqrt{1-z}+\ln(2-|y|)$.

2. 求下列函数:

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}$, 求 $f\left(2x,\dfrac{1}{y}\right)$;

(2) $f(x+y,x-y)=3x^2+2xy-y^2+2$, 求 $f(x,y)$.

3. 用定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(3x+y)=9$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x+y^2}=0$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x-y)\sin\dfrac{1}{xy}=0$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{2}{3}$.

$\left|(x-y)\sin\frac{1}{xy}-0\right|\le|x-y|\le|x|+|y|$
$\le 2\sqrt{x^2+y^2}$

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{3x+y}{2+xy}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\mathrm{e}^{xy}-1}{2x}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+2y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{x+y-1}-1}{x+y-2}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{\ln(1+x)}$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{\tan(xy)}}$;

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

(10) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to +\infty}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x^2y}$;

(11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1+y)}{x+y}$;

(12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}$;

(13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+2\ln(1+x^2+y^2)\right)^{-\cot(x^2+y^2)}$;

(14) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(1+x^2+y^2)}$.

5. 证明下列函数当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^6}{(x^4+y^3)^2}$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{xy\sin y}{x^2+y^4}$.

6. 试证函数 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$ 当点 $P(x,y)$ 沿任意直线方向趋向于点 $P_0(0,0)$ 时, 极限皆存在且相等, 但函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(0,0)$ 处无极限.

7. 求下列函数的累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 以及 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^6}{(x^4+y^3)^2}$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{xy\sin y}{x^2+y^4}$.

8. 设函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上对 x 连续, 对 y 满足利普希茨 (Lipschitz) 条件, 即

$$\big|f(x,y_1)-f(x,y_2)\big|\leqslant L|y_1-y_2|,\qquad \forall (x,y_1),(x,y_2)\in D,$$

这里 L 为常数, 证明: $f(x,y)$ 在 D 上连续.

5.2 偏导数与全微分

一元函数的导数是研究函数性质的重要工具. 为了研究多元函数的性质, 我们需要研究多元函数的偏导数.

5.2.1 偏导数

一、偏导数的定义

定义 5.2.1 (偏导数) 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 函数 $z=f(x,y)$ 在 P_0 的 δ 邻域 $N_\delta(P_0)$ 内有定义, 在 $N_\delta(P_0)$ 中固定 $y=y_0$, 得到一元函数 $f(x,y_0)$, 若 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处可导, 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限值为**函数** $z=f(x,y)$ **在点** (x_0,y_0) **处对** x **的偏导数**, 记为 $f'_x(x_0,y_0)$, 或

$$f'_1(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

对第一个分量求导

类似地, 在 $N_\delta(P_0)$ 中固定 $x=x_0$, 得到一元函数 $f(x_0,y)$, 若 $f(x_0,y)$ 在 y_0 处可导, 即

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在, 则称此极限值为**函数** $z=f(x,y)$ **在点** (x_0,y_0) **处对** y **的偏导数**, 记为 $f'_y(x_0,y_0)$, 或

$$f'_2(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 及对 y 的两个偏导数都存在, 则称 f 在点 (x_0,y_0) 处**可偏导**; 若二元函数 $f(x,y)$ 在开区域 G 中每一点皆可偏导, 则称 f 在 G 上**可偏导**.

设 $(x,y)\in G$, 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 x 的偏导数记为 $f'_x(x,y)$, 或

$$f'_x,\quad f'_1,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 y 的偏导数记为 $f'_y(x,y)$, 或

$$f'_y,\quad f'_2,\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

上述关于二元函数偏导数的定义可以推广到 $n(n>2)$ 元函数的偏导数.

由偏导数的定义可以看出, 求多元函数的偏导数, 实际上是把多元函数看作其中某一个变量的一元函数, 对该自变量求导数. 在求导过程中, 始终把其余变量看作常数即可.

例 5.2.1　设 $f(x,y)=x^2y+\sin(xy)+2\mathrm{e}^x+y$, 求 $f'_x(0,0),\quad f'_y(0,0)$.

解　方法 1:

$$f(x,0)=2\mathrm{e}^x,\quad f'_x(0,0)=(2\mathrm{e}^x)'\Big|_{x=0}=2\mathrm{e}^x\Big|_{x=0}=2.$$

$$f(0,y)=2+y,\quad f'_y(0,0)=(2+y)'\Big|_{y=0}=1.$$

方法 2:

$$f'_x(x,y)=2xy+y\cos(xy)+2\mathrm{e}^x,\quad f'_y(x,y)=x^2+x\cos(xy)+1,$$

所以,

$$f'_x(0,0)=2,\quad f'_y(0,0)=1.$$

□

例 5.2.2　设 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}+\ln(2x+y)+y^4$, 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\dfrac{1}{y}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}+\frac{2}{2x+y}=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{2}{2x+y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-\dfrac{x}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}+\frac{1}{2x+y}+4y^3=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{1}{2x+y}+4y^3.$$

□

例 5.2.3　设 $f(x,y,z)=x^y+y^z+z^x$, 其中 $x>0,y>0,z>0$, 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

解

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}+z^x\ln z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x+zy^{z-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=y^z\ln y+xz^{x-1}.$$

□

二、偏导数的几何意义

由定义可知, $f'_x(x_0,y_0)$ 是一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数. 在几何上, 函数 $z=f(x,y)$ 表示一个曲面, 记为 S. 而 $z=f(x,y_0)$ 是曲面 S 与平面 $y=y_0$ 的交线 C_1, 运用一元函数导数的几何意义, 容易得出偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 表示曲线 C_1 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率. 类似地, $f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲线 $C_2: z=f(x_0,y)$ 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 T_y 对 y 轴的斜率 (见图 5.1).

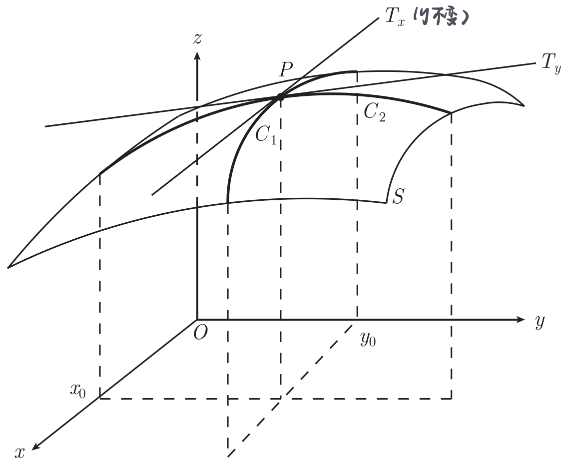


图 5.1

三、可偏导与连续的关系

我们知道, 对于一元函数 $y=f(x)$, 它在一点 x_0 处可导, 则它在该点一定是连续的. 但对于二元函数 $z=f(x,y)$ 而言, 在一点 (x_0,y_0) 处可偏导, 却不一定在该点连续. 例如下面的例子:

例 5.2.4 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 试求 $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$.

解

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0;$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.$$ □

此函数在点 $(0,0)$ 处对 x 和 y 的偏导数都存在且相等, 但由例 5.1.7 知此函数在点 $(0,0)$ 处没有极限, 所以此函数在点 $(0,0)$ 处不连续. 但是我们增加一个条件后有如下结论:

定理 5.2.1 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $N_\delta(P_0)$ 内可偏导, 且 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 $N_\delta(P_0)$ 内有界, 则函数 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续.

证明 $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=\big(f(x,y)-f(x_0,y)\big)+\big(f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\big)$, 由一元函数的微分中值定理可得

$$\Delta z=f'_x(\xi,y)(x-x_0)+f'_y(x_0,\eta)(y-y_0),$$

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间, η 介于 y 和 y_0 之间. 已知 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 $N_\delta(P_0)$ 内有界, 所以

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} \Delta z = 0,$$

即 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续. □

5.2.2 高阶偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 一般仍是二元函数, 假设它们可以继续对 x 或 y 求偏导数, 从而得到四个新的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}f'_x(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}f'_x(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}f'_y(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}f'_y(x,y),$$

称之为**二阶偏导数**, 并分别记为

$$f''_{xx}(x,y),\quad f''_{xy}(x,y),\quad f''_{yx}(x,y),\quad f''_{yy}(x,y),$$

或

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

或

$$f''_{11},\quad f''_{12},\quad f''_{21},\quad f''_{22}.$$

其中 f''_{xy} 与 f''_{yx} 称为**二阶混合偏导数**. 有时会相等.

也可将上述二阶偏导数的记法中的 f 写成 z, 例如 f''_{xx} 可记为 z''_{xx}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 或 z''_{11}.

若二阶偏导数仍是 x,y 的二元函数, 我们还可以继续对 x 或 y 求偏导数, 由此可得到三阶以及三阶以上的偏导数.

二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

例 5.2.5 求 $z=x^2y^3+\mathrm{e}^{xy}$ 的二阶偏导数.

解
$$\begin{aligned}
&z'_x=2xy^3+y\mathrm{e}^{xy}, && z'_y=3x^2y^2+x\mathrm{e}^{xy},\\
&z''_{xx}=2y^3+y^2\mathrm{e}^{xy}, && z''_{xy}=6xy^2+(1+xy)\mathrm{e}^{xy},\\
&z''_{yx}=6xy^2+(1+xy)\mathrm{e}^{xy}, && z''_{yy}=6x^2y+x^2\mathrm{e}^{xy}.
\end{aligned}$$
□

例 5.2.6 求 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的两个二阶混合偏导数.

解

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=0,$$

$$f'_x(0,y)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x}=-y\quad(y\neq0),$$

$$f'_y(x,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{y}=x\quad(x\neq 0),$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1,$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

□

由上述两个例子可以看出, 有些函数的两个二阶混合偏导数相等, 即混合偏导数与求导次序无关, 但是有些函数的两个二阶混合偏导数不相等. 下面的定理给出了一个混合偏导数与求导次序无关的充分条件:

定理 5.2.2 若二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 在 (x,y) 处皆连续, 则 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$, 即混合偏导数与求导的次序无关.

证明 考虑辅助函数

$$F(h,k)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y),$$

其中 $|h|,|k|$ 充分小, 令

$$\varphi(X)=f(X,y+k)-f(X,y),$$

则

$$F(h,k)=\varphi(x+h)-\varphi(x),$$ 二元化一元

应用拉格朗日中值定理可得

$$\begin{aligned}F(h,k)=&\varphi'(x+\theta_1 h)h=\big(f'_x(x+\theta_1 h,y+k)-f'_x(x+\theta_1 h,y)\big)h\\=&f''_{xy}(x+\theta_1 h,y+\theta_2 k)hk\quad(0<\theta_1,\theta_2<1),\end{aligned}$$

又令

$$\psi(Y)=f(x+h,Y)-f(x,Y),$$

则

$$F(h,k)=\psi(y+k)-\psi(y),$$

同样应用拉格朗日中值定理可得

$$\begin{aligned}F(h,k)=&\psi'(y+\theta_3 k)k=[f'_y(x+h,y+\theta_3 k)-f'_y(x,y+\theta_3 k)]k\\=&f''_{yx}(x+\theta_4 h,y+\theta_3 k)hk\quad(0<\theta_3,\theta_4<1),\end{aligned}$$

于是

$$f''_{xy}(x+\theta_1 h,y+\theta_2 k)=f''_{yx}(x+\theta_4 h,y+\theta_3 k).$$

令 $h\to 0,k\to 0$, 由于 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 在 (x,y) 连续, 所以

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

□

此定理可以推广到三阶以上的混合偏导数的情况, 在其连续性条件下, 与求偏导的次序无关. 对于三元以上的多元函数, 也有类似的结论.

5.2.3　全微分

一、全微分的概念

偏导数表示多元函数对某单个变量的变化率, 还不能全面刻画函数在某点附近的变化性态. 设自变量 x, y 分别有增量 $\Delta x, \Delta y$, 函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的**全增量**定义为

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

全增量是 $\Delta x, \Delta y$ 的函数, 可以全面刻画函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 附近的变化情况. 然而, 全增量往往是一个较复杂的函数, 求值比较困难. 例如,

$$z = x^y, x_0 = 1, y_0 = 2, \Delta x = -0.02, \Delta y = 0.05,$$

$$\Delta z = (1 - 0.02)^{(2+0.05)} - 1^2 = 0.98^{2.05} - 1^2,$$

在这个不太复杂的函数中, 要求出 Δz 的值也是很困难的. 为此, 我们引进全微分的概念, 并用全微分近似代替全增量来研究函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 附近的变化. 下面我们以二元函数为例给出全微分的概念, 对于 n 元函数, 可以完全类似地定义全微分.

定义 5.2.2 (全微分)　设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某邻域内有定义, 若函数在点 P 的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

(距离)

其中 A, B 只与点 (x, y) 有关而与自变量的增量 Δx 和 Δy 无关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $o(\rho)$ 是比 ρ 高阶的无穷小 (当 $\rho \to 0^+$), 则称**函数** $f(x, y)$ **在点** (x, y) **处可微**, 其线性部分 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为**函数** $z = f(x, y)$ **在点** (x, y) **处的全微分**, 记为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y.$$

$\Delta z = dz + o(\rho)$

如长方形的面积 $A(x, y) = xy$, 若受温度变化的影响, 长方形的长和宽的增量分别为 Δx 与 Δy(见图 5.2). 此时面积的增量为

$$\Delta A = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y,$$

因为

$$0 \leqslant \frac{|\Delta x\Delta y|}{\rho} \leqslant \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\rho} = \rho,$$ 夹逼定理

所以

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\Delta x\Delta y}{\rho} = 0.$$

即 $\Delta x\Delta y = o(\rho)$, 所以函数 $A(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微, 且

$$\mathrm{d}A = y\Delta x + x\Delta y.$$

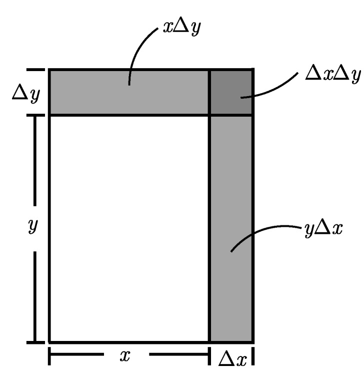


图 5.2

二、连续, 可偏导与可微的关系

定理 5.2.3 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 则函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续.

