微积分 II (第一层次)期中试卷 (2021.4.24)

1、$F(x,y,z)=x^2-xy-8x+z+5=0$ $F_x'=2x-y-8$ $F_y'=-x$ $F_z'=1$ $\vec{n}=(-1,-2,1)$

切面: $-(x-2)-2(y+3)+(z-1)=0$

法线: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1}$

$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$

2. 原式 $=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta(\rho\sin\theta+\rho\cos\theta)}{\rho^2}=\lim_{\rho\to0}\rho\cos\theta\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)=0$.

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}(2-3\frac{\partial z}{\partial x})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{3e^{2x-3z}+1}$ 2.

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3e^{2x-3z}+1}$ $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6e^{2x-3z}}{3e^{2x-3z}+1}+2$

4. $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}f_3'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}''+\frac{1}{x}f_{13}'')-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}''+\frac{1}{x}f_{23}'')-\frac{1}{x^2}f_3'-\frac{y}{x^2}(xf_{31}''-\frac{x}{y}f_{32}''+\frac{1}{x}f_{33}'')$

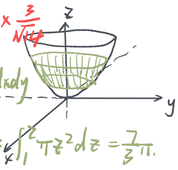
$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{1}{x^2}f_3'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{y}{x^3}f_{33}''+\frac{2}{xy}f_{23}''$

5. $\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}})$. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{1+(x^2+2y+z)^2}$ $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2}{1+(x^2+2y+z)^2}$ $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+(x^2+2y+z)^2}$

故 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{2x+4+3}{2\sqrt{14}(1+(x^2+2y+z)^2)}$ $\frac{9}{10\sqrt{14}}=\frac{2}{10}\times\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{2}{10}\times\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{1}{10}\times\frac{3}{\sqrt{14}}$

二、1. $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z$. x,y 是奇函数 $\to I_1=\iiint z\,dxdydz=\int_1^2dz\iint z\,dxdy$

$I_1=\int_1^2dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}(\rho(\sin\theta+\cos\theta)+z)\rho d\rho=\pi\int_1^2z^2dz=\frac{7}{3}\pi$ $=\int_1^2\pi z^2dz=\frac{7}{3}\pi$

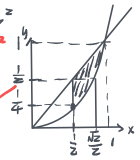


2. 令 $x=\frac{a}{\sqrt2}\cos\theta,\ y=-\frac{a}{\sqrt2}\cos\theta,\ z=a\sin\theta$

$I_2=\oint_L\frac{(x+2)^2+(z-3)^2}{x^2+y^2+z^2}ds=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(\frac{a}{\sqrt2}\cos\theta+2)^2+(a\sin\theta-3)^2]\sqrt{(-\frac{a}{\sqrt2}\sin\theta)^2+(\frac{a}{\sqrt2}\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2}\,d\theta$ $\frac{3\pi a}{2}+\frac{26\pi}{a}$

$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\cos^2\theta+2\sqrt2a\cos\theta+4+a^2\sin^2\theta-6a\sin\theta+9\,d\theta=$ 计算!

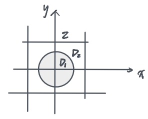
3. 令 $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ $I_3=\int_0^\pi(a^2\cos^2\theta+2ab\sin\theta\cos\theta)\,db\sin\theta=-ab^2\int_1^{-1}2\cos^2\theta\,d\cos\theta=\frac{4}{3}ab^2$



4. $I_4=\int_{\frac12}^1dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy=\int_{\frac12}^1ex-xe^x\,dx=\frac12ex^2-(x-1)e^x\Big|_{\frac12}^1=\frac{e}{2}-0-(\frac{e}{8}+\frac{\sqrt e}{2})=\frac{3e}{8}-\frac{\sqrt e}{2}$

5. $I_5=4\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy+4\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy=4(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho d\rho+\int_0^2dx\int_0^2(x^2+y^2-1)dy)=\pi+\frac{80}{3}$

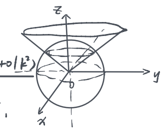
$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$



三、$V_k=\iiint_\Omega dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\arctan k}d\varphi\int_0^1r^2\sin\varphi\,dr=\frac{2\pi}{3}(1-\cos(\arctan k))$

$\lim_{k\to0^+}\frac{V_k}{k^\lambda}=\frac{2\pi}{3}\lim_{k\to0^+}\frac{1-\cos(\arctan k)}{k^\lambda}=\frac{2\pi}{3}\lim_{k\to0^+}\frac{\frac12\arctan^2k}{k^\lambda}=\frac{2\pi}{3}\lim\frac{\frac12k^2+o(k^2)}{k^\lambda}$

$\lambda=2$. $\lim_{k\to0^+}\frac{V_k}{k^2}=\frac{\pi}{3}$.



四、由题, $f_{min}=f(1,0,0)=0$. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}\neq0$. $\begin{cases}x^2+y^2-z\le0\\0\le z\le1\end{cases}$

$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(z-1)$

$\begin{cases}F_x'=1+2\lambda x=0\\F_y'=1+2\lambda y=0\\F_z'=1-\lambda+\mu=0\\F_\lambda'=x^2+y^2-z=0\\F_\mu'=z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt2}{2}\\y=\frac{\sqrt2}{2}\\z=1\end{cases}$ 故 $f_{max}=f(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},1)=\sqrt2+1$.

最小值: $f(-\frac12,-\frac12,\frac12)=-\frac12$.

一、计算下列各题（每题6分，共30分）

1. 求曲面 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点 $(2,-3,1)$ 处的切平面与法线方程.

2. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$

求偏导不重不漏 3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x})$, 其中 f 二阶连续可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

计算! 具体数值

5. 函数 $u=\arctan(x^2+2y+z)$ 在点 $(1,0,2)$ 处沿方向 $\vec{l}=(1,2,3)$ 的方向导数.

二、计算下列各题（每题8分，共40分）

奇函数 1. 计算三重积分 $I_1=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1,z=2$ 所围立体. 计算, 找上下限.

2. 计算曲线积分 $I_2=\oint_L\dfrac{(x+2)^2+(z-3)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x+y=0\end{cases}$ $(a>0)$.

$x=\frac{\cos\theta}{\sqrt2}$ $y=-\frac{\cos\theta}{\sqrt2}$ $z=\sin\theta$

$\int_0^{2\pi}(\frac{\cos\theta}{\sqrt2}+2)^2+(\sin\theta-3)^2d\theta$

计算

3. 计算曲线积分 $I_3=\int_C(x^2+2xy)\mathrm{d}y$, 其中 C 是上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0,y\ge0)$, 逆时针方向.

二、 1. $\frac{7}{3}\pi$. 2. $\frac{3\pi a}{2}+\frac{26\pi}{a}$; 3. $\frac{4}{3}ab^2$; 4. $\frac{3e}{8}-\frac{\sqrt e}{2}$; 5. $\frac{80}{3}+\pi$

4. 计算 $I_4=\int_{\frac14}^{\frac12}\mathrm{d}y\int_{\frac12}^{\sqrt y}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt y}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

毕教方法

5. 设 $D=\{(x,y)||x|\le2,|y|\le2\}$, 计算 $I_5=\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

三、(10分)对任意 $k>0$, 设 Ω_k 为 $\sqrt{x^2+y^2}\le kz$ 与 $x^2+y^2+z^2\le1$ 所交区域, 记其体积为 V_k. 已知存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{k\to0^+}\dfrac{V_k}{k^\lambda}$ 为正数, 求 λ 的值及该极限.

$f(x,y,z)=x+y+z$ 在闭区域 $x^2+y^2\le z\le1$ 最值在驻点/边界

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=1\neq0$ 故 $f(x,y,z)$ 无驻点.

什么时候用 Lagrange?

四、(10分)求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在区域 $x^2+y^2\le z\le1$ 上的最大值和最小值.

曲面 Σ_1: $x^2+y^2=z$ $(0\le z\le1)$.

Σ_2: $x^2+y^2\le1,\ z=1$

五、(10分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\0, & x=0.\end{cases}$ 讨论 f 在 y 轴点上的连续性,可偏导性及可微性.

令 $x=\sqrt z\cos\theta,\ y=\sqrt z\sin\theta$.

$f=x+y+z=\sqrt z\cos\theta+\sqrt z\sin\theta+z=\sqrt{2z}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+z$

$\in[z-\sqrt{2z},\ z+\sqrt{2z}]$

$-\frac12\le f\le1+\sqrt2$. 故 ...

五、$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to y_0}}(x^2+y_0^2)e^{-\frac{1}{x^2}}=0=f(0,y_0)$. 故连续.

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,y_0)}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,y_0)-f(0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{((\Delta x)^2+y_0^2)e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x}=0=\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,y_0)}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{(\Delta y)^2+y_0}{\Delta y}=0$, 故可偏导.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{w}{\rho}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)e^{-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}\,e^{-\frac{1}{x^2}}=0$. 可微.

$w=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)-\Delta x f_x'(0,y_0)-\Delta y f_y'(0,y_0)$

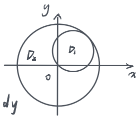
$=f(\Delta x,y_0+\Delta y)$

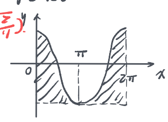
$=((\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2)e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}$

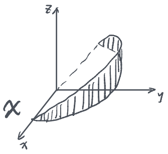
$0\le\frac{w}{\rho}=\frac{((\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2)e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2}}\to0$

故可微.

$\boxed{w=f(x,y)-f(0,0)-xf_x'(0,0)-yf_y'(0,0)}$



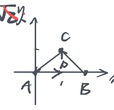




微积分 II (第一层次)期中试卷 (2022.5.8)

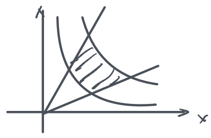
一、计算下列各题:(每题6分，共30分)

1. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{e^{-(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})}}{(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})^{xy}}$.



2. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $w=f(x+y+z,xyz)$. 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

3. 设函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3-3xyz=1 \\ x+y+z=a\ (a\neq 0) \end{cases}$ 确定. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.



4. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

5. 交换积分次序并计算积分 $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{\arccos y} y^3\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{2\pi-\arccos y}^{2\pi} y^3\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题:(每题8分，共40分)

1. 计算二重积分 $I_2 = \displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 计算三重积分 $I_3 = \displaystyle\iiint\limits_{V}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ $(a,b,c>0)$.

3. 求圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被两平面 $z=\pm y$ 所截下的有限部分的面积 S.

4. 计算曲线积分 $I_4=\displaystyle\int_C y\,\mathrm{d}s$. 其中 C 是摆线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ 在 $0\le t\le 2\pi$ 的一拱.

5. 计算曲线积分 $I_5 = \displaystyle\oint_L (x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$. 其中 L 是以 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$ 为顶点的正向三角形闭路 $ABCA$.

三、(12分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$ 讨论 f 的连续性, 可偏导性, 及可微性.

四、(10分) 求函数 $z=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$ 上的最大值与最小值.

五、(8分) 设函数 $f(x,y)$ 在平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}\ (a>0)$ 上连续可微, 在 D 的边界上取值为 0. 证明:

(1) $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \frac{\pi a^3}{3}\max_{(x,y)\in D}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

$I_4 = \int_L (x\sin y + x)dx + (\frac{1}{2}x^2\cos y + xy)dy$ $\rho = 1+\cos\theta$

$P(x,y) = x\sin y + x$ $Q(x,y) = \frac{1}{2}x^2\cos y + xy$ $\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = x\cos y + y$

顺时针.

$\int_L + \int_{C^+} = -\iint_D y\,dxdy = -\int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho^2 \sin\theta d\rho = \frac{-1}{3}\int_0^\pi (1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_0^\pi (1+\cos\theta)^3 d(1+\cos\theta) = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$

$0\le x\le 2,\ y=0$

$\int_{C^-} = \int_0^2 x dx = 2$

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2023.4.22)

一、计算下列各题:(每题 6 分, 共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{1-e^{\sin^2(xy)}}{x^2+y^2}$. $\overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=}} \lim\limits_{\rho\to0} \frac{1-e^{\sin^2(\rho^2\sin\theta\cos\theta)}}{\rho^2}$ $\boxed{0}$

2. 设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $x(y^2+z) + e^z - 1 = 0$ 确定的隐函数, 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)=(0,1)}$.

3. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ 2x-y+z = 1 \end{cases}$ 在点 $(0,-1,0)$ 处的切线与法平面.

$l_{切}: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-2}$

$\pi_{法}: x - 2z = 0$

4. 求函数 $u = xy + y^2z^3 + z$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}(P_0)$, 其中 $P_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\boldsymbol{l}$ 是曲面 $z = 1-x^2-y^2$ 在 P_0 处的外法向量.

$\frac{\partial u}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ $\boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$

5. 求函数 $f(x,y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

二、计算下列各题:(每题8分, 共40分)

1. 计算 $I_1 = \iint\limits_D f(x)f(y-x)dxdy$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$, $D = \{(x,y)||x|\le 4, |y|\le 4\}$.

$I_1 = \int_0^2 dx \int_x^{x+2} x(y-x)dy$

2. 计算三重积分 $I_2 = \iiint\limits_\Omega (x+2y+3z)^2 dxdydz$, 其中 Ω: $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ $(a>0)$.

3. 求曲线 $2x^2+2xy+y^2 = 1$ 所围成的平面区域的面积.

4. 计算曲线积分 $I_3 = \oint_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}ds$, 其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2 = 2$ 与直线 $y = x, y = 0$ 所围成的位于第一象限的区域的边界.

5. 计算 $I_4 = \int_L (x\sin y + x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2\cos y + xy\right)dy$, 其中 L 是极坐标表达式为 $\rho = 1+\cos\theta$ 的心脏线从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 沿顺时针方向的一段弧.

$\boxed{\frac{13}{10}\pi a^5}$

三、(10分) 记曲线 $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面与 $z = 1, z = 2$ 所围成立体区域为 Ω,

计算 $I_5 = \iiint\limits_\Omega \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$.

四、(12 分) 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性, 偏导数存在性, 方向导数的存在性, 可微性.

五、(8 分) 在第一象限内, 过曲线 $3x^2+2xy+3y^2 = a$ 上任意一点作其切线, 若切线与坐标轴所围成的三角形面积最小值为 $\frac{1}{4}$, 求 a 的值.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} y\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$ 连续.

$f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{0-0}{x} = 0$

$f_y'(0,0) = \lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to0}\frac{0}{y} = 0$

$w = f(x,y) - f(0,0) - f_x'(0,0)x - f_y'(0,0)y = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

3 式 --- 不可微.

$y - y_0 = -\frac{6x_0+2y_0}{2x_0+3y_0}(x-x_0)$

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2021.4.24)

一、计算下列各题（每题6分，共30分）

1. 求曲面 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点 $(2,-3,1)$ 处的切平面与法线方程.

解：令$F(x,y,z)=x^2-xy-8x+z+5$. 曲面在$(2,-3,1)$处的法向量

$$\overrightarrow{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_{(2,-3,1)}=(2x-y-8,-x,1)\Big|_{(2,-3,1)}=-(1,2,-1)$$

所以切平面方程为 $(x-2)+2(y+3)-(z-1)=0$; 法线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$.

解：令$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 则原极限化为

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho^2}=0.$$

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：记 $F(x,y,z)=z-e^{2x-3z}-2y$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}.$$

所以$3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2.$

4. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x})$, 其中 f 二阶连续可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\dfrac{1}{y}f'_2-\dfrac{y}{x^2}f'_3$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f'_1+y(xf''_{11}-\frac{x}{y^2}f''_{12}+\frac{1}{x}f''_{13})-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}(xf''_{21}-\frac{x}{y^2}f''_{22}+\frac{1}{x}f''_{23})-\frac{1}{x^2}f'_3-\frac{y}{x^2}(xf''_{31}-\frac{x}{y^2}f''_{32}+\frac{1}{x}f''_{33})\\&=f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2-\frac{1}{x^2}f'_3+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{y}{x^3}f''_{33}+\frac{2}{xy}f''_{23}.\end{aligned}$$

5. 函数 $u=\arctan(x^2+2y+z)$ 在点 $(1,0,2)$ 处沿方向 $\overrightarrow{l}=(1,2,3)$ 的方向导数.