证明 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 则

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

在上式中令 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 可得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0.$$

即函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续. □

定理 5.2.4 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 则函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可偏导, 且

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{5.2.1}$$

证明 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 则

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

在上式中令 $\Delta y=0$, 两边除以 Δx, 并令 $\Delta x\to 0$ 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}=A.$$

同理可得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=B$. 于是全微分的公式可写为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

分别取 $f(x,y)=x$ 与 $f(x,y)=y$, 代入上式可得 $\mathrm{d}x=\Delta x,\mathrm{d}y=\Delta y$, 所以全微分的公式又可写为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$ □

定理 5.2.3 与定理 5.2.4 表明: 连续与可偏导是可微的必要条件. 但是, 下面的例子说明连续性与可偏导不是可微的充分条件.

例 5.2.7 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 证明函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 可偏导, 但不可微.

证明 令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$, 则

x, y 之间没有关系

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\rho\to 0^+}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho}=0=f(0,0),$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导. 对x,y的偏导数均存在

(反证法) 令

$$\Delta z=f(x,y)-f(0,0)=f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+\omega,$$

$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y$

则

$$\omega=f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

显然, 如果 ω 是 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 否则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

$$\frac{\omega}{\rho}=\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}=\cos\theta\sin\theta\not\to 0\quad(\rho\to 0^+),$$

所以 $\omega\neq o(\rho)$, 即函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微. □

下面的定理给出了一个函数可微的充分条件:　偏导数连续

定理 5.2.5　设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 的某邻域内可偏导, 且 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 (x,y) 处连续, 则 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微.

证明　考虑函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处的全增量,

原函数可偏导 → 可微 → 原函数点连续
偏导数点连续 → 可微 → 原函数可偏导

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y),\end{aligned}$$

设 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 充分小, 运用一元函数的拉格朗日中值定理得

$$\Delta z=f'_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y\quad(0<\theta_1,\theta_2<1),$$

由 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 的连续性, 可得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f'_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)=f'_x(x,y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)=f'_y(x,y),$$

所以

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)=f'_x(x,y)+\alpha,\quad f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)=f'_y(x,y)+\beta.$$

其中

$$\alpha\to 0,\beta\to 0\ (\Delta x\to 0,\Delta y\to 0),$$

于是

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

由于 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y^2)}$,

$$0 \leqslant \frac{|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|}{\rho} \leqslant |\alpha|\frac{|\Delta x|}{\rho}+|\beta|\frac{|\Delta y|}{\rho} \leqslant |\alpha|+|\beta| \to 0 \quad \big((\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\big),$$

所以由夹逼准则可知

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=o(\rho) \quad (\rho\to 0^+).$$

即

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+o(\rho).$$

此式表明函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微. 偏导数连续 $\Leftrightarrow$ 连续可微 □

定义 5.2.3 (连续可微) 若函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 的某邻域内可偏导, 且 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 (x,y) 处连续, 则称**函数** $f(x,y)$ **在** (x,y) **处连续可微**. 若 $f(x,y)$ 在开区域 G 上每一点皆连续可微, 则称**函数** $f(x,y)$ **在** G **上连续可微**.

本段中对于二元函数的结论, 可以相应地推广到 n 元函数. 一般地, 若 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处可微, 则函数 u 在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处连续且可偏导, 且函数 u 的全微分可以表示为

$$\mathrm{d}u=f'_{x_1}\mathrm{d}x_1+f'_{x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+f'_{x_n}\mathrm{d}x_n.$$

如果 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 n 个偏导数 $f'_{x_1},f'_{x_2},\cdots,f'_{x_n}$ 在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处都连续, 则函数 u 在 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)$ 处可微, 此时称函数 u 在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处连续可微.

多元函数的连续性、可偏导性、可微性与连续可微性这四个性质之间的关系可用图 5.3 表示.

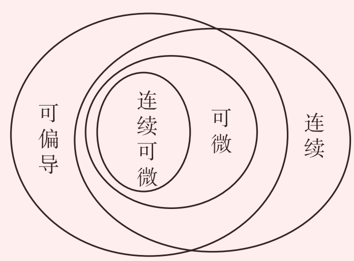


图 5.3

三、微分法则

二元函数具有与一元函数完全一样的微分法则. 设函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x,y) 处都可微, 由全微分的计算公式 (5.2.1) 易得:

(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

(2) $\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v$;

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2} \quad (v\neq 0)$.

例 5.2.8 求函数 $z=x^2y^3+\mathrm{e}^x\sin y$ 的全微分.

解　方法 1:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+\mathrm{e}^x\sin y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+\mathrm{e}^x\cos y,$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(2xy^3+\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}x+(3x^2y^2+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{d}y.$$

方法 2:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\mathrm{d}(x^2y^3+\mathrm{e}^x\sin y)=\mathrm{d}(x^2y^3)+\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\sin y)\\&=y^3\mathrm{d}(x^2)+x^2\mathrm{d}(y^3)+\mathrm{e}^x\mathrm{d}(\sin y)+\sin y\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\\&=2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}y+\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x\\&=(2xy^3+\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}x+(3x^2y^2+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

例 5.2.9　求函数 $u=\ln(xyz)+\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 在点 $(2,1,1)$ 处当 $\Delta x=0.1,\Delta y=0.2,\Delta z=0.1$ 时的全微分.

解

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z\\&=\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\Delta x+\left(\frac{1}{y}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\Delta y+\frac{1}{z}\Delta z.\end{aligned}$$

故函数 $u=\ln(xyz)+\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 在点 $(2,1,1)$ 处当 $\Delta x=0.1,\Delta y=0.2,\Delta z=0.1$ 时的全微分为

$$\mathrm{d}u=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{25}\right)\times 0.1+\left(1-\frac{2}{25}\right)\times 0.2+0.1=0.318.$$

□

四、全微分的应用*

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则函数在点 (x_0,y_0) 处的全增量可以表示为

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)=\mathrm{d}f\Big|_{(x_0,y_0)}+o(\rho),\end{aligned}$$

当 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 都很小的时候, $o(\rho)$ 也很小, 这样我们就可以用函数在 (x_0,y_0) 的全微分来近似计算全增量, 即

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

上式也可以写为

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

例 5.2.10　求 $0.99^{2.02}$ 的近似值.

解 设 $z=x^y$, 则

$$z'_x=yx^{y-1},\quad z'_y=x^y\ln x,$$

令 $x_0=1,y_0=2,\Delta x=-0.01,\Delta y=0.02$, 则由

$$z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx z(x_0,y_0)+z'_x(x_0,y_0)\Delta x+z'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

可得

$$\begin{aligned}0.99^{2.02}\approx&x_0^{y_0}+y_0x_0^{y_0-1}\Delta x+x_0^{y_0}\ln x_0\cdot\Delta y\\=&1^2+2\cdot1^1\cdot(-0.01)+1^2\ln1\cdot0.02=0.98.\end{aligned}$$ □

全微分除了用于近似计算, 还用于估计误差. 在实际生活中, 测量一个数据, 由于测量工具和测量方法的限制, 测量值和实际值之间总有一定的误差. 设某个量 u 的精确值为 A, 近似值为 a, 则 $|A-a|$ 称为 a 的绝对误差, 而 $\dfrac{|A-a|}{|A|}$ 称为 a 的相对误差 (实际应用中常用 a 代替分母中的 A). 在现实生活中, 某些量的精确值往往无从知晓, 因而绝对误差也就无法求得. 但是根据测量仪器的精度等条件, 我们有时可以知道误差在某一个范围内. 如果量 u 的精确值为 A, 近似值为 a, 如果存在尽可能小的正数 δ, 使得 $|A-a|\leqslant\delta$, 则称 δ 为近似值 a 的绝对误差界, 称 $\dfrac{\delta}{|a|}$ 为近似值 a 的相对误差界.

例 5.2.11 测得一块梯形土地的两底边长分别为 (72 ± 0.1)m, (108 ± 0.2)m, 高为 (56 ± 0.1)m, 问由测量的误差而引起的土地面积的绝对误差界和相对误差界各为多少?

解 设梯形的两底边为 x,y, 高为 z, 则面积 $u=\dfrac{1}{2}(x+y)z$.

$$u'_x=\frac{1}{2}z,\quad u'_y=\frac{1}{2}z,\quad u'_z=\frac{1}{2}(x+y).$$

令 $x_0=72,y_0=108,z_0=56,|\Delta x|\leqslant0.1,|\Delta y|\leqslant0.2,|\Delta z|\leqslant0.1$. 因为

$$\begin{aligned}|\Delta u|=&|u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-u(x_0,y_0,z_0)|\\\approx&|u'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x+u'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y+u'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z|\\\leqslant&|u'_x(x_0,y_0,z_0)||\Delta x|+|u'_y(x_0,y_0,z_0)||\Delta y|+|u'_z(x_0,y_0,z_0)||\Delta z|,\end{aligned}$$

所以绝对误差界为

$$\frac{1}{2}\times56\times0.1+\frac{1}{2}\times56\times0.2+\frac{1}{2}\times(72+108)\times0.1=17.4(\mathrm{m}^2),$$

相对误差界为

$$\frac{17.4}{|f(x_0,y_0,z_0)|}\leqslant\frac{17.4}{\frac{1}{2}\times(72+108)\times56}\approx0.35\%.$$ □

5.2.4 高阶微分*

函数 $z=f(x,y)$ 的全微分

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

一般情况下仍是 x,y 的二元函数 (注意此式中 $\mathrm{d}x=\Delta x,\mathrm{d}y=\Delta y$ 是与 x,y 无关的量). 若二元函数 $\mathrm{d}z$ 可微, 我们称函数 $z=f(x,y)$**二阶可微**, 称 $\mathrm{d}z$ 的全微分为函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶微分**, 记为 d^2z.

进一步, 如果 d^2z 仍然可微, 则称函数 $z=f(x,y)$**三阶可微**, 称 d^2z 的全微分为函数 $z=f(x,y)$ 的**三阶微分**, 记为 d^3z. 一般地, 如果 $\mathrm{d}^{n-1}z$ 可微, 则称函数 $z=f(x,y)$ 为n **阶可微**, 称 $\mathrm{d}^{n-1}z$ 的全微分为函数 $z=f(x,y)$ 的n **阶微分**, 记为 d^nz.

定理 5.2.6　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的所有 n 阶偏导数连续, 则函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处 n 阶可微 (此时我们称函数 $f(x,y)$ n 阶连续可微), 且有

$$\mathrm{d}^nz=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y). \tag{5.2.2}$$

注　公式 (5.2.2) 是求 n 阶微分的算子公式, 等式右边形式上按二项式定理展开, 展开后的项

$$C_n^k\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\left(\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-k}f(x,y),$$

表示

$$C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}(x,y)\mathrm{d}x^k\mathrm{d}y^{n-k}.$$

特别地, 当 $n=2$ 时, 有

$$\mathrm{d}^2z=f''_{xx}(x,y)\mathrm{d}x^2+2f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}(x,y)\mathrm{d}y^2.$$

证明　我们只对 $n=2$ 的情形给出证明.

因为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的所有二阶偏导数连续, 所以函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的一阶偏导数连续, 由定理 5.2.5 知其在 (x,y) 处可微, 且

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y.$$

下证函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处二阶可微. 因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}z=f''_{xx}(x,y)\mathrm{d}x+f''_{yx}(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}z=f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x+f''_{yy}(x,y)\mathrm{d}y,$$

上式右边的函数在 (x,y) 处皆连续, 所以 $\mathrm{d}z$ 的两个偏导数都连续. 由定理 5.2.5 知 $\mathrm{d}z$ 在 (x,y) 处可微, 因此函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处二阶可微, 且

$$\mathrm{d}^2z=\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= f''_{xx}\mathrm{d}x^2 + f''_{yx}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}\mathrm{d}y^2\\
&= f''_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}
$$

□

例 5.2.12　设 $z = x^2 + y^2 + \ln x - 3\ln y + x^2 y$, 求 $\mathrm{d}^2 z\ (1,2)$.

解　$z'_x = 2x + \dfrac{1}{x} + 2xy,\quad z'_y = 2y - \dfrac{3}{y} + x^2,$

$z''_{xx} = 2 - \dfrac{1}{x^2} + 2y,\quad z''_{xy} = 2x,\quad z''_{yy} = 2 + \dfrac{3}{y^2},$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 z\ (1,2) &= z''_{xx}(1,2)\mathrm{d}x^2 + 2z''_{xy}(1,2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + z''_{yy}(1,2)\mathrm{d}y^2\\
&= \left(2 - \frac{1}{x^2} + 2y\right)\bigg|_{(1,2)}\mathrm{d}x^2 + 2\cdot(2x)\bigg|_{(1,2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left(2 + \frac{3}{y^2}\right)\bigg|_{(1,2)}\mathrm{d}y^2\\
&= 5\mathrm{d}x^2 + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{11}{4}\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}
$$

□

习题 5.2

1. 求下列函数的偏导数:

   (1) $z = x^2y^3 + \sqrt{x} + 2y + 6$;

   (2) $z = \arctan\dfrac{x}{y} + \sqrt{x^2 + y^2}$;

   (3) $z = 2^x + x^y + y^3$;

   (4) $z = \mathrm{e}^{-xy} + x\mathrm{e}^{-y} + y\mathrm{e}^{-x}$;

   (5) $u = (1 + xy)^z + \sin(xyz)$;

   (6) $u = \ln\sqrt{y^2 + z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

   (7) $u = x^{y^z} + (xy)^z + x^{yz}$;

   (8) $u = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \arccos\sqrt{\dfrac{y}{z}}$.

2. 设 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, 求 $f'_x(0,0)$.

3. 求下列函数的指定的偏导数:

   (1) $z = \sin(xy) + \cos(xy)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

   (2) $u = x\mathrm{e}^{xyz}$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$;

   (3) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$;

   (4) $u = x^{yz} + y^{xz}$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$;

   (5) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

   (6) $z = \arctan\dfrac{x}{y}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. 求下列函数的全微分:

(1) $z=\sin x\cos y$;　(2) $z=\sqrt{x^2y+\dfrac{x}{y}}$;

(3) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;　(4) $u=xye^{-xyz}$;

(5) $z=\arctan\dfrac{x}{y}+\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(1,1)$ 处的全微分;

(6) $z=x^y$ 在点 $(1,2)$ 处且 $\Delta x=0.1,\Delta y=-0.02$ 的全微分.

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 可偏导, 但不可微.

6. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 但不连续可微.

7. 设 $\varphi(x,y)$ 连续, $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 研究函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性.

8. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性, 可偏导性, 可微性及连续可微性.

9. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^{\frac{4}{3}}\sin\dfrac{y}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(1) 求 $f(x,y)$ 的偏导数;

(2) 证明函数 $f(x,y)$ 是平面上的可微函数.

10. 求下列函数的二阶微分:

(1) $z=x^2+xy+y^3+5\ln x-6$;　(2) $z=x^y$;

(3) $z=e^x\sin y$;　(4) $z=\dfrac{x}{y}$.

11. 设函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可偏导, 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x-h,y)}{2h}$;　(2) $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y-k)}{2k}$.

12. 求下列函数的高阶偏导数 (其中 p,q,m,n 都是自然数):

(1) $z=(x-a)^p(y-b)^q$, 求 $\dfrac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}$;

(2) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$, 求 $\dfrac{\partial^{m+n}z}{\partial x^m\partial y^n}$.

13. 设 $z=z(x,y)$ 定义在全平面上,

(1) 若 $\dfrac{\partial z}{\partial x} \equiv 0$, 试证 $z = f(y)$;

(2) 若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv 0$, 试证 $z = g(x) + f(y)$.

14. 求近似值:

(1) $\sin 31^\circ \cos 29^\circ$;　　(2) $(1.02)^3 + 2^{2.99}$.

5.3　复合函数与隐函数的偏导数

5.3.1　复合函数的偏导数

一、链式法则

在一元函数微分学中, 有复合函数求导的链式法则. 对于多元函数来说, 复合函数的构成情况复杂得多, 无法就所有情形给出统一的公式. 下面我们针对多元复合函数比较常见的几种情形给出求导 (偏导) 法则, 其他情形可以用同样的方法得到类似的公式.

定理 5.3.1 (链式法则 1)　设函数 $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ 都在点 x 处可导, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应的点 (u, v) 处可微, 则复合函数 $z = f(\varphi(x), \psi(x))$ 在点 x 处可导, 且有公式

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & u \arrow[r] & x \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & v \arrow[r] & x
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{5.3.1}$$

为了与一元函数的导数相区别, 我们将定理 5.3.1 中出现的导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 称为**“全导数”**.

证明　变量之间的关系如图 5.4 所示. 设自变量 x 有增量 Δx, 由此引起中间变量 u, v 有增量

因为函数 $z = f(u,v)$ 可微, 所以 ,

如果 $\Delta u = \Delta$

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + o(\rho)$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$.

$\frac{v}{x} = 0,$

设自变量 x 有增量 Δx, 由此中间变量 u, v 有增量

结论显然成

$$\Delta u = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) \qquad \Delta v = \psi(x+\Delta x) - \psi(x)$$

则

$f(u, v)$ 可微，所以

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\Delta x}$$

$o(\rho)$,

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\Delta x}$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & u \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & v
\end{tikzcd}
$$

图

当 $\Delta x \to 0$ 时. 由于 $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ 可导, 有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

$\frac{o(\rho)}{\Delta x}$

而 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$　$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. 故 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \rho = 0$.

当 $\Delta x \to 0$ 时

故

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\rho)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2} = 0$$

所以

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$, 故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\rho=0$, 从而

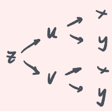
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}=0.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$ □

如果中间变量 u,v 分别是自变量 x,y 的二元函数, 我们有如下的结论:

定理 5.3.2 (链式法则 2)　设函数 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处可偏导, 函数 $z=f(u,v)$ 在对应的点 (u,v) 处可微, 则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 (x,y) 处可偏导, 且有公式



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{5.3.2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\tag{5.3.3}$$

证明　将 y 看作常数, 应用定理 5.3.1 可得式 (5.3.2); 将 x 看作常数, 应用定理 5.3.1 可得式 (5.3.3). □

与定理 5.3.1 的证明类似, 我们可以得到如下结论:

定理 5.3.3 (链式法则 3)　设函数 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 处可偏导, 函数 $z=f(x,y,u,v)$ 在对应点 (x,y,u,v) 处可微, 则复合函数

$$z(x,y)=f(x,y,\varphi(x,y),\psi(x,y))$$

在点 (x,y) 处可偏导, 且有公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{5.3.4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\tag{5.3.5}$$

注　公式 (5.3.4) 与式 (5.3.5) 中等式右端的 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 不能写成 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 前者表示 f 作为 x,y,u,v 的四元函数对 x 或 y 求偏导数, 后者表示 z 作为 x,y 的二元 (复合) 函数对 x 或 y 求偏导数.

图 5.5 和图 5.6 显示了定理 5.3.2 和定理 5.3.3 中的复合函数变量之间的关系. 上述公式 (5.3.1)~式 (5.3.5) 都称为链式法则. 链式法则可以推广到具有多个自变量和多个中间变量的情形. 在运用链式法则求多元复合函数偏导数 (或全导数) 时, 应注意搞清函数之间的复合关系, 区分中间变量与自变量, 在对某个自变量求偏导时, 要经过所有相关的中间变量, 并注意导数符号与偏导数符号的正确使用.

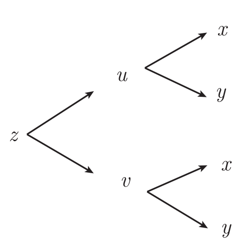


图 5.5

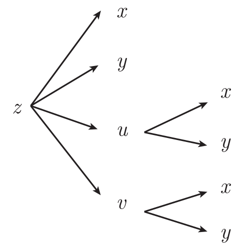


图 5.6

例 5.3.1 已知 $y=\mathrm{e}^{uv}+u^2, u=\sin x, v=\cos x$, 试求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\&=(v\mathrm{e}^{uv}+2u)\cos x+u\mathrm{e}^{uv}(-\sin x)\\&=(\mathrm{e}^{\sin x\cos x}\cos x+2\sin x)\cos x-\mathrm{e}^{\sin x\cos x}\sin^2 x\\&=\mathrm{e}^{\sin x\cos x}\cos 2x+\sin 2x.\end{aligned}$$

□

例 5.3.2 设 $z=u^v, u=x^2+y^2, v=xy$, 试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2xvu^{v-1}+yu^v\ln u\\&=2x^2y(x^2+y^2)^{xy-1}+y(x^2+y^2)^{xy}\ln(x^2+y^2)\\&=(x^2+y^2)^{xy}\left(\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+y\ln(x^2+y^2)\right),\\\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\&=2yvu^{v-1}+xu^v\ln u\\&=(x^2+y^2)^{xy}\left(\frac{2xy^2}{x^2+y^2}+x\ln(x^2+y^2)\right).\end{aligned}$$

□

例 5.3.3 设函数 $w=f(x,u,v)$ 可微, $u=x^2+xy+yz, v=xyz$, 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial w}{\partial z}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'_x+(2x+y)f'_u+yzf'_v,\\\frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=(x+z)f'_u+xzf'_v,\\\frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=yf'_u+xyf'_v.\end{aligned}$$

□

二、一阶全微分的形式不变性

定理 5.3.4 (一阶全微分的形式不变性)　设函数 $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微, 函数 $z=f(u,v)$ 在对应的点 (u,v) 处可微, 则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 (x,y) 处的全微分仍可表示为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

证明　由链式法则可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

□

由此可见, 无论 u,v 是自变量还是中间变量, 函数 $z=f(u,v)$ 的一阶全微分形式是一样的, 这个性质叫做**一阶全微分的形式不变性**.

例 5.3.4　已知 $z=\mathrm{e}^u+\sin v, u=x+y, v=xy$, 利用一阶全微分形式不变性求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}(\mathrm{e}^u+\sin v)=\mathrm{e}^u\mathrm{d}u+\cos v\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}(x+y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,\qquad \mathrm{d}v=\mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,$$

所以

$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+\cos xy(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\left(\mathrm{e}^{x+y}+y\cos xy\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^{x+y}+x\cos xy\right)\mathrm{d}y,$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x+y}+y\cos xy,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{x+y}+x\cos xy.$$

□

$f_2'(x+y,xy,\frac{x}{y})$

$f_1'(x+y,xy,\frac{x}{y})$

三、复合函数的高阶偏导数

例 5.3.5　设 $z=f\left(x+y,xy,\frac{x}{y}\right)$, f 的所有二阶偏导数连续, 试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'+\frac{1}{y}f_3',$$

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'+\frac{1}{y}f_3'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(f_{11}''\frac{\partial(x+y)}{\partial x}+f_{12}''\frac{\partial xy}{\partial x}+f_{13}''\frac{\partial \frac{x}{y}}{\partial x}\right)$
$+y\left(f_{21}''\frac{\partial(x+y)}{\partial x}+f_{22}''\frac{\partial xy}{\partial x}+f_{23}''\frac{\partial \frac{x}{y}}{\partial x}\right)$
$+\frac{1}{y}\left(f_{31}''\frac{\partial(x+y)}{\partial x}+f_{32}''\frac{\partial xy}{\partial x}+f_{33}''\frac{\partial \frac{x}{y}}{\partial x}\right)$

其中 f_1',f_2',f_3' 仍然是关于 x,y 的复合函数, 则

$$\frac{\partial f_1'(x+y, xy, \frac{x}{y})}{\partial x} = f_{11}''\frac{\partial(x+y)}{\partial x} + f_{12}''\frac{\partial xy}{\partial x} + f_{13}''\frac{\partial \frac{x}{y}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_2'(x+y, xy, \frac{x}{y})}{\partial x} = f_{21}''\frac{\partial(x+y)}{\partial x} + f_{22}''\frac{\partial xy}{\partial x} + f_{23}''\frac{\partial \frac{x}{y}}{\partial x}$$

$$= f_{11}'' + y f_{12}'' + \frac{1}{y} f_{13}'' + y f_{21}'' + y^2 f_{22}'' + f_{23}'' + \frac{1}{y} f_{31}'' + f_{32}'' + \frac{1}{y^2} f_{33}''$$

$$= f_{11}'' + 2y f_{12}'' + \frac{2}{y} f_{13}'' + y^2 f_{22}'' + 2f_{23}'' + \frac{1}{y^2} f_{33}''$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial f_1'}{\partial x} + y\frac{\partial f_2'}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f_3'}{\partial x} \\
&= \left(f_{11}'' + yf_{12}'' + \frac{1}{y}f_{13}''\right) + y\left(f_{21}'' + yf_{22}'' + \frac{1}{y}f_{23}''\right) + \frac{1}{y}\left(f_{31}'' + yf_{32}'' + \frac{1}{y}f_{33}''\right) \\
&= f_{11}'' + y^2 f_{22}'' + \frac{1}{y^2}f_{33}'' + 2yf_{12}'' + \frac{2}{y}f_{13}'' + 2f_{23}'', \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial f_1'}{\partial y} + f_2' + y\frac{\partial f_2'}{\partial y} - \frac{1}{y^2}f_3' + \frac{1}{y}\frac{\partial f_3'}{\partial y} \\
&= \left(f_{11}'' + xf_{12}'' - \frac{x}{y^2}f_{13}''\right) + f_2' + y\left(f_{21}'' + xf_{22}'' - \frac{x}{y^2}f_{23}''\right) - \frac{1}{y^2}f_3' \\
&\quad + \frac{1}{y}\left(f_{31}'' + xf_{32}'' - \frac{x}{y^2}f_{33}''\right) \\
&= f_2' - \frac{1}{y^2}f_3' + f_{11}'' + xyf_{22}'' - \frac{x}{y^3}f_{33}'' + (x+y)f_{12}'' + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)f_{13}''.
\end{aligned}$$

□

例 5.3.6 设 $z(x,y) = \int_{xy}^{x^2+y^2} f(t)\mathrm{d}t + \varphi(x-y)$, 其中 $f(u)$ 一阶连续可微, $\varphi(v)$ 二阶连续可微, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \varphi'(x) f(\varphi(x)) - \psi'(x) f(\psi(x))$$
不含x.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf(x^2+y^2) - yf(xy) + \varphi'(x-y),$$
含x. 换元.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x f(x^2+y^2) - y f(xy) + \varphi'(x-y).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f(x^2+y^2) + 4x^2 f'(x^2+y^2) - y^2 f'(xy) + \varphi''(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f(x^2+y^2) + 4x^2 f'(x^2+y^2) - y^2 f'(xy) + \varphi''(x-y).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4xyf'(x^2+y^2) - f(xy) - xyf'(xy) - \varphi''(x-y).$$

□

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4xy f'(x^2+y^2) - f(xy) - xy f'(xy) - \varphi'(x-y)$$

5.3.2 隐函数的偏导数

在一元函数微分学中, 我们介绍了隐函数的概念和求导法则, 在本节中, 我们将它推广到多元函数的情形, 并给出隐函数存在的条件和隐函数求导法则.

设给定方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0, \tag{5.3.6}$$

其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $y \in I \subseteq \mathbb{R}$. 如果对 D 中每一点 $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都有唯一确定的 y 值与之对应, 使得方程 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$ 恒成立, 即存在一个函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 使得

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \equiv 0, \quad \text{只要 } (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D,$$

则称方程 (5.3.6) 确定了一个定义在 D 上的隐函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

对于方程组也有类似的定义. 设给定方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \\ F_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{5.3.7}$$

其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in G \subseteq \mathbb{R}^m$. 如果对 D 中每一点 $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都有唯一确定的 $Y(y_1, y_2, \cdots, y_m)$:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

与之对应, 使得 (X, Y) 恒满足方程组 (5.3.7), 即

$$\begin{cases} F_1(x_1, \cdots, x_n, f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \equiv 0, \\ F_2(x_1, \cdots, x_n, f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \equiv 0, \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ F_m(x_1, \cdots, x_n, f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \equiv 0. \end{cases}$$

则称方程组 (5.3.7) 确定了一个定义在 D 上的隐函数组.

下面我们给出隐函数存在的条件, 略去证明.

一、由一个方程确定的隐函数

定理 5.3.5 (隐函数存在定理 1)　设 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $G = N_\delta(P_0)$, 假设

(1) 函数 F 在 G 上连续可微；

(2) $F(P_0) = F(x_0, y_0) = 0$; P_0在F上.

(3) $F'_y(P_0) \neq 0$,

则存在 x_0 的邻域 $I = N_{\delta_1}(x_0)$ 和唯一的函数 $y = f(x)$ 使得:

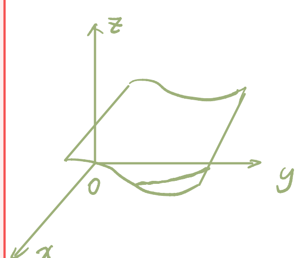
(1) 对任意 $x \in I$, $F(x, f(x)) = 0$;

(2) $f(x_0) = y_0$; 隐函数过 P_0.

(3) f 连续可微, 且当 $x \in I$ 时有

$$\boxed{f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},}$$

其中 $y = f(x)$.