解：$u'_x(1,0,2)=\dfrac{2x}{1+(x^2+2y+z)^2}\Big|_{(1,0,2)}=\dfrac{1}{5},\qquad u'_y(1,0,2)=\dfrac{2}{1+(x^2+2y+z)^2}\Big|_{(1,0,2)}=\dfrac{1}{5},$

$u'_z(1,0,2)=\dfrac{1}{1+(x^2+2y+z)^2}\Big|_{(1,0,2)}=\dfrac{1}{10},\qquad \overrightarrow{l}=(1,2,3)=\sqrt{14}(\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}})$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial\overrightarrow{l}}(1,0,2)=u'_x(1,0,2)\cos\alpha+u'_y(1,0,2)\cos\beta+u'_z(1,0,2)\cos\gamma=\dfrac{9}{10\sqrt{14}}.$

二、计算下列各题（每题8分，共40分）

1. 计算三重积分 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1,z=2$ 所围立体.

解：$I_1=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\pi z^2\mathrm{d}z=\frac{7}{3}\pi.$

2. 计算曲线积分 $I_2=\oint_L\frac{(x+2)^2+(z-3)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y=0\end{cases}\quad(a>0)$.

解：曲线 L 的参数方程为 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta,y=-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta,z=a\sin\theta,\quad\theta\in[0,2\pi]$, 则

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{2\pi}\frac{(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta+2)^2+(a\sin\theta-3)^2}{a^2}\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2+(z'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\frac{(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta+2)^2+(a\sin\theta-3)^2}{a}\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi a}{2}+\frac{26\pi}{a}.\end{aligned}$$

3. 计算曲线积分 $I_3=\int_C(x^2+2xy)\mathrm{d}y$, 其中 C 是上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0,y\ge 0)$, 逆时针方向.

解: 取 C 的参数方程为 $x=a\cos\theta,y=b\sin\theta$, θ 从 0 变到 π. 于是

$$I_3\;=\;\int_0^{\pi}(a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta)b\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}ab^2.$$

4. 计算 $I_4=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x.$

解：$I_4=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_0^1 x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\frac{3\mathrm{e}}{8}-\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}.$

5. 设 $D=\{(x,y)||x|\le 2,|y|\le 2\}$, 计算 $I_5=\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解：$I_5=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho+8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{2}{\cos\theta}}(\rho^2-1)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{80}{3}+\pi.$

三、(10分)对任意 $k>0$, 设 Ω_k 为 $\sqrt{x^2+y^2}\le kz$ 与 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 所交区域, 记其体积为 V_k. 已知存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{k\to 0^+}\frac{V_k}{k^\lambda}$ 为正数, 求 λ 的值及该极限.

解：用球坐标 $\Omega_k'=\{(r,\phi,\theta)|0\le r\le 1,0\le\phi\le\arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},0\le\theta\le 2\pi\}$, 则

$$V_k=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}\mathrm{d}\phi\int_0^1 r^2\sin\phi\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi(1-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}).$$

而 $\lim\limits_{k\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}{k^2}=\frac{1}{2}$, 所以 $\lambda=2$, 所求极限为 $\frac{\pi}{3}$.

四、(10分)求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在区域 $x^2+y^2\le z\le 1$ 上的最大值和最小值.

解：由于$f'_x=f'_y=f'_z=1$, 故在区域$x^2+y^2\le z\le 1$内部无可疑极值点.

(a) 在边界$x^2+y^2=z(0\le z<1)$上,

令$F(x,y,z,\lambda_1)=x+y+z+\lambda_1(x^2+y^2-z)$,

由$\begin{cases} F'_x=1+2\lambda_1 x=0\\ F'_y=1+2\lambda_1 y=0\\ F'_z=1-\lambda_1=0\\ F'_{\lambda_1}=x^2+y^2-z=0\end{cases}$ 解得可疑极值点 $P_1(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

(b) 在边界$z=1(x^2+y^2<1)$上

令$G(x,y,z,\lambda_2)=x+y+z+\lambda_2(z-1)$,

由于$G'_x=G'_y=1\ne 0$, 故在该边界上无可疑极值点.

(c) 在边界$z=x^2+y^2, z=1$上

令$H(x,y,z,\lambda_3,\mu_3)=x+y+z+\lambda_3(x^2+y^2-z)+\mu_3(z-1)$

由$\begin{cases} H'_x=1+2\lambda_3 x=0\\ H'_y=1+2\lambda_3 y=0\\ H'_z=1-\lambda_3+\mu_3=0\\ H'_{\lambda_3}=x^2+y^2-z=0\\ H'_{\mu_3}=z-1=0\end{cases}$ 解得可疑极值点 $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$, $P_3(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1)$.

所以最小值$=\min\{f(P_1),f(P_2),f(P_3)\}=-\frac{1}{2}$; 最大值$=\max\{f(P_1),f(P_2),f(P_3)\}=1+\sqrt{2}$.

五、(10分）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论 f 在 y 轴点上的连续性,可偏导性及可微性.

解: (1) $\forall y_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0=f(0,y_0)$, 所以 f 在 y 轴点上连续.

(2) $f'_x(0,y_0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+y_0^2)\dfrac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}=0$,

$f'_y(0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}0=0$, 所以 f 在 y 轴点上可偏导.

(3) $\omega=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)-f'_x(0,y_0)\Delta x-f'_y(0,y_0)\Delta y$

$=f(\Delta x,y_0+\Delta y)=(\Delta x^2+(y_0+\Delta y)^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\Delta x^2}}$,

$0\le\dfrac{\omega}{\rho}=\dfrac{(\Delta x^2+(y_0+\Delta y)^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\rho}\le((\Delta x^2+(y_0+\Delta y)^2))\dfrac{\frac{1}{\rho}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\rho^2}}}\to 0$, $(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\omega}{\rho}=0$, 所以 f 在 y 轴点上可微.

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2022.5.8)

一、计算下列各题:（每题6分，共30分）

1. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{\mathrm{e}^{-(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})}}{(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})^{xy}}$.

解：注意到 $x,y>0$ 时, $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geq 2$. 于是 $0<e^{-(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})}\leq e^{-2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y})^{xy}=+\infty$, 所以原极限$=0$.

2. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $w=f(x+y+z,xyz)$. 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

解: $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1'+yzf_2'$, $\qquad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f_{11}''+y(x+z)f_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2'$.

3. 设函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x^3+y^3+z^3=3xyz\\x+y+z=a\ (a\neq 0)\end{cases}$ 确定. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解：记 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$, $H(x,y,z)=x+y+z-a$. 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{D(F,H)}{D(x,z)}}{\frac{D(F,H)}{D(y,z)}}=\frac{z-x}{y-z},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{D(F,H)}{D(y,x)}}{\frac{D(F,H)}{D(y,z)}}=\frac{x-y}{y-z}.$$

4. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面$x-y+2z=0$的切平面方程.

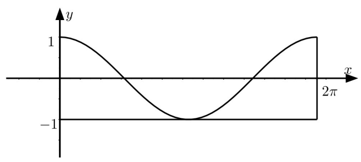
解：曲面在点 (x_0,y_0,z_0) 处的一个法向量为 $\mathbf{n}=(2x_0,4y_0,2z_0)$, 平面的法向量为 $(1,-1,2)$. 于是

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{-1}=\frac{2z_0}{2}\quad 且\quad x_0^2+2y_0^2+z_0^2=1.$$

解得切点为 $\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{11}},\mp\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{11}},\pm2\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)$. 故所求切平面方程为 $x-y+2z=\pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.

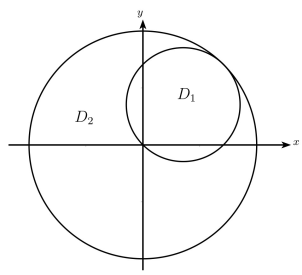
5. 交换积分次序并计算积分$I_1=\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{\arccos y}y^3\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{2\pi-\arccos y}^{2\pi}y^3\mathrm{d}x$.

解: $I_1=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{-1}^{\cos x}y^3\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(\cos^4 x-1)\mathrm{d}x=-\frac{5}{16}\pi$.



二、计算下列各题:（每题8分，共40分）

1. 计算二重积分 $I_2=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq1}|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



解法一：记 $D:x^2+y^2\leq1$, $D_1:x^2+y^2-\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\leq0$, $D_2=D\setminus D_1$, 如图所示

则 $I_2=\displaystyle\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

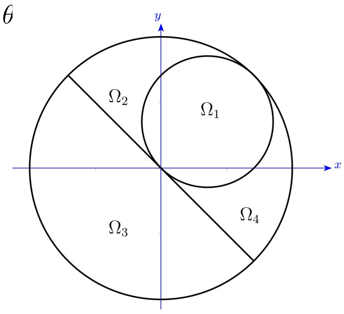
其中 $\displaystyle\iint\limits_{D}(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}$,

(令 $x-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\rho\cos\theta, y-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\rho\sin\theta$), $\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ =\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}}(\rho^3-\frac{\rho}{4})\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi}{32}$,

所以 $I_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{16}=\frac{9\pi}{16}$.

解法二： 令 $F(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2$, 作极坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$

则可将积分区域分为如下4个部分：(如图所示)



Ω_1: $F(x,y)\geq 0$, $\{-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}, 0\leq\rho\leq\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\}$;

Ω_2: $F(x,y)<0$, $\{\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}, \sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leq\rho\leq 1\}$;

Ω_3: $F(x,y)<0$, $\{\frac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{7\pi}{4}, 0\leq\rho\leq 1\}$;

Ω_4: $F(x,y)<0$, $\{-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}, \sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leq\rho\leq 1\}$;

由对称性可得,

$$\begin{aligned}I_2&=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}(\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}^{1}(\rho^2-\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4}))\rho\mathrm{d}\rho\\&\quad+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^2-\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4}))\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{9}{16}\pi.\end{aligned}$$

2. 计算三重积分 $I_3=\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$, $(a,b,c>0)$.

解：$I_3=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=4\pi abc\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi^2}{4}abc.$

3. 求圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被两平面 $z=\pm y$ 所截下的有限部分的面积 S.

解：设 S_1 为曲面在第一卦限部分的面积, 其在 yOz 面的投影区域为 $D=\{(y,z)|\ 0\leq z\leq y,\ 0\leq y\leq 1\}$.

$$S=8S_1=8\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}z=8.$$

4. 计算曲线积分 $I_4=\int\limits_C y\mathrm{d}s$. 其中 C 是摆线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ 在 $0\leq t\leq 2\pi$ 的一拱.

解: $I_4=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}4\sin^2\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{32}{3}.$

5. 计算曲线积分 $I_5=\oint\limits_L(x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\mathrm{d}y$. 其中 L 是以 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$ 为顶点的正向三角形闭路 $ABCA$.

解法一：列出直线方程 $AB: y=0$; $BC: y=2-x$, $CA: y=x$, 则

$$I_4=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x+\int_2^1(4+x^2+(2-x)^2)\mathrm{d}x+\int_1^0 2x^2\mathrm{d}x=-\frac{14}{3}.$$

解法2：用Green公式, 其中 D 为闭路所围成的区域.

$$I_4=\iint\limits_D[-2x-2(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}(2x+y)dx=-\frac{14}{3}.$$

三、(12分)设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$ 讨论 f 的连续性, 可偏导性, 及可微性.

解: 显然 f 在 $x\neq 0$ 时是连续的、可偏导的以及可微的. 下面讨论 $x=0$ 的情形. $\forall y_0\in\mathbb{R}$,

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}\dfrac{\sin xy}{x}=y_0=f(0,y_0)$, 所以 f 在 $x=0$ 时连续.

(2) $f'_x(0,y_0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin xy_0}{x}-y_0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin xy_0-xy_0}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y_0\cos xy_0-y_0}{2x}=0,$

$f'_y(0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{y_0+\Delta y-y_0}{\Delta y}=1,$

所以 f 在 $x=0$ 时可偏导.

(3) $\omega=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)-f'_x(0,y_0)\Delta x-f'_y(0,y_0)\Delta y=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-(y_0+\Delta y).$

当 $\Delta x\neq 0$ 时, $\omega=\dfrac{\sin\Delta x(y_0+\Delta y)}{\Delta x}-(y_0+\Delta y)=\dfrac{\sin\Delta x(y_0+\Delta y)-\Delta x(y_0+\Delta y)}{\Delta x},$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\omega}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\omega}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sin\Delta x(y_0+\Delta y)-\Delta x(y_0+\Delta y)}{(\Delta x)^2}\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,$$

当 $\Delta x=0$ 时, $\omega=(y_0+\Delta y)-(y_0+\Delta y)=0$. 仍有 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\omega}{\rho}=0$.

于是 f 在 $x=0$ 时可微.

注: 也可以证明 f 在 $x=0$ 时连续可微, 从而可微.

四、(10分)求函数 $z=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$ 上的最大值和最小值.

解：$\begin{cases}z'_x=2x-2xy^2=0\\ z'_y=4y-2x^2y=0\end{cases}$ 解得落在 D 内部的可能的极值点为: $(0,0)$, $(\pm\sqrt{2},\pm 1)$.

在D的边界 $x^2+y^2-4=0$ 上, 令拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=(x^2+2y^2-x^2y^2)+\lambda(x^2+y^2-4)$,

$\begin{cases}F'_x=2x(1-y^2+\lambda)=0\\ F'_y=2y(2-x^2+\lambda)=0\\ F'_\lambda=x^2+y^2-4=0\end{cases}$ 解得可疑的极值点为 $(0,\pm 2),(\pm 2,0),(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}})$,

$z(0,0)=0,\quad z(\pm\sqrt{2},\pm 1)=2,\quad z(0,\pm 2)=8,\quad z(\pm 2,0)=4,\quad z(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\ \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}})=\dfrac{7}{4},$

比较大小得 z 的最大值为8 最小值为0.

五、(8分）设函数 $f(x,y)$ 在平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2\}$ $(a>0)$ 上连续可微, 在 D 的边界上取值为 0. 证明:

(1) $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

(2) $\displaystyle|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \le \frac{\pi a^3}{3}\max_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$

证明: 设 L为D的边界. 由格林公式, 有

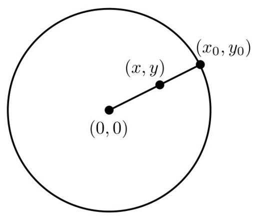
$$\oint\limits_L yf(x,y)\mathrm{d}x = -\iint\limits_D\left(f(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\oint\limits_L xf(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_D\left(f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而有

$$\begin{aligned}|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| &= |\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \\ &\le \frac{1}{2}|\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \\ &\le \frac{1}{2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\max_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi a^3}{3}\max_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$



第2问方法二:

$\forall(x,y)\in D$, 按如图方式取(x_0,y_0), 则由中值定理

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f'_x(\xi,\eta)(x-x_0)+f'_y(\xi,\eta)(y-y_0)=f'_x(\xi,\eta)(x-x_0)+f'_y(\xi,\eta)(y-y_0)$$

$$|f(x,y)|=|f'_x(\xi,\eta)(x-x_0)+f'_y(\xi,\eta)(y-y_0)|\le\left((f'_x(\xi,\eta))^2+(f'_y(\xi,\eta))^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, M=\max\limits_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 则

$$|f(x,y)|\le M(a-\rho)$$

$$|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y|\le\iint\limits_D|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\iint\limits_D M(a-\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(a-\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi a^3}{3}M.$$

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2023.4.22)

一、计算下列各题:（每题 6 分, 共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\sin^2(xy)}}{x^2+y^2}$.

解: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\sin^2(xy)}}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{-\sin^2(xy)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{-x^2y^2}{x^2+y^2}\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\lim\limits_{\rho\to0^+}(-\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta)=0.$

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x(y^2+z)+\mathrm{e}^z-1=0$ 确定的隐函数, 求 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,y)=(0,1)}$.