我们略去此定理的证明, 但可以粗略地解释一下这个定理的证明: 我们将函数 $z = F(x, y)$ 看作三维空间中的一张曲面, $F(x_0, y_0) = 0$ 表明该曲面与坐标面 $z = 0$ 有一个交点 $(x_0, y_0, 0)$. 定理的条件 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 以及偏导数的连续性保证了在 (x_0, y_0) 附近 $F'_y(x, y)$ 保持固定的符号, 也就是说, $F(x, y)$ 作为 y 的函数是严格单调的. 就曲面而言, 曲面沿 y 增加的方向要么向上升、要么向下降. 在这种情况下, 曲面 $z = F(x, y)$ 与坐标面 $z = 0$ 之交必定是一条曲线, 且这条曲线过点 (x_0, y_0). 这条曲线就是我们要求的隐函数 $y = f(x)$ 的图形.

定理 5.3.5 可以推广到 F 是三元函数或一般 n 元函数的情况. 对于 F 是三元函数的情形, 我们有下面的定理:

定理 5.3.6 (隐函数存在定理 2)　设 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $G = N_\delta(P_0)$, 假设

(1) 函数 F 在 G 上连续可微;

(2) $F(P_0) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

(3) $F'_z(P_0) \neq 0$,

则存在 $U = \{(x, y) \mid |x - x_0| < h, |y - y_0| < k\}$ 和唯一的函数 $z = f(x, y)$ 使得:

(1) 对任意 $(x, y) \in U$, $F(x, y, f(x, y)) = 0$;

(2) $f(x_0, y_0) = z_0$;

(3) f 连续可微, 且当 $(x, y) \in U$ 时有

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},}$$

其中 $z = f(x, y)$.

例 5.3.7 验证方程 $1 + y + \sin(x^2 + y^2) = \mathrm{e}^{xy}$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内满足定理 5.3.5 的条件, 从而在 $x = 0$ 的某邻域内能唯一确定一个隐函数 $y = y(x)$, 并求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $F(x, y) = 1 + y + \sin(x^2 + y^2) - \mathrm{e}^{xy}$, 则

(1) 函数 $F(x, y)$ 连续可微; (初等函数)

(2) $F(0, 0) = 0$;

(3) $F'_y(0, 0) = \left(1 + 2y\cos(x^2 + y^2) - x\mathrm{e}^{xy}\right)\Big|_{(0,0)} = 1 \neq 0$,

由隐函数存在定理 1 可知方程 $F(x, y) = 0$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内能唯一确定一个隐函数 $y = y(x)$, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x\cos(x^2 + y^2) - y\mathrm{e}^{xy}}{1 + 2y\cos(x^2 + y^2) - x\mathrm{e}^{xy}}. \qquad \square$$

例 5.3.8 设 $u + \mathrm{e}^u = xy$ 确定 $u = u(x, y)$. 试求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

隐函数存在.

<法二> 方程两边对 x, y 求偏导, 此时 u 是 x, y 的函数

$u + e^u = xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} + e^u \frac{\partial u}{\partial x} = y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{1+e^u}$. $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{1+e^u}$.

求二阶偏导时同法一.

解 令 $F(x, y, u) = u + \mathrm{e}^u - xy$, 则

此时 x, y, z 无关

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{-y}{1 + \mathrm{e}^u} = \frac{y}{1 + \mathrm{e}^u}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{-x}{1 + \mathrm{e}^u} = \frac{x}{1 + \mathrm{e}^u}, \end{aligned}\right.$$

(复合) 隐函数求偏微分, 此时 $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$.

此时 u 是 x, y 的函数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1 + \mathrm{e}^u}\right) = \frac{1 + \mathrm{e}^u - y\dfrac{\partial(1 + \mathrm{e}^u)}{\partial y}}{(1 + \mathrm{e}^u)^2} = \frac{1 + \mathrm{e}^u - y\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial y}}{(1 + \mathrm{e}^u)^2}$$

$$= \frac{1 + \mathrm{e}^u - y\mathrm{e}^u\dfrac{x}{1 + \mathrm{e}^u}}{(1 + \mathrm{e}^u)^2} = \frac{(1 + \mathrm{e}^u)^2 - xy\mathrm{e}^u}{(1 + \mathrm{e}^u)^3}. \qquad \square$$

例 5.3.9 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $f(x + y, x + z) = 0$ 确定的隐函数, 其中 $f(u, v)$ 满足隐函数存在定理的条件, 且 $f(u, v)$ 的所有二阶偏导数连续, 试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 令 $u = x + y$, $v = x + z$, $F(x, y, z) = f(x + y, x + z)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{f'_u + f'_v}{f'_v},$$

法二. 对方程 $f(x+y, x+z) = 0$ 对 x 求偏导

$f'_u + f'_v\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_u + f'_v}{f'_v}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{f'_v\dfrac{\partial(f'_u + f'_v)}{\partial x} - (f'_u + f'_v)\dfrac{\partial(f'_v)}{\partial x}}{-(f'_v)^2}$$

$$= \frac{f'_v\left(f''_{uu}+f''_{uv}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+f''_{vu}+f''_{vv}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right)-(f'_u+f'_v)\left(f''_{vu}+f''_{vv}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right)}{-(f'_v)^2}$$

$$= \frac{(f'_v)^2 f''_{uu}-2f'_uf'_vf''_{uv}+(f'_u)^2f''_{vv}}{-(f'_v)^3}.$$

□

注　设 $F(x,y,z)=0$ 满足隐函数存在定理的条件, 且 F'_x, F'_y, F'_z 皆不等于 0, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)\left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right)\left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right)=-1.$$

这个例子说明偏导数的记法 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 是一个整体, 不能像导数的记号 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 一样看成是两部分的商.

二、由方程组确定的隐函数

定理 5.3.7(隐函数存在定理 3)　设 $P_0=(x_0,y_0,u_0,v_0)\in\mathbb{R}^4$, $G=N_\delta(P_0)$, 假设

(1) 函数 F,H 在 G 上连续可微；两个方程

(2) $F(P_0)=F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $H(P_0)=H(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

(3) 雅可比 (Jacobi*) 行列式

$$\left.\frac{D(F,H)}{D(u,v)}\right|_{P_0}=\left|\begin{matrix}F'_u & F'_v\\ H'_u & H'_v\end{matrix}\right|_{P_0}\neq 0,$$

则存在 $U=\{(x,y)\mid |x-x_0|<h, |y-y_0|<k\}$ 和唯一一组函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$, 使得:

(1) 对任意 $(x,y)\in U$, $F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0, H(x,y,u(x,y),v(x,y))=0$;

(2) $u(x_0,y_0)=u_0, v(x_0,y_0)=v_0$;

(3) 函数 $u(x,y),v(x,y)$ 连续可微, 且当 $(x,y)\in U$ 时有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{D(F,H)}{D(x,v)}}{\dfrac{D(F,H)}{D(u,v)}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{D(F,H)}{D(y,v)}}{\dfrac{D(F,H)}{D(u,v)}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\dfrac{D(F,H)}{D(u,x)}}{\dfrac{D(F,H)}{D(u,v)}},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{D(F,H)}{D(u,y)}}{\dfrac{D(F,H)}{D(u,v)}}.$$

例 5.3.10　验证方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+uv=1,\\ xy+u^2+v^2=1\end{cases}$$

在点 $(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,0)$ 的某邻域内满足定理 5.3.7 的条件, 从而在点 $(x_0,y_0)=(1,0)$ 的某邻域内存在唯一一组连续可微的函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$, 并求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

* 雅可比 (Jacobi C G J, 1804~1851), 德国数学家.

解 设 $F(x,y,u,v)=x^2+y^2+uv-1,\ H(x,y,u,v)=xy+u^2+v^2-1$,

(1) 函数 F,H 连续可微;

(2) $F(1,0,1,0)=0,\ H(1,0,1,0)=0$;

(3) 雅可比行列式

$$\left.\frac{D(F,H)}{D(u,v)}\right|_{(1,0,1,0)}=\left.\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ H'_u & H'_v \end{vmatrix}\right|_{(1,0,1,0)}=\left.\begin{vmatrix} v & u \\ 2u & 2v \end{vmatrix}\right|_{(1,0,1,0)}=-2\neq 0,$$

则由隐函数存在定理 3 可知, 在点 $(x_0,y_0)=(1,0)$ 的某邻域内存在唯一一组连续可微的函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$, 且

法二. 对方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+uv=1 \\ xy+u^2+v^2=1 \end{cases}$$

两边对 x,y 分别求偏导.

$$\begin{cases} 2x+v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ 2y+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ y+2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ x+2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

再解线性方程组.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{D(F,H)}{D(x,v)}}{\dfrac{D(F,H)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} 2x & u \\ y & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2u & 2v \end{vmatrix}}=-\frac{4xv-yu}{2v^2-2u^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{D(F,H)}{D(y,v)}}{\dfrac{D(F,H)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} 2y & u \\ x & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2u & 2v \end{vmatrix}}=-\frac{4yv-xu}{2v^2-2u^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\dfrac{D(F,H)}{D(u,x)}}{\dfrac{D(F,H)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} v & 2x \\ 2u & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2u & 2v \end{vmatrix}}=-\frac{yv-4xu}{2v^2-2u^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{D(F,H)}{D(u,y)}}{\dfrac{D(F,H)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} v & 2y \\ 2u & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2u & 2v \end{vmatrix}}=-\frac{xv-4yu}{2v^2-2u^2}.$$ □

极坐标系下的高阶偏导数

习题 5.3

1. 求下列函数的全导数或偏导数:

   (1) $u=x^y,x=\sin t,y=\cos t$;

   (2) $y=\dfrac{u}{v},u=\ln x,v=\mathrm{e}^x$;

   (3) $z=\mathrm{e}^u+(u-v)^2,u=xy,v=\dfrac{x}{y}$;

   (4) $z=u^2+\ln(uv)+\dfrac{u}{w},u=x+y^2,v=x^2,w=xy$.

2. 求下列函数的一阶偏导数 (其中 f,φ 连续可微):

   (1) $z=f(x+y,xy)$;

   (2) $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$;

(3) $u=f(x,xy,xyz)+\varphi(2x-y)$;

(4) $u=xf(x^2+y^2,\sqrt{x+y})+y^2$.

3. 设 f 具有二阶连续偏导数, 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$;　　(2) $z=f(x,xy,x-y)$.

4. 求下列函数的指定偏导数:

(1) 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 $f(u,v,w)$ 二阶连续可微, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) 设 $z=f\left(\dfrac{x}{y}\right)+yg\left(x,\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 f,g 二阶连续可微, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(3) 设 $z=f(x+y,xy)+\displaystyle\int_{x+y}^{xy}\varphi(t)\mathrm{d}t$, 其中 f,φ 二阶连续可微, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(4) 设 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, 其中 $f(u,v)$ 二阶连续可微, 求
$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

(5) 设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, f 二阶可导, 求 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

(6) 设 $F(x,y)=\displaystyle\int_{y/x}^{xy}(xz-y)f(z)\mathrm{d}z$, 其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $F''_{xx}(x,y)$.

5. 设 $y=y(x)$ 是由下列方程所确定的函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $\mathrm{e}^{xy}+2x+y^2=3$;

(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}+\cos^2 x+\cos^2 y=4$.

6. 设 $z=z(x,y)$ 是由下列方程所确定的函数, 求指定的偏导数:

(1) $\ln x+2\ln y+3\ln z+xyz=1$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(2) $x^2+y^2+z^2+xy-yz+3z-9=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(3) $xyz=\mathrm{e}^{-xyz}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

7. 计算下列各题:

(1) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定, F 可微，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由 $F\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{z}{y}\right)=0$ 确定, F 可微，求 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(3) 设 $F(bz-cy,cx-az,ay-bx)=0$, 其中函数 $F(u,v,w)$ 可微且 $bF'_u-aF'_v\neq 0$. 求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(4) 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2(y+z)-4\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0$ 确定, 求 z 在点 $P(-2,2,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z$.

(5) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(yz,y-x)=0$ 确定, $F(u,v)$ 二阶连续可微, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

8. 设 $u=f(x,y,z)$, 其中 $y=y(x)$ 是由 $\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 确定的隐函数, $z=z(x)$ 是由 $\mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 确定的隐函数. 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

9. 求由下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xyz=1, \end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$;

(2) $\begin{cases} x+y+u+v=0, \\ x^2+y^2+u^2+v^2=1, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

10. 设 $z=f(x,y)$ 在 $(2,2)$ 处可微, $f(2,2)=2$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,2)}=1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,2)}=3$, $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^2(x)\right|_{x=2}$.

11. 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微, 证明: 在极坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 下,

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

有形式

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$

12. 用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x-h,y)}{2h}$, 其中 $f(x,y)$ 连续可微;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-2f(x,y)+f(x-h,y)}{h^2}$, 其中 $f(x,y)$ 二阶连续可微.

5.4 二元函数的泰勒公式*

在本节, 我们把一元函数的泰勒公式推广到二元函数.

定理 5.4.1 (泰勒公式 I) 设 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, 函数 f 在点 (a,b) 的某邻域 G 内 $n+1$ 阶连续可微, 则对任意 $(x,y)\in G$, 有

对f(x,y)求偏导再代入(a,b)

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(a,b)+R_n, \tag{5.4.1}$$

$\top f(a,b)$

这里

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta\Delta x,b+\theta\Delta y),$$

$$\Delta x=x-a,\quad \Delta y=y-b\quad (0<\theta<1).$$

此公式称为**二元函数** $f(x,y)$ **在点** (a,b) **处的** n **阶泰勒公式**, 其中 R_n 称为**拉格朗日余项**.

注 公式 (5.4.1) 中

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(a,b)$$

形式上按二项式定理展开, 展开后的项

$$C_k^s\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\right)^s\left(\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-s}f(a,b)$$

表示

$$C_k^s(\Delta x)^s(\Delta y)^{k-s}\frac{\partial^k f}{\partial x^s\partial y^{k-s}}(a,b).$$

即

$$\begin{aligned}
\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)&=\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+\Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b);\\
\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(a,b)&=(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+(\Delta y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b);\\
\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3f(a,b)&=(\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)+3(\Delta x)^2\Delta y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a,b)\\
&\quad+3\Delta x\Delta y^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a,b)+(\Delta y)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b);
\end{aligned}$$

以此类推.