解: 记 $F(x,y,z)=x(y^2+z)+\mathrm{e}^z-1$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=-\frac{y^2+z}{x+e^z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=-\frac{2xy}{x+e^z}$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{\left(2y+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x+e^z)-(y^2+z)e^z\frac{\partial z}{\partial y}}{(x+e^z)^2}.$$

因为当 $x=0,y=1$ 时, $z=0$, 所以 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(0,1)}=0$, 因此 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,y)=(0,1)}=-2$.

3. 求空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\2x-y+z=1\end{cases}$ 在点 $(0,-1,0)$ 处的切线与法平面.

解: 切线方程 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z}{2}$, 法平面方程 $-x+2z=0$.

4. 求函数 $u=xy+y^2z^3+z$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}(P_0)$, 其中 $P_0\Big(\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2},0\Big)$, $\boldsymbol{l}$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 P_0 处的外法向量.

解: 记 $F=z+x^2+y^2-1$, 则 $\boldsymbol{l}=(F_x',F_y',F_z')\Big|_{P_0}=(2x,2y,1)\Big|_{P_0}=(\sqrt2,\sqrt2,1)=\sqrt5\Big(\sqrt{\dfrac25},\sqrt{\dfrac25},\sqrt{\dfrac15}\Big)$

$$u_x'(P_0)=y\Big|_{y=\frac{1}{\sqrt2}}=\frac{1}{\sqrt2},\ \ u_y'(P_0)=(x+2yz^3)\Big|_{(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0)}=\frac{1}{\sqrt2},\ \ u_z'(P_0)=(3y^2z^2+1)\Big|_{(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0)}=1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}(P_0)=u_x'(P_0)\cos\alpha+u_y'(P_0)\cos\beta+u_z'(p_0)\cos\gamma=\sqrt{\frac25}\cdot\frac{1}{\sqrt2}+\sqrt{\frac25}\cdot\frac{1}{\sqrt2}+\sqrt{\frac15}\cdot1=\frac{3}{\sqrt5}.$$

5. 求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

解: $f_x'=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},f_y'=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. 令 $f_x'=f_y'=0$, 得驻点$(\pm1,0)$. 记

$$A=f_{xx}''=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ \ B=f_{xy}'=y(x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ \ C=f_{yy}'=x(y^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

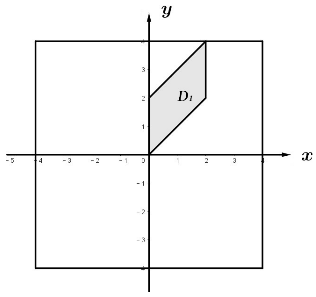
在 $(1,0)$ 处，$A=-2\mathrm{e}^{-\frac12},B=0,C=-\mathrm{e}^{-\frac12}$, $B^2-AC<0$, $A<0$, 故 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac12}$ 是极大值.

在 $(-1,0)$ 处，$A=2\mathrm{e}^{-\frac12},B=0,C=\mathrm{e}^{-\frac12}$, $B^2-AC<0$, $A>0$, 故 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac12}$ 是极大值.

二、计算下列各题:（每题8分, 共40分）

1. 计算 $I_1=\iint\limits_D f(x)f(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $D=\{(x,y)\big||x|\leqslant 4,|y|\leqslant 4\}$.

解：如图所示，设 $D_1=\{(x,y)|0\leqslant y-x\leqslant 2,0\leqslant x\leqslant 2\}$,



$$\text{则 } I_1=\iint\limits_{D_1} x(y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2+x}x(y-x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\frac{x(y-x)^2}{2}\bigg|_{y=x}^{y=2+x}\mathrm{d}x=\int_0^2 2x\mathrm{d}x=4.$$

2. 计算三重积分 $I_2=\iiint\limits_\Omega(x+2y+3z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega:\ x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\ (a>0)$.

解：根据奇偶性与对称性, $\iiint\limits_\Omega(x+2y+3z)^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_\Omega(x^2+4y^2+9z^2)\mathrm{d}V$.

由轮换对称性, 有 $\iiint\limits_\Omega x^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_\Omega y^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}V$. 因此

$$I_2=14\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}V=\frac{14}{3}\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\frac{14}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{56\pi a^5}{15}.$$

3. 求曲线 $2x^2+2xy+y^2=1$ 所围成的平面区域的面积.

解：由 $2x^2+2xy+y^2=1$ 得 $x^2+(x+y)^2=1$, 令 $u=x,v=x+y$, 则原曲线方程化为 $u^2+v^2=1$, 而 $J(u,v)=1$, 故所求面积为 $S=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\pi$.

4. 计算曲线积分 $I_3=\oint_\Gamma\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2$ 与直线 $y=x,y=0$ 所围的位于第一象限的区域的边界.

解: 曲线 Γ 分为三段：

$$\Gamma_1: y=0,0\leqslant x\leqslant\sqrt{2};\qquad \Gamma_2: x=\sqrt{2}\cos\theta,y=\sqrt{2}\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4};\qquad \Gamma_3: y=x,0\leqslant x\leqslant 1.$$

$$I_3=\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{\sqrt{2}}x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}\theta+\int_0^1\sqrt{2x^2}\sqrt{2}\mathrm{d}x=1+\frac{\pi}{2}+1=2+\frac{\pi}{2}.$$

5. 计算 $I_4=\int_L(x\sin y+x)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{2}x^2\cos y+xy\right)\mathrm{d}y$, 其中 L 是极坐标表达式为 $\rho=1+\cos\theta$ 的心脏线从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 沿顺时针方向的一段弧.

解：记 $P=x\sin y+x,Q=\frac{1}{2}x^2\cos y+xy$, 由 Green 公式,

$$I_4=\int_{\overrightarrow{OA}}-\iint_D\left(Q'_x-P'_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x\mathrm{d}x-\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2-\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2-\frac{1}{3}\int_0^\pi-(1+\cos\theta)^3\mathrm{d}(1+\cos\theta)=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}.$$

三、(10分) 记曲线 $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面与 $z=1, z=2$ 所围成立体区域为 Ω,

计算 $I_5 = \iiint\limits_{\Omega} \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解：曲面方程为 $x^2+y^2=z$, 记 $D(z): x^2+y^2 \leqslant z$. 则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_1^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D(z)} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{z}} \frac{\rho}{\rho^2+z^2} \mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi \int_1^2 \frac{1}{2} \ln\left(\rho^2+z^2\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{z}} \mathrm{d}z = \pi \int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z \\
&= \pi z \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\Big|_1^2 + \pi \int_1^2 \frac{1}{1+z} \mathrm{d}z \\
&= \pi \ln \frac{27}{16}.
\end{aligned}$$

四、(12分) 讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的连续性, 偏导数存在性, 方向导数的存在性, 可微性.

解：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho \to 0^+} \rho \cos^2\theta \sin\theta = 0 = f(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = f'_x(0,0), \quad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 = f'_y(0,0)$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

(3) $\omega = f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = f(x,y), \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

$\dfrac{\omega}{\rho} = \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)\rho} \not\to 0, (\rho \to 0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

(4) 设 $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t\cos\alpha, t\cos\beta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \cos^2\alpha \cos\beta = \cos^2\alpha\cos\beta,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数存在.

五、(8 分) 在第一象限内, 过曲线 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 上任意一点作其切线, 若切线与坐标轴所围成的三角形面积最小值为 $\frac{1}{4}$, 求 a 的值.

解：设切点 $P(x,y)$, 则 (x,y) 满足 $3x^2+2xy+3y^2=a$.

在方程 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 两边对 x 求导, 解得 $y'=-\dfrac{3x+y}{x+3y}$, 故过点 P 的切线方程为

$$Y-y=-\frac{3x+y}{x+3y}(X-x).$$

切线与两个坐标轴的截距分别为

$$x+\frac{x+3y}{3x+y}\cdot y=\frac{a}{3x+y},\quad y+\frac{3x+y}{x+3y}\cdot x=\frac{a}{x+3y},\quad \left(\text{这里利用了 } 3x^2+2xy+3y^2=a\right)$$

故三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{3x+y}\right)\cdot\left(\frac{a}{x+3y}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{a+8xy}.\quad \left(\text{再次利用 } 3x^2+2xy+3y^2=a\right)$$

已知 $a>0$, 只需求 xy 在条件 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 下的最大值.