证明　为了利用一元函数的泰勒公式, 我们取辅助函数

$$F(t)=f(a+t\Delta x,b+t\Delta y)\qquad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

由于函数 f 是 $n+1$ 阶连续可微的, 则函数 $F(t)$ 是 $n+1$ 阶连续可微的, 且

$$\begin{aligned}
F(0)&=f(a,b),\\
F'(0)&=(\Delta x f_1'(a+t\Delta x,b+t\Delta y)+\Delta y f_2'(a+t\Delta x,b+t\Delta y))|_{t=0}\\
&=f_x'(a,b)\Delta x+f_y'(a,b)\Delta y=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b),\\
F''(0)&=f_{xx}''(a,b)(\Delta x)^2+2f_{xy}''(a,b)\Delta x\Delta y+f_{yy}''(a,b)(\Delta y)^2\\
&=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(a,b),\\
&\cdots\quad\cdots\\
F^{(n)}(0)&=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(a,b),\\
F^{(n+1)}(\theta t)&=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(a+\theta t\Delta x,b+\theta t\Delta y)\qquad(0<\theta<1),
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
F(t)&=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}F^{(k)}(0)t^k+R_n\\
&=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^kf(a,b)t^k+R_n,
\end{aligned}\tag{5.4.2}$$

这里

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta t\Delta x, b+\theta t\Delta y) \qquad (0<\theta<1).$$

在式 (5.4.2) 中令 $t=1$ 即可得到所要的公式. □

在公式 (5.4.1) 中, 取 $n=0$ 可得

$$f(x,y)=f(a,b)+f'_x(\xi,\eta)(x-a)+f'_y(\xi,\eta)(y-b), \tag{5.4.3}$$

这里

$$\xi=a+\theta(x-a),\ \eta=b+\theta(y-b) \qquad (0<\theta<1).$$

此式称为**二元函数拉格朗日中值公式.**

在公式 (5.4.1) 中, 取 $a=0, b=0$ 可得

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k} f(0,0)+R_n, \tag{5.4.4}$$

这里

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta x,\theta y) \qquad (0<\theta<1).$$

此式称为**二元函数 n 阶麦克劳林公式**.

定理 5.4.2 (泰勒公式 II) *设 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, 函数 f 在点 (a,b) 的某邻域 G 内 $n+1$ 阶连续可微, 则当 $(x,y)\to(a,b)$ 时有*

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k} f(a,b)+o(\rho^n), \tag{5.4.5}$$

这里

$$\Delta x=x-a,\quad \Delta y=y-b,\quad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

*此公式称为***二元函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式**, *称 $o(\rho^n)$ 为***皮亚诺余项**.

在公式 (5.4.5) 中, 取 $a=0, b=0$ 可得

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k} f(0,0)+o(\rho^n), \tag{5.4.6}$$

这里 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 此式称为**二元函数带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式**.

例 5.4.1 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ 的带拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 由于 e^{x+y} 的各阶偏导数仍为 e^{x+y}, 所以

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k} f(0,0)=(x+y)^k, \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\mathrm{e}^{x+y}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k} f(0,0)+R_n,$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(x+y)^k+R_n,$$

这里

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}\,\mathrm{e}^{\theta(x+y)}\qquad(0<\theta<1).$$ □

例 5.4.2　利用 $f(x,y)=x^y$ 的 3 阶泰勒公式求 $0.98^{1.03}$ 的近似值.

解　$f(x,y)=x^y$, 取 $x_0=1,y_0=1$, $\Delta x=-0.02,\Delta y=0.03$, 则

$$\begin{aligned}
f(1,1)&=1,\\
f'_x(1,1)&=yx^{y-1}\Big|_{(1,1)}=1,\\
f'_y(1,1)&=x^y\ln x\Big|_{(1,1)}=0,\\
f''_{xx}(1,1)&=y(y-1)x^{y-2}\Big|_{(1,1)}=0,\\
f''_{xy}(1,1)&=(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x)\Big|_{(1,1)}=1,\\
f''_{yy}(1,1)&=x^y\ln^2 x\Big|_{(1,1)}=0,\\
f'''_{xxx}(1,1)&=y(y-1)(y-2)x^{y-3}\Big|_{(1,1)}=0,\\
f'''_{xxy}(1,1)&=((y-1)x^{y-2}+yx^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x)\Big|_{(1,1)}=1,\\
f'''_{xyy}(1,1)&=(2x^{y-1}\ln x+yx^{y-1}\ln^2 x)\Big|_{(1,1)}=0,\\
f'''_{yyy}(1,1)&=x^y\ln^3 x\Big|_{(1,1)}=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x,y)\approx&f(1,1)+(f'_x(1,1)\Delta x+f'_y(1,1)\Delta y)\\
&+\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(1,1)(\Delta x)^2+2f''_{xy}(1,1)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(1,1)(\Delta y)^2\right)\\
&+\frac{1}{6}\Big(f'''_{xxx}(1,1)(\Delta x)^3+3f'''_{xxy}(1,1)(\Delta x)^2\Delta y\\
&+3f'''_{xyy}(1,1)\Delta x(\Delta y)^2+f'''_{yyy}(1,1)(\Delta y)^3\Big)\\
=&1+\Delta x+\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}(\Delta x)^2\Delta y.
\end{aligned}$$

所以

$$0.98^{1.03}=f(0.98,1.03)\approx 1-0.02-0.0006+0.000006=0.979406.$$ □

习题 5.4

1. 写出函数 $f(x,y)=x^2+xy+2y^2-3x+6y+5$ 在点 $(1,2)$ 处的泰勒公式.
2. 求函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 的带拉格朗日余项的 3 阶麦克劳林公式.
3. 在点 $(1,3)$ 处把函数 $f(x,y)=x^y$ 展开到包含 2 次项, 并求 $1.04^{2.98}$ 的近似值.

5.5　多元向量函数*

在本节, 我们介绍 3 维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的多元向量函数的概念以及多元向量函数的极限、偏导数的概念和相应的计算公式.

定义 5.5.1 (多元向量函数)　设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 f, g, h 是定义在 D 上的 n 元函数, 称

$$\boldsymbol{A}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f(x_1, x_2, \cdots, x_n), g(x_1, x_2, \cdots, x_n), h(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

为 3 维空间 $\mathbb{R}^3$ 的 n **元向量函数**.

一般情况下, 常常将二元向量函数记为

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v));$$

将三元向量函数记为

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

下面我们以二元向量函数为例, 介绍多元向量函数的极限与偏导数.

定义 5.5.2 (二元向量函数的极限)　设有二元向量函数

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

$(u, v) \in G, G \subseteq \mathbb{R}^2$, 设 (u_0, v_0) 是 G 的聚点, 若存在 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, 使得

距离

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} |\boldsymbol{r}(u, v) - \boldsymbol{a}| = 0,$$

则称向量函数 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 在 $(u, v) \to (u_0, v_0)$ 时以 $\boldsymbol{a}$ 为极限, 记为

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{a}.$$

对于向量函数的极限, 显然有下列结论:

定理 5.5.1　*向量函数 $\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 在 $(u, v) \to (u_0, v_0)$ 时以 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 为极限的充要条件是*

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} x(u, v) = a_1, \quad \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} y(u, v) = a_2, \quad \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} z(u, v) = a_3.$$

定义 5.5.3 (二元向量函数的偏导数)　设二元向量函数

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

在点 (u, v) 的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v)}{\Delta u}$$

存在, 则称此极限为向量函数 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 对 u 的偏导数, 记为 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u, v)$ 或 $\boldsymbol{r}'_u(u, v)$. 类似地可定义向量函数 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 对 v 的偏导数.

由定义 5.5.3 及定理 5.5.1 容易得到下面的结论:

定理 5.5.2　设二元向量函数

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

在点 (u,v) 的某邻域内有定义, 函数 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 在点 (u,v) 处对变量 u 皆可偏导, 则向量函数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 在点 (u,v) 处对变量 u 可偏导, 且有

$$\boldsymbol{r}'_u=(x'_u(u,v),y'_u(u,v),z'_u(u,v))\,. \tag{5.5.1}$$

若函数 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 在点 (u,v) 处对变量 v 皆可偏导, 则向量函数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 在点 (u,v) 处对变量 v 可偏导, 且有

$$\boldsymbol{r}'_v=(x'_v(u,v),y'_v(u,v),z'_v(u,v))\,. \tag{5.5.2}$$

习题 5.5

1. 设 $\boldsymbol{r}=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\rho)$, $E=\boldsymbol{r}'_\rho\cdot\boldsymbol{r}'_\rho$, $F=\boldsymbol{r}'_\rho\cdot\boldsymbol{r}'_\theta$, $G=\boldsymbol{r}'_\theta\cdot\boldsymbol{r}'_\theta$, 计算 $\sqrt{EG-F^2}$.
2. 设 $\boldsymbol{r}=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$, $(A,B,C)=\boldsymbol{r}'_\varphi\times\boldsymbol{r}'_\theta$, 计算 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

5.6　偏导数在几何上的应用

5.6.1　空间曲线的切线与法平面

设有空间曲线 C, P_0 是曲线 C 上一定点, P 是曲线上的动点, 作割线 P_0P, 当 P 沿着曲线 C 无限地接近 P_0 时, 若割线 P_0P 的极限位置存在, 对应的直线记为 L, 我们称直线 L 为曲线 C 在点 P_0 的**切线**. 通过点 P_0 且与切线 L 垂直的平面, 称为曲线 C 在点 P_0 的**法平面**. 切线 L 的方向向量称为曲线 C 在点 P_0 的**切向量**. 两个方向

下面我们分两种情况来研究曲线 C 在点 P_0 的切线和法平面的方程.

(1) 设空间曲线 C 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t),\qquad t\in[a,b].$$ $\vec{r}=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$

这里 $\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 在 $t=t_0$ 皆可导, 且 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$ 不全为 0. 否则无法一一对应

若 t 在 t_0 有增量 Δt, 曲线 C 上与 t_0 和 $t_0+\Delta t$ 对应的点分别为

$$P_0(\varphi(t_0),\psi(t_0),\omega(t_0)),\qquad P(\varphi(t_0+\Delta t),\psi(t_0+\Delta t),\omega(t_0+\Delta t)),$$

则割线 P_0P 的方向向量为 $\overrightarrow{P_0P}$, 即

$$\Delta\vec{r}=\overrightarrow{P_0P}=(\Delta\varphi(t_0),\Delta\psi(t_0),\Delta\omega(t_0)),$$

上式两边除以 Δt, 得到的向量仍然是割线 P_0P 的方向向量, 即

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{P_0P}}{\Delta t}=\left(\frac{\Delta\varphi(t_0)}{\Delta t},\frac{\Delta\psi(t_0)}{\Delta t},\frac{\Delta\omega(t_0)}{\Delta t}\right),$$

令 $\Delta t \to 0$, 便得曲线 C 在点 P_0 的切向量为

$$\vec{r}' = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)).$$

因此曲线 C 在点 P_0 的切线方程为

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{z-\omega(t_0)}{\omega'(t_0)}.$$

曲线 C 在点 P_0 的法平面方程为 $((x,y,z)-\vec{r})\cdot\vec{r}'=0.$

$$\varphi'(t_0)(x-\varphi(t_0)) + \psi'(t_0)(y-\psi(t_0)) + \omega'(t_0)(z-\omega(t_0)) = 0.$$

(2) 设空间曲线 C 的一般式方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ H(x,y,z)=0, \end{cases}$$

这里 F,H 连续可微, 且 $\dfrac{D(F,H)}{D(y,z)}, \dfrac{D(F,H)}{D(z,x)}, \dfrac{D(F,H)}{D(x,y)}$ 不全为 0.

假设由这个一般式方程可化为曲线的参数方程 (隐函数存在定理)

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\omega(t),$$

$\vec{r}=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$

$\vec{r}'=(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$

则有关于 t 的恒等式

$$\begin{cases} F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)) \equiv 0, \\ H(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)) \equiv 0, \end{cases}$$

两式分别对 t 求全导数得

$$\begin{cases} F'_x\varphi'(t) + F'_y\psi'(t) + F'_z\omega'(t) = 0, \\ H'_x\varphi'(t) + H'_y\psi'(t) + H'_z\omega'(t) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{n}_1\cdot\vec{r}'=0 \\ \vec{n}_2\cdot\vec{r}'=0 \end{cases} \tag{5.6.1}$$

记

$$\boldsymbol{n_1} = (F'_x, F'_y, F'_z), \qquad \boldsymbol{n_2} = (H'_x, H'_y, H'_z),$$

则式 (5.6.1) 表明曲线 C 的切向量 $(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$ 同时垂直于 $\boldsymbol{n_1}$ 与 $\boldsymbol{n_2}$, 因而切向量与 $\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}$ 的向量积

$$\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2} = \left(\frac{D(F,H)}{D(y,z)}, \frac{D(F,H)}{D(z,x)}, \frac{D(F,H)}{D(x,y)}\right) \qquad \vec{n}_1\times\vec{n}_2 \parallel \vec{r}'$$

平行, 所以曲线 C 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切向量可取为

$$\left(\left.\frac{D(F,H)}{D(y,z)}\right|_{P_0}, \left.\frac{D(F,H)}{D(z,x)}\right|_{P_0}, \left.\frac{D(F,H)}{D(x,y)}\right|_{P_0}\right),$$

因此曲线 C 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{D(F,H)}{D(y,z)}\right|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{\left.\dfrac{D(F,H)}{D(z,x)}\right|_{P_0}} = \frac{z-z_0}{\left.\dfrac{D(F,H)}{D(x,y)}\right|_{P_0}}.$$

曲线 C 在点 P_0 的法平面方程为

$$\left.\frac{D(F,H)}{D(y,z)}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{D(F,H)}{D(z,x)}\right|_{P_0}(y-y_0)+\left.\frac{D(F,H)}{D(x,y)}\right|_{P_0}(z-z_0)=0.$$

或写为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F'_x(P_0) & F'_y(P_0) & F'_z(P_0) \\ H'_x(P_0) & H'_y(P_0) & H'_z(P_0) \end{vmatrix}=0.$$

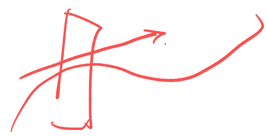
例 5.6.1　求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=4 \end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线和法平面.

解　记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$, $H(x,y,z)=x+y+z-4$, 则

$\boldsymbol{n_1}=(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_{(1,1,2)}=(2x,2y,2z)\Big|_{(1,1,2)}=(2,2,4)=2(1,1,2)$,

$\boldsymbol{n_2}=(H'_x,H'_y,H'_z)\Big|_{(1,1,2)}=(1,1,1)\Big|_{(1,1,2)}=(1,1,1)$,

$\boldsymbol{n}=(1,1,2)\times(1,1,1)=(-1,1,0)$,

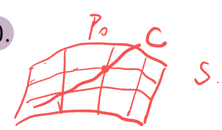


故曲线在 $(1,1,2)$ 的切线方程为

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0},$$

法平面方程为 $x-y=0$. □

在结束这一问题之前我们指出, 当空间曲线 C 由参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ 给出时, 如果 $\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)$ 连续且不同时为零, 那么从几何直观上看曲线 C 是光滑曲线. 如果空间曲线 C 由一般式方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ H(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出, 则曲线 C 为光滑曲线的条件是函数 F,H 连续可微且 $\dfrac{D(F,H)}{D(y,z)},\dfrac{D(F,H)}{D(z,x)},\dfrac{D(F,H)}{D(x,y)}$ 不全为 0.



5.6.2　空间曲面的切平面与法线

设有空间曲面 S, P_0 是曲面 S 上一定点, C 是曲面 S 上通过点 P_0 的任意一条光滑曲线, 如果曲线 C 在点 P_0 的切线总保持在某一平面 Π 上, 则称平面 Π 为曲面 S 在点 P_0 的**切平面**. 通过点 P_0 且与切平面 Π 垂直的直线称为曲面 S 在点 P_0 的**法线**. 切平面 Π 的法向量称为曲面 S 在点 P_0 的**法向量**.

下面分两种情况来研究空间曲面 S 在点 P_0 的切平面和法线的方程.

(1) 设空间曲面 S 的一般式方程为 $F(x,y,z)=0$, 这里 F 连续可微, 且 F'_x,F'_y,F'_z 不全为 0.

在 S 上通过点 P_0 任取一条光滑曲线, 设其方程为

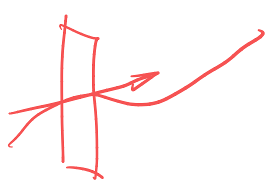
$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t),$$

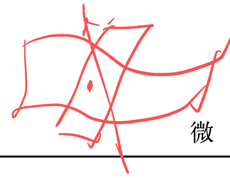
$\vec{r}=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$.

z依赖于x,y.

则有关于 t 的恒等式

$$F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0,$$





上式对 t 求全导数得

$$F_x'\varphi'(t)+F_y'\psi'(t)+F_z'\omega'(t)=0,\qquad \vec{n}\cdot\vec{r}'=0$$

此式表明曲面 S 上通过 P_0 的任一光滑曲线 C 的切向量 $\boldsymbol{r}'=(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$ 总垂直于向量

$$\boldsymbol{n}=(F_x',F_y',F_z').$$

所以向量 $\boldsymbol{n}$ 是空间曲面 S 在点 P_0 的法向量, 因此曲面 S 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$F_x'(P_0)(x-x_0)+F_y'(P_0)(y-y_0)+F_z'(P_0)(z-z_0)=0. \quad \text{点法式方程}$$

曲面 S 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P_0)}.$$

(2) 设空间曲面 S 的参数方程为

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),$$

这里 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 连续可微, 且 $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)},\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)},\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 不全为 0(此时, 我们称 (u,v) 为曲面 S 上点的**曲线坐标**).

假设曲面 S 的参数方程可化为一般式方程

$$F(x,y,z)=0,$$

则有关于 u,v 的恒等式

$$F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\equiv 0,$$

此式对 u,v 分别求偏导数得

$$\begin{cases} F_x'x_u'+F_y'y_u'+F_z'z_u'=0,\\ F_x'x_v'+F_y'y_v'+F_z'z_v'=0.\end{cases}\tag{5.6.2}$$

记

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

则式 (5.6.2) 表明曲面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x',F_y',F_z')$ 同时垂直于 $\boldsymbol{r}_u'$ 与 $\boldsymbol{r}_v'$, 因而 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}_u',\boldsymbol{r}_v'$ 的向量积

$$\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'=(A,B,C)=\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$$

平行, 所以曲面 S 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ (这里 $x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0),z_0=z(u_0,v_0)$) 的法向量可取为

$$(A(u_0,v_0),B(u_0,v_0),C(u_0,v_0)),$$

因此曲面 S 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$A(u_0,v_0)(x-x_0)+B(u_0,v_0)(y-y_0)+C(u_0,v_0)(z-z_0)=0.$$

或写为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

曲面 S 在点 P_0 的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{A(u_0,v_0)} = \frac{y-y_0}{B(u_0,v_0)} = \frac{z-z_0}{C(u_0,v_0)}.$$

例 5.6.2　求球面 $x^2+y^2+z^2+2z=5$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面和法线.

解　记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2z-5$, 则

$$\boldsymbol{n} = (F'_x(1,1,1), F'_y(1,1,1), F'_z(1,1,1)) = (2,2,4) = 2(1,1,2),$$

于是曲面在 $(1,1,1)$ 的切平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,\quad \text{即 } x+y+2z-4=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$ □

例 5.6.3　试求曲面 $x^2+y^2=4z$ 的切平面, 使它通过曲线 $x=t^2, y=t, z=3t-3$ 在 $t=1$ 处的切线.

解　曲线 $x=t^2, y=t, z=3t-3$ 在 $t=1$ 处对应点为 $(1,1,0)$, 切向量为

$$\boldsymbol{l} = (2t,1,3)\Big|_{t=1} = (2,1,3),$$

曲面 $x^2+y^2=4z$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (2x,2y,-4)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = (2x_0,2y_0,-4),$$

曲面 $x^2+y^2=4z$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-4(z-z_0)=0,$$

因为点 (x_0,y_0,z_0) 在曲面 $x^2+y^2=4z$ 上, 所以

$$x_0^2+y_0^2=4z_0, \tag{1}$$

化简得切平面的方程为

$$x_0x+y_0y-2z-2z_0=0,$$

又因为向量 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 切平面过点 $(1,1,0)$, 所以

$$2\cdot(2x_0)+1\cdot 2y_0+3\times(-4)=0, \tag{2}$$

$$x_0+y_0-2z_0=0. \tag{3}$$

由式 (1)~(3) 可得 $x_0=2, y_0=2, z_0=2$ 或 $x_0=\dfrac{12}{5}, y_0=\dfrac{6}{5}, z_0=\dfrac{9}{5}$, 所以所求切平面的方程为 $x+y-z-2=0$ 或 $6x+3y-5z-9=0$. □

在结束这一问题时我们指出, 当曲面 S 由一般式方程 $F(x,y,z)=0$ 给出, 如果 F 连续可微, 且 F'_x, F'_y, F'_z 不全为 0, 或者曲面 S 由参数方程 $x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)$ 给出, $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 连续可微, 且 $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}, \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}, \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 不全为 0, 那么从几何直观上看, 曲面 S 上每一点处都存在切平面和法线, 并且法线随着切点的移动而连续转动, 这样的曲面我们称之为**光滑曲面**.

习题 5.6

1. 求下列曲线在指定点的切线与法平面:

   (1) $x=t, y=t^2, z=t^3$, 在 $t=1$ 对应点处;

   (2) $x=t-\sin t, y=1-\cos t, z=4\sin\dfrac{t}{2}$, 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点处;

   (3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在 $(1,0,-1)$ 处;

   (4) $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x^2+z^2=2 \end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 处.

2. 求下列曲面在指定点的切平面与法线:

   (1) $z=x^2+2y^2$ 在点 $(1,1,3)$ 处;

   (2) $z^2=xy$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处;

   (3) $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=\rho$ 在 $\rho=1, \theta=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处.

3. 证明螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 的切线与 z 轴的夹角为定值.

4. 证明曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ 的切平面在坐标轴上的截距之和为常数.

5. 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

6. 在柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上求一条曲线, 使它通过点 $(R,0,0)$ 且每点处的切向量与 x 轴及 z 轴的夹角相等.

7. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面, 使其通过已知直线
$$\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}.$$

8. 若曲面 $z=x^2+y^2$ 在 P 点的切平面与平面 $x-y-2z=2$ 和 $2x-y-3=0$ 都垂直，求此切平面的方程.

9. 试求一平面 Π, 使它通过空间曲线 $\Gamma:\begin{cases} y^2=x, \\ z=3(y-1) \end{cases}$ 在 $y=1$ 处的切线，且与曲面 $\Sigma: x^2+y^2=4z$ 相切.

10. 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求点 (x_0,y_0,z_0), 使得椭球面在该点处的法向量与三个坐标轴的夹角相等.

11. 设

$$\boldsymbol{r}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

$$E=\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_u,\qquad F=\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v,\qquad G=\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{r}'_v,$$

$$(A,B,C)=\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v=\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right),$$

证明:

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{EG-F^2}.$$

5.7　极值与条件极值

在实际问题中, 经常会遇到多元函数的极大值与极小值, 最大值与最小值问题. 本节我们以二元函数为例, 介绍多元函数的极值与最值.

5.7.1　二元函数的极值

定义 5.7.1 (二元函数的极值)　设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内有定义, P_0 是 G 的内点. 若存在 P_0 的某去心邻域 $D=\mathring{N}_\delta(P_0)\subset G$, 使得当 $P\in D$ 时, 恒有

$$f(P)\leqslant f(P_0)\qquad(\text{ 或 }\ f(P)\geqslant f(P_0)),$$

则称 $f(P_0)$ 为函数 f 在 G 上的**极大值**(或**极小值**), 称 P_0 为函数 f 的**极大值点**(或**极小值点**); 极大值与极小值统称为**极值**, 极大值点与极小值点统称为**极值点**. 当上述不等号“$\leqslant$”改为“$<$”(或“$\geqslant$”改为“$>$”) 时, 则称 $f(P_0)$ 为函数 f 在 G 上的**严格极大值** (或**严格极小值**).

由一元函数取得极值的必要条件, 很容易得到下述结论:

定理 5.7.1 (极值的必要条件)　*设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导, 且 $f(x_0,y_0)$ 是函数 f 的极值, 则 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$.*

证明　分别令 $y=y_0$ 与 $x=x_0$, 得到两个一元函数 $f(x,y_0)$ 与 $f(x_0,y)$, 显然 $f(x,y_0)$ 与 $f(x_0,y)$ 在 x_0 与 y_0 分别取极值, 由一元函数极值的必要条件可得

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.\qquad\square$$

定义 5.7.2 (驻点)　若函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导, 且 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$, 则称 (x_0,y_0) 为函数 f 的**驻点**(或**静止点**).

定理 5.7.1 表明: 可微函数只可能在驻点处取极值, 但是函数在驻点处却不一定取极值. 例如 $z=xy$, 马鞍面 $(0,0)$ 是其驻点, 但 $z(0,0)=0$ 显然不是极值. 此外, 对于一般的二元函数, 除驻点处函数可能取极值外, 在其不可偏导的点处也可能取得极值. 例如 $z=$ 锥面 $\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处不可偏导, 但 $z(0,0)=0$ 显然是极小值. 一般地, 我们把函数的驻点和不可偏导的点统称为函数的**可疑极值点**.

下面我们给出二元函数取得极值的充分条件.

定理 5.7.2 (极值判别法 I) 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2, G=N_\delta(P_0)$, 函数 f 在 G 内连续, 且在 $U=\overset{\circ}{N}_\delta(P_0)$ 内连续可微, 记

$$\mu(x,y)=f_x'(x,y)(x-x_0)+f_y'(x,y)(y-y_0),$$ Taylor公式一阶主部

(1) 若 $\forall(x,y)\in U$, $\mu(x,y)>0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值;

(2) 若 $\forall(x,y)\in U$, $\mu(x,y)<0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值.

证明 据二元函数拉格朗日中值公式有

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x'(\xi,\eta)(x-x_0)+f_y'(\xi,\eta)(y-y_0),$$

这里 $\xi=x_0+\theta(x-x_0),\eta=y_0+\theta(y-y_0)(0<\theta<1)$, 于是

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)=&(f_x'(\xi,\eta)(\xi-x_0)+f_y'(\xi,\eta)(\eta-y_0))\frac{1}{\theta}\\=&\frac{1}{\theta}\mu(\xi,\eta),\qquad 0<\theta<1.\end{aligned}$$

若对任意的 $(x,y)\in U$, 有 $\mu(x,y)>0$, 则 $f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$, 由点 $(x,y)\in U$ 的任意性, 即得 $f(x_0,y_0)$ 为极小值. 另一情况的证明是类似的. □

定理 5.7.3 (极值判别法 II) 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2, G=N_\delta(P_0)$, 函数 f 在 G 内二阶连续可微, 且 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$, 令

$$A=f_{xx}''(x_0,y_0),\quad B=f_{xy}''(x_0,y_0),\quad C=f_{yy}''(x_0,y_0),$$

(1) 若 $B^2-AC<0$, $A>0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值;

(2) 若 $B^2-AC<0$, $A<0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值;

(3) 若 $B^2-AC>0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值. 若$B^2-AC=0$,则需要进一步讨论.

证明 据函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一阶泰勒展开式,

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)h+f_y'(x_0,y_0)k+\frac{1}{2}(f_{xx}''(\xi,\eta)h^2+2f_{xy}''(\xi,\eta)hk+f_{yy}''(\xi,\eta)k^2),$$

这里 $h=x-x_0,k=y-y_0,\xi=x_0+\theta_1h,\eta=y_0+\theta_1k,0<\theta_1<1$, 由于 f 二阶连续可微, 于是当 $h\to0,k\to0$ 时,

$A+o(x-x_0)$ $B+o(x-x_0)$ $C+o(x-x_0)$

$$f_{xx}''(\xi,\eta)=A+\alpha,\quad f_{xy}''(\xi,\eta)=B+\beta,\quad f_{yy}''(\xi,\eta)=C+\gamma,$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma\to0$, 令 $h=\rho\cos\theta,k=\rho\sin\theta,\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)=&\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{2}(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2)\\=&\frac{1}{2}(A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta)\rho^2+o(\rho^2).\end{aligned}$$

当

$$\varphi(\theta)=A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta\neq0$$

时, 因 $o(\rho^2)$ 比 ρ^2 是高阶无穷小, 只要 ρ 充分小, $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 与 $\varphi(\theta)$ 有相同的符号. 下面来讨论 $\varphi(\theta)$ 的符号.

(1) 当 $B^2-AC<0$ 时, A,C 皆不为零, 且 A 与 C 同号,

$$\boxed{\varphi(\theta)=\frac{1}{A}\Big((A\cos\theta+B\sin\theta)^2+(AC-B^2)\sin^2\theta\Big),} \tag{5.7.1}$$

因 h,k 不全为 0 时, $\sin\theta$ 与 $A\cos\theta+B\sin\theta$ 不全为 0, $\varphi(\theta)$ 与 A 同号, 即当 $A>0,\rho$ 充分小时, $f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$; 当 $A<0,\rho$ 充分小时, $f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$, 故结论 (1), (2) 得证.