令 $L=xy+\lambda\left(3x^2+2xy+3y^2-a\right)$, 则

$$\begin{cases} L'_x=y+6\lambda x+2\lambda y=0,\\ L'_y=x+2\lambda x+6\lambda y=0,\\ L'_\lambda=3x^2+2xy+3y^2-a=0,\end{cases}$$

解得 $x=y=\dfrac{\sqrt{2a}}{4}$, 故 $S_{\min}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{a+8\cdot\frac{\sqrt{2a}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2a}}{4}}=\dfrac{1}{4}$, 从而 $a=1$.

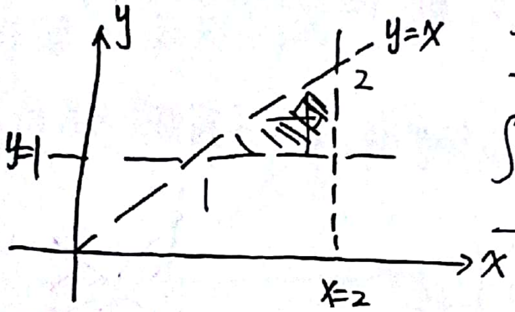
I. 定积分与重积分 —

知识点：(1) 重积分与累次积分互化；(2) 极坐标、球坐标、及柱坐标下重积分；(3) 换元积分法中的微元表示.

§1. 区域划分与累次积分法

例1. 计算 $I=\iint_D xy\,dxdy$，其中D是由直线 $y=1$, $x=2$ 及 $y=x$ 所围成的区域.

分析:



$\int_1^2 dx\int_1^x xy\,dy$

$\int_1^2 dy\int_y^2 xy\,dx$

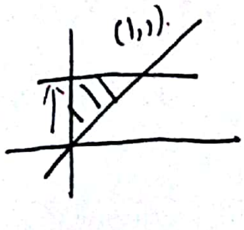
(1) 积分次序：先x后y，则 $D=\{(x,y): y\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$

从而 $I=\int_1^2 dy\int_y^2 xy\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 y[4-y^2]\,dy=\frac{9}{8}$

(2) 积分次序：先y后x，则 $D=\{(x,y): 1\le y\le x, 1\le x\le 2\}$

从而 $I=\int_1^2 dx\int_1^x xy\,dy=\frac{1}{2}\int_1^2 x[x^2-1]\,dx=\frac{9}{8}$

例2. 计算 $I=\iint_D \sin y^2\,dxdy$，其中D是由直线 $x=0$, $y=1$ 及 $y=x$ 所围成

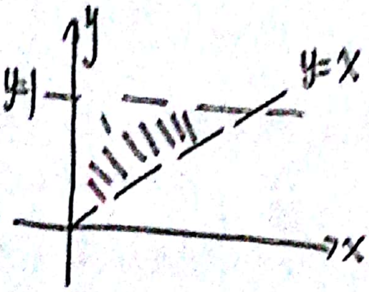


$\int_0^1 dx\int_x^1 \sin y^2\,dy$ ×

$\int_0^1 dy\int_0^y \sin y^2\,dx$
$=\int_0^1 y\sin y^2\,dy$

的闭区域.

分析:



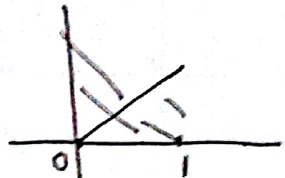
① 积分次序: 先x后y, 则 $D=\{(x,y): 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\}$

从而 $I=\int_0^1 dy\int_0^y \sin y^2\,dx=\int_0^1 y\sin y^2\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 \sin y^2\,dy^2=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$

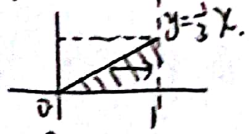
② 积分次序: 先y后x, 则 $D=\{(x,y): x\le y\le 1,\ 0\le x\le 1\}$

从而 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 \sin y^2\,dy$ (不可直接积出).

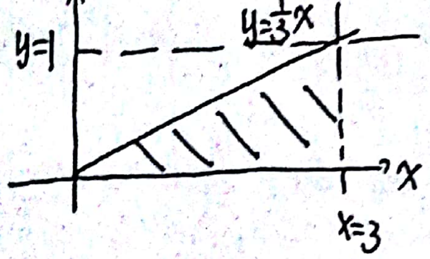
例3. 计算 $I=\int_0^1 dy\int_{3y}^3 e^{x^2}dx$.



分析: I不可直接积出, 我们可以尝试交换积分次序.



$\int_0^3 dx\int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2}dy$



$D=\{(x,y): 3y\le x\le 3,\ 0\le y\le 1\}$ $=\frac{1}{3}\int_0^3 xe^{x^2}dx$

$=\{(x,y): 0\le y\le \frac{1}{3}x,\ 0\le x\le 3\}$ $=\frac{1}{6}\int_0^3 e^{x^2}dx^2$

$=\frac{1}{6}e^{x^2}\Big|_0^3$

从而 $I=\int_0^1 dy\int_{3y}^3 e^{x^2}dx=\int_0^3 dx\int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2}dy=\frac{1}{3}\int_0^3 xe^{x^2}dx=\frac{1}{6}(e^9-1)$

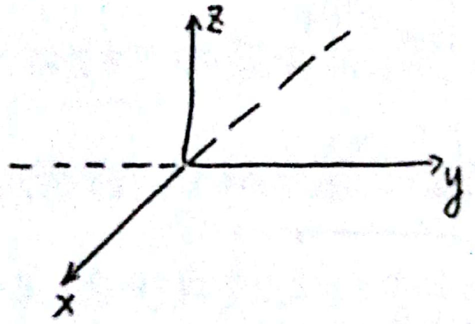
练习：(1) 计算 $I=\iint_D (y^2-x)\,dxdy$，D是由抛物线 $x=y^2$ 及 $x=3-2y^2$ 所围成的闭区域；

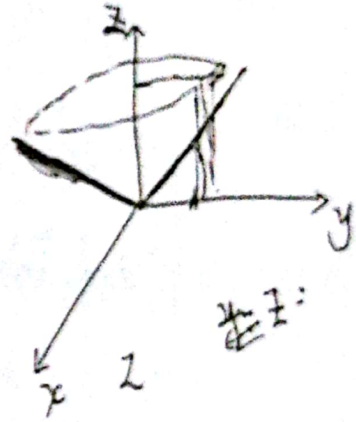
(2) 计算 $I=\iint_D (x^2-y^2)\,dxdy$，D是闭区域，$0\le y\le \sin x,\ 0\le x\le \pi$；

(3) 计算 $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$；

例4. 计算 $I=\iiint_\Omega e^x\,dxdydz$，$\Omega$是由平面 $x=0, y=1, z=0$ 及 $z=x+y$ 所围成的闭区域.

分析:





① 积分次序：先x，后y，后z，$D=\{(x,y,z): z-y\le x\le 0,\ z\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$

及
$x=0$
$y=1$
$z=0$
$z=x+y$

从而 $I=\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_{z-y}^0 e^x\,dx$

$=\int_0^1 dz\int_z^1 (1-e^{z-y})\,dy$

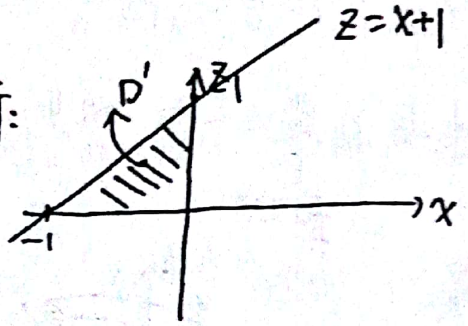
$=\int_0^1 [1-z+e^{z-1}-1]\,dz=\frac{1}{2}-e^{-1}$

② 积分次序：先y后x后z，$D=\{(x,y,z): z-x\le y\le 1, z-1\le x\le 0, 0\le z\le 1\}$

从而 $$I=\int_0^1 dz\int_{z-1}^{0}dx\int_{z-x}^{1}e^x dy$$

例5. 对于积分 $I=\int_0^1 dz\int_{z-1}^{0}dx\int_{z-x}^{1}e^x dy$，交换积分次序为先y，后z，后x.