(2) 当 $B^2-AC>0$ 时, 分别就 A 与 C 不全为 0 与 $A=C=0$ 两种情况讨论如下:

$A\cos\theta+B\sin\theta=0$
$h=\rho\cos\theta$
$k=\rho\sin\theta$
$\frac{A}{\rho}h+\frac{B}{\rho}k=0$
$\therefore Ah+Bk=0$

当 A 与 C 不全为 0 时, 不妨设 $A\neq 0$. 取 $h\neq 0,k=0$ 代入式 (5.7.1) 得 $\varphi(\theta)=A\cos^2\theta$ 与 A 同号; 又取 $\boxed{\dfrac{h}{k}=-\dfrac{B}{A}}$ 代入式 (5.7.1) 得 $\varphi(\theta)=\dfrac{1}{A}(AC-B^2)\sin^2\theta$ 与 A 异号, 所以当 ρ 充分小时, $\varphi(\theta)$ 的符号有时为正, 有时为负, 故结论 (3) 成立.

当 $A=C=0$ 时, $B\neq 0,\varphi(\theta)=2B\cos\theta\sin\theta$, 显然 $\varphi(\theta)$ 的符号有时为正, 有时为负, 故结论 (3) 成立. □

注　定理 5.7.3 中若 $B^2-AC=0$, 考察例子

$$z_1=x^4+y^4,\qquad z_2=-(x^4+y^4),\qquad z_3=xy^2,$$

这三个函数在 $(0,0)$ 处都有 $B^2-AC=0$, 易于证明 $z_1(0,0)$ 是极小值, $z_2(0,0)$ 是极大值, $z_3(0,0)$ 不是极值. 故当 $B^2-AC=0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 不一定是极值.

* **例 5.7.1**　求函数 $f(x,y)=x^3-3xy+8y^3$ 的极值.

解　由方程组

$$\begin{cases} f'_x=3x^2-3y=3(x^2-y)=0,\\ f'_y=-3x+24y^2=-3(x-8y^2)=0 \end{cases}$$

解得驻点 $P_1(0,0),P_2\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$.

$$f''_{xx}=6x,\qquad f''_{xy}=-3,\qquad f''_{yy}=48y,$$

在 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 处, $A=3,B=-3,C=12$, $B^2-AC<0,A>0$, 所以 $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{8}$ 是极小值.

在 $(0,0)$ 处, $A=0,B=-3,C=0$, $B^2-AC>0$, 所以 $f(0,0)=0$ 不是极值. □

* **例 5.7.2**　求函数 $f(x,y)=2(y-x^2)^2-\dfrac{1}{7}x^7-y^2$ 的极值.

解　由方程组

$$\begin{cases} f'_x=-8x(y-x^2)-x^6=0,\\ f'_y=4(y-x^2)-2y=0 \end{cases}$$

解得驻点 $P_1(0,0),P_2(-2,8)$.

$$f''_{xx}=-8y+24x^2-6x^5,\qquad f''_{xy}=-8x,\qquad f''_{yy}=2.$$

在 $(-2,8)$ 处, $A=224,B=16,C=2$, $B^2-AC<0,A>0$, 所以 $f(-2,8)=-\dfrac{96}{7}$ 是极小值.

合理取值，保证一种情况>0，一种情况<0.

在 $(0,0)$ 处, $A=0, B=0, C=2, B^2-AC=0, f(0,0)=0$.

取 $\varepsilon>0$, 当 $x=0$ 时, $f(0,y)=y^2$, 所以在点 $(0,0)$ 的任意邻域内, 存在 $(0,\varepsilon)\neq(0,0)$, 使 $f(0,\varepsilon)>0$. 当 $y=x^2$ 时, $f(x,x^2)=-\dfrac{1}{7}x^7-x^4$, 所以在点 $(0,0)$ 的任意邻域内, 存在 $(\varepsilon,\varepsilon^2)\neq(0,0)$, 使 $f(\varepsilon,\varepsilon^2)<0$. 所以 $f(0,0)$ 不是极值. □

*__例 5.7.3__ 求由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值点和极值.

隐函数

解 方法 1: 原方程两端分别关于 x,y 求偏导, 得

$$\begin{cases} 2x-6y-2yz'_x-2zz'_x=0, \\ -6x+20y-2z-2yz'_y-2zz'_y=0. \end{cases} \tag{1}$$

在式 (1) 中令 $z'_x=z'_y=0$, 则得方程组

$$\begin{cases} x-3y=0, \\ -3x+10y-z=0. \end{cases} \tag{2}$$

$\begin{cases} x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0 \\ x-3y=0 \\ -3x+10y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y \\ y=z \end{cases}$

把它与原方程联立, 可求出 x,y,z 有两组解 $(9,3,3),(-9,-3,-3)$. (驻点)

从方程组 (1) 出发, 再继续关于 x,y 求偏导, 可得

$$\begin{cases} 2-2yz''_{xx}-2(z'_x)^2-2zz''_{xx}=0, \\ -6-2z'_x-2yz''_{xy}-2z'_xz'_y-2zz''_{xy}=0, \\ 20-2z'_y-2z'_y-2yz''_{yy}-2(z'_y)^2-2zz''_{yy}=0. \end{cases} \tag{3}$$

将 $z'_x=z'_y=0,(x,y,z)=(\pm9,\pm3,\pm3)$ 代入式 (3), 可得方程组

$$\begin{cases} 2\mp12A=0, \\ -6\mp12B=0, \\ 20\mp12C=0. \end{cases}$$

解得

$$A=\pm\frac{1}{6},\qquad B=\mp\frac{1}{2},\qquad C=\pm\frac{5}{3}.$$

在 $(9,3,3)$ 处, $B^2-AC<0, A>0$, 所以 $(9,3)$ 是极小值点, $z(9,3)=3$ 是极小值.

在 $(-9,-3,-3)$ 处, $B^2-AC<0, A<0$, 所以 $(-9,-3)$ 是极大值点, $z(-9,-3)=-3$ 是极大值.

方法 2: 设 $F(x,y,z)=x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18$, 则

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{x-3y}{y+z},\qquad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{-3x+10y-z}{y+z},$$

$$z''_{xx}=\frac{y+z-(x-3y)z'_x}{(y+z)^2},\qquad z''_{xy}=\frac{-3(y+z)-(x-3y)(1+z'_y)}{(y+z)^2},$$

$$z''_{yy}=\frac{(10-z'_y)(y+z)-(-3x+10y-z)(1+z'_y)}{(y+z)^2},$$

由 $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ 可得 $x = 3z, y = z$, 代入原方程得 $x = \pm 9, y = \pm 3, z = \pm 3$.

将 $x = \pm 9, y = \pm 3, z = \pm 3, z'_x = 0, z'_y = 0$ 代入二阶偏导数的表达式中得

$$A = \pm\frac{1}{6}, \qquad B = \mp\frac{1}{2}, \qquad C = \pm\frac{5}{3}.$$

在 $(9,3,3)$ 处, $B^2 - AC < 0, A > 0$, 所以 $(9,3)$ 是极小值点, $z(9,3) = 3$ 是极小值.

在 $(-9,-3,-3)$ 处, $B^2 - AC < 0, A < 0$, 所以 $(-9,-3)$ 是极大值点, $z(-9,-3) = -3$ 是极大值. □

5.7.2　最大值与最小值

与极值问题联系紧密的是多元函数的最大值与最小值问题. 我们已经知道, 如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上一定有最大值与最小值. 而使函数取得最大值与最小值的点可能在 D 的内部, 也可能在 D 的边界上. 如果我们再假定函数 f 在 D 上连续, 在 D 内可微且有有限个驻点, 这时, 如果函数在 D 的内部取得最大 (小) 值, 那么这个最大 (小) 值也是极大 (小) 值. 因此, 在上述假定下, 求函数的最大 (小) 值的一般方法是: 求出函数 $f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处对应的函数值, 并求出函数 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值及最小值, 把上述函数值相互比较, 最大的就是 f 在 D 上的最大值, 最小的就是 f 在 D 上的最小值. 但在通常所遇到的实际问题中, 如果根据问题的性质, 知道函数的最大值 (或最小值) 一定存在且必在 D 的内部取得, 而在 D 的内部只有一个驻点, 则此驻点处的函数值一定是函数 f 在 D 上的最大 (小) 值.

例 5.7.4　要造一个容积为 V 的无盖长方体水池, 问如何设计长、宽、高, 才能使它的表面积最小?

解　设长方体的长宽高分别为 x, y, z, 由 $V = xyz$ 可得 $z = \dfrac{V}{xy}$, 表面积为

$$S = xy + 2(xz + yz) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \qquad (x > 0, y > 0).$$

问题化为求 S 的最小值. 由方程组

$$\begin{cases} S'_x = y - \dfrac{2V}{x^2} = 0, \\ S'_y = x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

解得驻点为 $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$.

根据问题的实际意义知 S 一定有最小值, 且最小值在

$$D = \{(x,y) \mid 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$$

内取得, 而在 D 内函数 S 有唯一的可疑极值点, 所以此点必为最小值点. 因此当长方体的长宽高分别为 $\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ 时, 表面积最小. □

例 5.7.5 (最小二乘法)　设两个变量 x, y 之间的关系近似于线性函数关系, 现测得 x, y 的一组实验数据 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 不妨设 $x_i \neq x_j (i \neq j)$. 试求直线方程 $y = a + bx$ 使得平方和

$$u(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - y_i)^2 \quad \sum_{i=1}^{n}(\hat{y} - y_i)^2$$

取最小值. 在统计学中, 称所求的直线 $y = a + bx$ 为**回归直线**, 称 a, b 为**回归系数**. 量 $u(a, b)$ 刻画了回归直线与散点 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的离散程度. 通过求 $u(a, b)$ 的最小值来确定回归系数 a, b 的这种方法称为**最小二乘法** (见图 5.7).

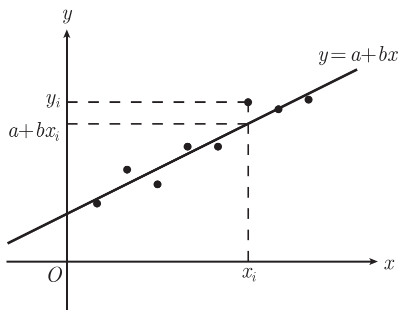


图 5.7

解　因为 $u(a, b)$ 在全平面上可微, 故其极值点必为驻点. 考虑方程组

$$\begin{cases} u'_a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(a + bx_i - y_i) = 0, \\ u'_b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(a + bx_i - y_i)x_i = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} na + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{cases} \tag{5.7.2}$$

这里 a, b 是未知数. 用数学归纳法可证明方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} n & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j\leqslant n}}^{n} (x_i - x_j)^2 \neq 0.$$

因而方程组 (5.7.2) 有唯一解 (a_0, b_0), 也就是说函数 $u(a, b)$ 有唯一的驻点. 此驻点必为最小值点. □

5.7.3　条件极值

上节例 5.7.4 的问题也可以叙述为: 求函数 $S = S(x, y, z)$ 满足约束方程

$$\varphi(x, y, z) = V - xyz = 0$$

的极值. 这类极值问题称为**条件极值**. 在此例求解中, 我们是从约束方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 中解出 $z=z(x,y)$, 代入 $S(x,y,z)$, 从而将条件极值问题化为求二元函数 $S(x,y,z(x,y))$ 在无约束条件下的极值. 但是这种解法常常行不通, 或者比较困难. 下面介绍处理条件极值问题的一种行之有效的方法. λ是参数.

定理 5.7.4　设函数 $f(x,y,z)$ 连续可微, 函数 $\varphi(x,y,z)$ 连续可微, 且 $\varphi'_z\neq 0$, 函数 $f(x,y,z)$ 满足约束方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 的条件极值在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 取得. 令

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z), \tag{5.7.3}$$

则 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足下列方程组

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)=0,\\ F'_y=f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)=0,\\ F'_z=f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)=0,\\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0. \quad \text{(条件)}\end{cases} \tag{5.7.4}$$

证明　因 f 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 取得条件极值, 首先有

$$\varphi(P_0)=\varphi(x_0,y_0,z_0)=0, \tag{5.7.5}$$

设 $\varphi'_z(P_0)\neq 0$, 据隐函数存在定理, 存在 (x_0,y_0) 的邻域 U, 使得方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 有唯一的解 $z=z(x,y)$, 并且

$$z_0=z(x_0,y_0),\quad \varphi(x,y,z(x,y))=0,\quad \forall (x,y)\in U,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\varphi'_x(P_0)}{\varphi'_z(P_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\varphi'_y(P_0)}{\varphi'_z(P_0)}. \tag{5.7.6}$$

由于 $f(x,y,z(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 取极值, 据定理 5.7.1 得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)+\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)+\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=0.\end{cases} \tag{5.7.7}$$

将式 (5.7.6) 代入式 (5.7.7) 得

$$\begin{cases} f'_x(P_0)-\dfrac{1}{\varphi'_z(P_0)}f'_z(P_0)\varphi'_x(P_0)=0,\\ f'_y(P_0)-\dfrac{1}{\varphi'_z(P_0)}f'_z(P_0)\varphi'_y(P_0)=0.\end{cases} \tag{5.7.8}$$

记 $\lambda_0=-\dfrac{1}{\varphi'_z(P_0)}f'_z(P_0)$, 并与式 (5.7.5)、式 (5.7.8) 联立得

$$\begin{cases} f'_x(P_0)+\lambda_0\varphi'_x(P_0)=0,\\ f'_y(P_0)+\lambda_0\varphi'_y(P_0)=0,\\ f'_z(P_0)+\lambda_0\varphi'_z(P_0)=0,\\ \varphi(P_0)=0.\end{cases} \tag{5.7.9}$$

□

式 (5.7.3) 中的函数 $F(x,y,z,\lambda)$ 称为**拉格朗日函数**, 数 λ 称为**拉格朗日乘数**.

定理 5.7.4 表明: 欲求函数 $f(x,y,z)$ 满足约束方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 的条件极值, 可先建立拉格朗日函数, 并求方程组 (5.7.4) 的解 (x_0,y_0,z_0,λ_0), 则 (x_0,y_0,z_0) 是可疑的条件极值点, 然后再讨论函数 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 是否取得条件极值. 这一方法称为**拉格朗日乘数法**.

如果可能的条件极值点 (或条件最大值点与最小值点) 只有一个 (或两个), 又根据实际问题的几何或物理意义, 知其条件极值存在, 则上述可能的条件极值点必为所求的极值点.