分析:



$D'=\{(x,z): z-1\le x\le 0, 0\le z\le 1\}$

$=\{(x,z): 0\le z\le x+1, -1\le x\le 0\}$

从而 $$I=\int_0^1 dz\int_{z-1}^{0}dx\int_{z-x}^{1}e^x dy$$

$$=\int_{-1}^{0}dx\int_0^{x+1}dz\int_{z-x}^{1}e^x dy$$

习题: (4) 交换下列积分次序:

① $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dy$; ② $\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx$

(5) $\iiint\limits_{\Omega} yz\,dxdydz$，$\Omega$是由平面 $z=0$，$z=y$，$y=1$ 及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域

(6) $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz$，$\Omega$是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 的公共部分.

总结：累次积分法首先要完成对区域的合理划分（一般依据被积函数的形式而定，见例2等）；因此要会进行适当的交换积分次序.

§2. 微元法与换元积分法.

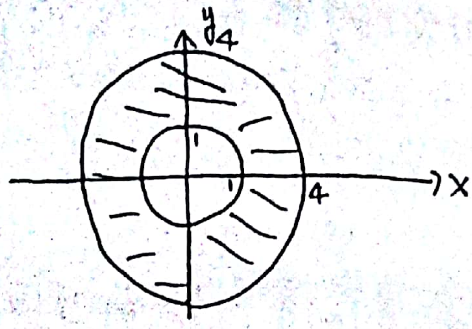
几类常用的累次积分法：

1. 直角坐标下的累次积分法，见例1-例5.

2. 二元情形下的极坐标下的累次积分法（以及针对椭圆情形的广义极坐标下的累次积分法）.

例6. 计算 $I=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$，其中D是由 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=4$ 所围成的圆环形区域.

分析：根据被积函数及区域关于x,y的对称形式，此题可采用极坐标变换下的累次积分法.



① 直角坐标下累次积分，先x后y. $D=\{(x,y): -\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2},\ -4\le y\le -1\}\cup$

$\{(x,y): \sqrt{1-y^2}\le|x|\le\sqrt{4-y^2},\ -1\le y\le 1\}\cup\{(x,y): -\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2},\ 1\le y\le 4\}$

因此在直角坐标下积分比较繁琐.

② 极坐标下累次积分，先θ后r, $D=\{(\theta,r): 0\le\theta\le 2\pi,\ 1\le r\le 2\}$

$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 1\le r\le 2$

特别注意，此时面积微元 $dxdy=r\,dr\,d\theta$，因此，

$$I=\int_1^2 dr\int_0^{2\pi} r\sqrt{r^2}\,d\theta = 2\pi\int_1^2 r^2\,dr=\frac{2\pi}{3}\left[2^3-1\right]=\frac{14}{3}\pi.$$

③ 极坐标下累次积分，先r后θ, $D=\{(\theta,r): 1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

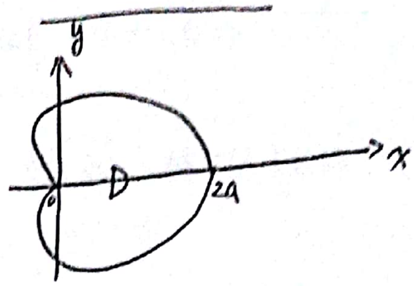
$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad 1\le r\le 2,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad dxdy=r\,dr\,d\theta$

从而 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r\sqrt{r^2}\,dr=\frac{14}{3}\pi.$

$\int_1^2\sqrt{r^2}$

例7. 在极坐标中方程 $\rho=a(1+\cos\varphi)(a>0)$ 所表示的闭曲线称为心形线，求心形线所围成区域的面积 σ.

分析：面积 $\sigma=\iint\limits_{D}dxdy$



①利用极坐标下累次积分法，

先 φ 后 ρ，则 $D=\{(\varphi,\rho):$ 很难表示 $, 0\le\rho\le 2a\}$

②利用极坐标下累次积分法，

先 ρ 后 φ，则 $D=\{(\varphi,\rho): 0\le\rho\le a(1+\cos\varphi), -\pi\le\varphi\le\pi\}$

从而 $\sigma=\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_{0}^{a(1+\cos\varphi)}\rho\, d\rho$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2\, d\varphi$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\right]d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

习题：(7) 计算 $I=\iint\limits_{D}e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2\le a^2\ (a>0)$.

(8) 计算 $I=\iint\limits_{D}\arctan\frac{y}{x}\,dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的在第一象限的闭区域.

注：对于具有 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le R^2$ 的积分形式，一般做广义极坐标变换

$$x=a\rho\cos\theta,\quad y=b\rho\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi],\quad 0\le\rho\le R.$$

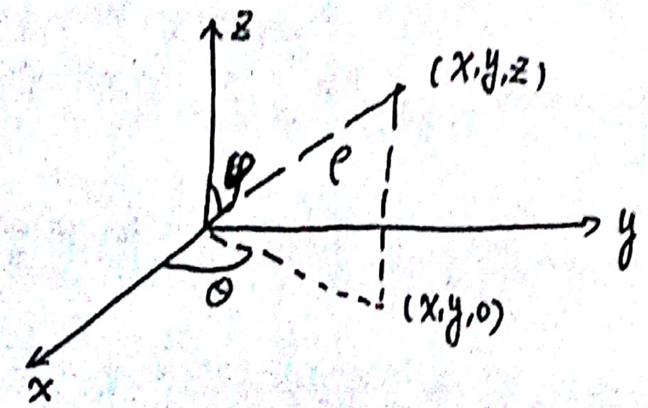
此时面积微元 $dxdy=ab\rho\, d\rho d\theta$.

3. 三元情形下的球坐标变换的累次积分法（以及针对椭球情形下的广义球坐标下的累次积分法）.

例8. 求上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所围成的立体的体积V

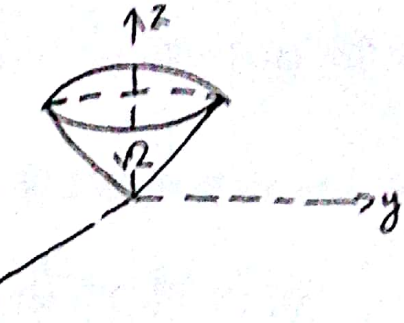
分析：①球坐标变换的几何意义

$$x=\rho\cos\theta\sin\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi.$$



在此变换下，体积微元 $dxdydz \triangleq dV=\rho^2\sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta$

② 利用球坐标下的累次积分法



③ 先θ后φ后ρ

$D=\{(\theta,\varphi,\rho): \underset{\sim\sim}{0\le\theta\le 2\pi}, \underset{\sim\sim}{0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}}, \underset{\sim\sim}{0\le\rho\le 1}\}$

从而 $V=(\iiint_\Omega dv) = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} \underline{\rho^2\sin\varphi}\, d\theta$

$= 2\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin\varphi\, d\varphi$ $\qquad \rho^2\sin\varphi.$

$= 2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{2\pi}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

例9. 计算 $I=\iiint_\Omega y^2 dxdydz$, $\Omega: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4.$

分析: 注意到此题中区域关于 x,y,z 完全对称, 从而

$I = \underline{\frac{1}{3}} \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$

再次利用球坐标变换, $\Omega=\{(\theta,\varphi,\rho): 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi, 1\le\rho\le 2\}.$

故 $I = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \underline{\int_1^2 \rho\, \underline{\sin\varphi}\, \underline{\rho^2}\, d\rho} = \frac{5}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi$

$= 5\pi.$ $\qquad d\rho. \quad \rho$

注: 充分利用区域及函数的对称性, 可适当化简计算.

习题: (甲) 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,dxdydz$, 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $3z=x^2+y^2$ 所围立体.

(乙) 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\ln(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, 其中 Ω 为 $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$.