拉格朗日乘数法可推广到 f 与 φ 皆为二元函数或其他多元函数的情况, 还可推广到含多个约束方程的条件极值问题 (约束方程的个数必须少于自变量的个数), 这时拉格朗日函数中所引入的拉格朗日乘数的个数等于约束方程的个数. 例如: 求函数 $f(x,y,z)$ 满足两个约束方程

$$\varphi(x,y,z)=0,\qquad \psi(x,y,z)=0$$

的条件极值时, 拉格朗日函数为

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z),$$

可能的条件极值点由下列方程组确定:

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)+\mu\psi'_x(x,y,z)=0,\\ F'_y=f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)+\mu\psi'_y(x,y,z)=0,\\ F'_z=f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)+\mu\psi'_z(x,y,z)=0,\\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0,\\ F'_\mu=\psi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

例 5.7.6 求函数 $u=x^ay^bz^c$ 满足条件 $x+y+z=m(x>0,y>0,z>0,a>0,b>0,c>0,m>0)$ 的极值.

暗示可取对数.

解 问题转化为求函数 $\ln u=a\ln x+b\ln y+c\ln z$ 的条件极值. 取对数

建立拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda)=a\ln x+b\ln y+c\ln z+\lambda(x+y+z-m),$$

由方程组

$$\begin{cases} F'_x=\dfrac{a}{x}+\lambda=0,\\ F'_y=\dfrac{b}{y}+\lambda=0,\\ F'_z=\dfrac{c}{z}+\lambda=0,\\ F'_\lambda=x+y+z-m=0. \end{cases}$$

解得可疑的极值点为 $\left(\dfrac{am}{a+b+c},\dfrac{bm}{a+b+c},\dfrac{cm}{a+b+c}\right)$.

函数 $u=x^ay^bz^c$ 在有界闭区域 D： $x+y+z=m\ \ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$ 上必有最大值和最小值, 显然在边界处 $(x+y+z=m, x=0$ 或 $y=0$ 或 $z=0)$ 函数取得最小值, 所以最大值必在区域内部 $(x+y+z=m,\ x>0, y>0, z>0)$ 取得, 而在区域内部函数只有一个可疑的极值点, 所以这个可疑的极值点必为函数的最大值点. 所以函数 $u=x^ay^bz^c$ 满足条件 $x+y+z=m\ (x>0, y>0, z>0)$ 的极大值为 $u\left(\dfrac{am}{a+b+c}, \dfrac{bm}{a+b+c}, \dfrac{cm}{a+b+c}\right)=\dfrac{a^ab^bc^cm^{a+b+c}}{(a+b+c)^{a+b+c}}$. □

* **例 5.7.7**　用拉格朗日乘数法求点 $(-1,-1,-1)$ 与曲线 $\begin{cases} z=xy, \\ x+y=4 \end{cases}$ 的最短距离.

解　曲线上任一点 (x,y,z) 到点 $(-1,-1,-1)$ 的距离为

$$d=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2},$$

问题转化为求函数　转化为不含根号

$$f(x,y,z)=d^2=(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$$

满足约束方程 $xy-z=0$ 和 $x+y-4=0$ 的条件极值.

建立拉格朗日函数　$2(x-y)=\lambda(x-y)$　$2(z+1)$.　$(z+1)(x-y)=(x-y)$.

$z(x-y)=0$.　$x+y-4=0$

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+\lambda(xy-z)+\mu(x+y-4),$$

$x=y=2$

$z=0$. $x=4, y=0$.

$2x-2y+\lambda(y-x)=0$.

$x=0, y=4$.

由方程组

$$\begin{cases} F'_x=2(x+1)+\lambda y+\mu=0, \\ F'_y=2(y+1)+\lambda x+\mu=0, \\ F'_z=2(z+1)-\lambda=0, \\ F'_\lambda=xy-z=0, \\ F'_\mu=x+y-4=0 \end{cases}$$

解得可疑的极值点为 $(2,2,4), (0,4,0), (4,0,0)$.

而 $f(2,2,4)=43, f(0,4,0)=f(4,0,0)=27$, 由问题的几何意义知, 点 $(-1,-1,-1)$ 到曲线的距离的最小值一定存在, 因而函数 $f(x,y,z)$ 的条件最小值一定存在, 且在可疑极值点处取得, 所以 $f(0,4,0)=f(4,0,0)=27$ 为函数 $f(x,y,z)$ 的条件最小值. 因此所求最短距离为 $\sqrt{27}$. □

* **例 5.7.8**　求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在 $D=\{(x,y)|\, 4x^2+y^2\leqslant 9\}$ 上的最大值和最小值.

解　由方程组

$$\begin{cases} f'_x=2x=0, \\ f'_y=8y=0 \end{cases}$$

解得驻点 $(0,0)$, 此点是区域 D 的内点. 下面求函数 $f(x,y)$ 在区域 D 的边界 $4x^2+y^2=9$ 上的可疑的条件极值点. 建立拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+4y^2+9+\lambda(4x^2+y^2-9),$$

由方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 8\lambda x = 0, \\ F'_y = 8y + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = 4x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

解得可疑的极值点为 $(0, \pm 3)$, $\left(\pm \dfrac{3}{2}, 0\right)$.

$$f(0,0) = 9, \quad f(0,3) = f(0,-3) = 45. \quad f\left(\frac{3}{2}, 0\right) = f\left(-\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{45}{4},$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 $f(0,\pm 3) = 45$, 最小值为 $f(0,0) = 9$. □

习题 5.7

1. 求下列函数的极值:
   (1) $z = x^2 + 2y^2 - xy + 6x - 3y - 2$;
   (2) $z = x^6 + y^4 - 3x^2 - 2y^2$;
   (3) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;
   (4) $z = \cos x + \cos y + \cos(x+y)$, 其中 $0 < x, y < \pi$.
2. 求下列方程确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 的极值:
   (1) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$;
   (2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 10 = 0$.
3. 将周长为 $2p$ 的矩形绕其一边旋转形成一个圆柱体, 问矩形的边长各为多少时, 所得圆柱体的体积最大?
4. 将周长为 $2p$ 的三角形绕其一边旋转形成一个旋转体, 问三角形的边长各为多少时, 所得旋转体的体积最大?
5. 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 内作底边平行于 x 轴的内接三角形, 求此类三角形面积的最大值.
6. 求抛物线 $y = x^2 + 2$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离.
7. 求函数 $z = x^2 + y^2 - 2x + 6y$ 在闭区域 D: $x^2 + y^2 \leqslant 25$ 上的最大值与最小值.
8. 求函数 $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ 在闭区域 D: $4x^2 + y^2 \leqslant 25$ 上的最大值与最小值.
9. 求函数 $f(x,y) = x^2 - \sqrt{5}xy$ 在区域 $x^2 + 4y^2 \leqslant 6$ 上的最大值与最小值.
10. 求函数 $z = \cos x + \cos y + \cos(x+y)$ 在闭区域

$$G = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$$

上的最大值与最小值.

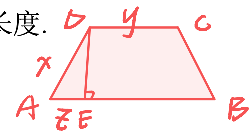
11. 用拉格朗日乘数法证明

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, = z$$

其中 $a_i \geqslant 0$, $i = 1, \cdots, n$.

12. 在第一卦限求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ 的切平面, 使该切平面与三个坐标面所围的四面体体积最小.

13. 在空间曲面 $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}=1$ 上作切平面, 使得该切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最大，求切点的坐标，最大体积以及切平面方程.
14. 设 Σ 为由 $z=x^2+y^2, z=2$ 所围曲面，求 Σ 的内接长方体体积的最大值.
15. 设常数 $a>0$, 平面 Π 通过点 $M(4a,-5a,3a)$, 且在三个坐标轴上的截距相等。在平面 Π 位于第一卦限部分求一点 $P(x_0,y_0,z_0)$, 使得函数 $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}\cdot z^2}$ 在 P 点处取最小值.
16. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截得一个椭圆，求原点到椭圆的最短与最长距离.
17. 利用拉格朗日乘数法计算椭圆周 $5x^2+8xy+5y^2=9$ 上的点与坐标原点之间的最近和最远距离.
18. 设有等腰梯形 $ABCD$, $AB//CD$, 已知 $BC+CD+AD=8p$, 其中 p 为常数，该梯形绕边 AB 旋转一周所得旋转体体积取得最大值, 求 AB,BC,CD 的长度.



5.8 方向导数

偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 表示函数 $f(x,y)$ 分别对自变量 x 与 y 的变化率. 在实际问题中, 常常需要研究函数沿某个射线方向的变化率, 这就引出了方向导数的概念.

$V=2\cdot[\frac{1}{3}\pi(x^2-z^2)z+\pi(x^2-z^2)y]$

定义 5.8.1 (方向导数)　设 $P_0\in\mathbb{R}^3$, 函数 f 在 P_0 的某邻域 U 内有定义, $\boldsymbol{l}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的常向量, $\forall P\in U$, 使得 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 方向相同, 若

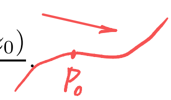
$\overrightarrow{PP_0}$ ×

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|}$$

存在, 则称此极限值为**函数 f 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数**, 记为 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(P_0)$.

设向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, P_0 的坐标为 (x_0,y_0,z_0), 则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(P_0)=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}.$$



特别地,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(0,0,0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta,t\cos\gamma)-f(0,0,0)}{t}.$$

下面研究方向导数与偏导数之间的关系.

例 5.8.1　设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的偏导数及沿任意方向的方向导数.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+|x|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x},$$

此极限不存在, 所以函数 f 在 $(0,0,0)$ 处对 x 不可偏导. 同理可得函数 f 在 $(0,0,0)$ 处对 y 与对 z 也不可偏导.

令向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(0,0,0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta,t\cos\gamma)-f(0,0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^2+t}{t}=1,$$

所以函数 f 在 $(0,0,0)$ 处沿任何方向的方向导数皆等于 1. □

此例表明: 函数沿任何方向的方向导数都存在并不能推出该函数的偏导数存在.

例 5.8.2 设

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x+y+z, & x=y=0,\ \text{或}\ y=z=0,\ \text{或}\ x=z=0, \\ 1, & \text{其他}. \end{cases}$$

求函数 $f(x,y,z)$ 在 $(0,0,0)$ 处的偏导数及沿任意方向的方向导数.

解

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

同理可得 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=1.$

易知函数 $f(x,y,z)$ 沿 x 轴正向 (即 $\boldsymbol{l}=(1,0,0)$) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(0,0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t,0,0)-f(0,0,0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=1,$$

沿 x 轴负向 (即 $\boldsymbol{l}=(-1,0,0)$) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(0,0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(-t,0,0)-f(0,0,0)}{t}=-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=-1.$$

同理, 沿 y 轴及 z 轴正向的方向导数为 1, 沿 y 轴及 z 轴负向的方向导数为 -1.

如果 $\boldsymbol{l}$ 是其他方向, 设向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则 α,β,γ 至多一个等于 $\dfrac{\pi}{2}$, 由定义得

至多一个为0.

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(0,0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta,t\cos\gamma)-f(0,0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}=\infty.$$

所以函数 f 在 $(0,0,0)$ 沿任何非坐标轴方向, 其方向导数皆不存在. □

此例表明: 函数可偏导只能推出该函数沿坐标轴正向 (负向) 的方向导数存在, 而不能推出该函数沿其他方向的方向导数存在.

下面给出方向导数存在的条件及计算公式.

定理 5.8.1 *设函数 $f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处可微, 向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, 则函数 $f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在, 且*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\cos\alpha+f'_y(x,y,z)\cos\beta+f'_z(x,y,z)\cos\gamma.$$

证明 设点 P_0 的坐标为 (x,y,z), $\boldsymbol{l}^\circ=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 记

单位向量

$$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{l}^\circ=(t\cos\alpha,t\cos\beta,t\cos\gamma),\quad \underset{\sim\sim}{t>0},$$

距离/长度

则点 P 的坐标为 $(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta,z+t\cos\gamma)$. 记 $\Delta x=t\cos\alpha,\Delta y=t\cos\beta,\Delta z=t\cos\gamma$. 因为 f 在 P_0 处可微, 所以

$$f(P)-f(P_0)=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\Delta z+o(\rho),$$ (可微分)

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=t$, 上式两边除以 $|\overrightarrow{P_0P}|=t$, 得

$$\frac{f(P)-f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{t}+\frac{o(\rho)}{\rho},$$

令 $P\to P_0$, 即 $t\to 0^+$, 即得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\cos\alpha+f'_y(x,y,z)\cos\beta+f'_z(x,y,z)\cos\gamma.$$ □

对于二元函数有如下类似的结论:

设函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta$, 则函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x,y)=f'_x(x,y)\cos\alpha+f'_y(x,y)\cos\beta.$$

例 5.8.3　求函数 $f(x,y,z)=xyz+\mathrm{e}^{xyz}$ 在点 $(1,2,1)$ 沿向量 $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数.

解

$$\begin{aligned}
f(x,y,z)&=xyz+\mathrm{e}^{xyz},\\
f'_x(1,2,1)&=\left(yz+yz\mathrm{e}^{xyz}\right)\Big|_{(1,2,1)}=2(1+\mathrm{e}^2),\\
f'_y(1,2,1)&=\left(xz+xz\mathrm{e}^{xyz}\right)\Big|_{(1,2,1)}=1+\mathrm{e}^2,\\
f'_z(1,2,1)&=\left(xy+xy\mathrm{e}^{xyz}\right)\Big|_{(1,2,1)}=2(1+\mathrm{e}^2),
\end{aligned}$$

而

$$\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=(2,-2,1)=3\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),$$

故

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(1,2,1)=\frac{4}{3}(1+\mathrm{e}^2)-\frac{2}{3}(1+\mathrm{e}^2)+\frac{2}{3}(1+\mathrm{e}^2)=\frac{4}{3}(1+\mathrm{e}^2).$$ □

习题 5.8

1. 求函数 $z=xy+\cos(x+y)$ 在点 $A\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(3,4)$ 的方向导数.
2. 求函数 $u=xy^2z^3$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,1,2)$ 的方向导数.
3. ✓ 求函数 $u=x+\mathrm{e}^x\sin(y-z)$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=(1,2,-2)$ 的方向导数.
4. 求函数 $u=xy+y^2+\sqrt{x+z}$ 在点 $A(1,0,2)$ 处沿从 A 到 $B(5,3,14)$ 方向的方向导数.
5. 求函数 $u=\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿从 A 到 $B\ (-3,1,0)$ 方向的方向导数.

6. 求 $u = x^2 + y^2 - z^2$ 在点 $P(3,4,5)$ 处沿曲线 $\begin{cases} 2x^2+2y^2-z^2=25, \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$ 在该点的切线方向的方向导数.

7. 求函数 $u = \arctan(x^2 + 2y + z)$ 在点 $A(0,1,0)$ 处沿空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$ 在点 $B(2,0,\sqrt{2})$ 的切向量的方向导数.

8. 求函数 $u = x + y + z$ 在点 $P_0\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上该点的外法线方向的方向导数.

9. 求函数 $u = 3x - 2y + 5z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿该点外法线方向的方向导数.