(丙) 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}\,dxdydz$, 其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$.

4. 三维情形下的柱坐标下的累次积分法.

例10. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} y^2\,dxdydz$, 其中 Ω 由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 以及平面 $z=4$ 所围成.

分析: 由于区域关于 x, y 对称, 因此此题可采用柱坐标变换公式进行计算.

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z.$$

从而体积微元 $dxdydz=(dv)=\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$

在柱坐标下的累次积分法: 先 x, y 再 z, $D=\{(x,y,z): x^2+y^2\le z,\ 0\le z\le 4\}$

$=\{(\rho,\theta,z): 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le\sqrt{z},\ 0\le z\le 4\}$

从而 $I=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3\sin^2\theta\, d\rho$

$$=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}\frac{z^2}{4}\cdot\frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^4 z^2 dz=\frac{\pi}{12}\cdot 4^3=\frac{16}{3}\pi.$$

注：注意到区域关于 x,y 两对称性，则：

$$I=\frac{1}{2}\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dxdydz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{4}\int_0^4 z^2dz=\frac{\pi}{12}\cdot 4^3=\frac{16}{3}\pi.$$

练习：(12) 计算 $I=\iiint_\Omega y^2dxdydz$，$\Omega$ 由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，

$x^2+y^2\le 4$ 及 $z=0$ 所围成.

(13) 计算三重积分 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,dxdydz$，其中 Ω 是椭球

体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

$x=ar\sin\varphi\cos\theta$

$y=br\sin\varphi\sin\theta$

$z=cr\cos\varphi$

(14) 计算 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

与 $3z=x^2+y^2$ 所围立体.

5. 一般换元变换公式.

(1) 二维情形

$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $(u,v)\in D$.

则面积微元

$$dxdy=|J(u,v)|dudv,\ 其中\ |J(u,v)|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=|\partial_u x\partial_v y-\partial_u y\partial_v x|$$

注: 若变换式由 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 给出, 记

$$|J(x,y)|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=|\partial_x u\partial_y v-\partial_y u\partial_x v|,\ 则:\ |J(u,v)|\cdot|J(x,y)|=1.$$

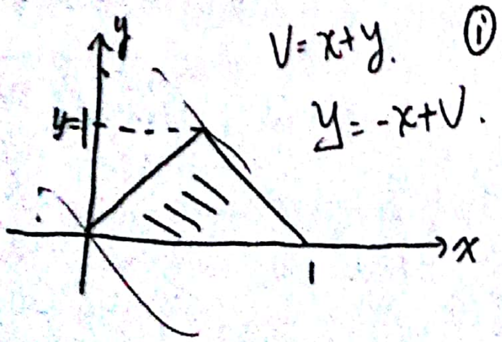
例11. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dxdy$, 其中 D 为 $y=x$, $y=0$, $y+x=1$ 所围区域.

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2.$$

分析: ① 结合区域~~及被~~积函数形式, 自然要令 $u=y-x$, $v=y+x$,

则 $J(x,y)=2$, 从而 $J(u,v)=\frac{1}{2}=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$

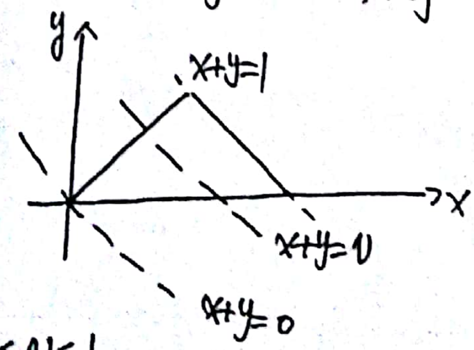
② (u,v) 坐标下的累次积分法: 先 u 后 v,



$v=x+y$.

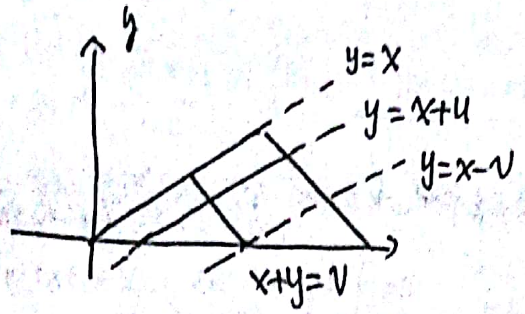
$y=-x+v$.

① 先考虑 $v=x+y$ 的范围, 则



$0\le v\le 1$

(ii) 固对固定的 v, 考虑 $u=y-x$ 的范围.



故 $-v\le u\le 0$.

从而 $D=\{(u,v):-v\le u\le 0,\ 0\le v\le 1\}$, 因此.

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{0} e^{\frac{u}{v}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[v\,e^{u/v}\Big|_{-v}^{0}\right]dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[v-e^{-1}v\right]dv=\frac{1}{4}(1-e^{-1})$$

例12. 计算由抛物线 $y^2=x,\ y^2=2x$ 以及双曲线 $xy=1,\ xy=2$ 所围平面区域 D 的面积 $\sigma(D)$.

分析: 在区域 D 中, $1\le y^2/x\le 2$, $1\le xy\le 2$, 故自然令

$u=y^2/x$, $v=xy$; 则 $1\le u\le 2$, $1\le v\le 2$.

此时, $|J(x,y)|=3u$, 从而 $|J(u,v)|=\dfrac{1}{3u}$

则 $\sigma(D)=\int_1^2 dv\int_1^2 \frac{1}{3u}du=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{1}{u}du=\frac{1}{3}\ln 2$.

练习：(1) 求曲线 $(\underbrace{x-y+3}_{u})^2+(\underbrace{3x+2y-1}_{v})^2=81$ 所围区域的面积.

(2) 求由抛物线 $y^2=ax$, $y^2=bx$ $(0<a<b)$ 与双曲线 $xy=\alpha$, $xy=\beta$ $(0<\alpha<\beta)$ 所围区域的面积.

$u=x-y+3$ $v=3x+2y-1$.

则 $J(x,y)=$

$J(u,v)=$

$\therefore S$ $u^2+v^2=81$.

$u=\rho\sin\theta$ $v=\rho\cos\theta$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi}d\theta\int$

(3)* 三维小结形

$x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$, $(u,v,w)\in D$

则体积微元

$$dv=dx\,dy\,dz=|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

其中 $|J(u,v,w)|=\left|\begin{vmatrix}\partial_u x & \partial_v x & \partial_w x\\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y\\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z\end{vmatrix}\right|$

注：若表达式由 $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$, $w=w(x,y,z)$ 给出，令

$|J(x,y,z)|=\left|\begin{vmatrix}\partial_x u & \partial_y u & \partial_z u\\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v\\ \partial_x w & \partial_y w & \partial_z w\end{vmatrix}\right|$. 则 $|J(x,y,z)|\cdot|J(u,v,w)|=1$.

§3. 定积分与变限定积分.

注：对于定积分计算，要坚持两个原则：①处理复杂项；②合并简化。同时，能够利用基本公式写出积分项。

例13. 计算 $I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

分析：此题中根号比较麻烦，故要想办法去根号，从而

$$I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\xlongequal[\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]]{x=a\sin\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underline{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2\theta))\,d\theta=\frac{a^2\pi}{4}$$

例14. 计算 $I=\int_0^1\sin\sqrt{x}\,dx$

分析：此题中 $\sqrt{x}$ 比较烦，故可令 $t=\sqrt{x}$，从而

$$I=\int_0^1\sin\sqrt{x}\,dx$$

$$\xlongequal[x=t^2]{t=\sqrt{x}}\int_0^1\sin t\cdot 2t\,dt$$

$$=-\int_0^1 2t\,d\cos t=-2t\cos t\Big|_0^1+2\int_0^1\cos t\,dt$$

$$=-2\cos 1+2\sin 1=2(\sin 1-\cos 1).$$

例15. $I=\int_1^e \sin(\ln x)\,dx$

分析：此题中 $\ln x$ 比较麻烦，故令 $t=\ln x$，从而

$$I=\int_1^e \sin(\ln x)\,dx$$

$$\overset{t=\ln x}{\underset{x=e^t}{=\!=}}\int_0^1 \sin t\cdot e^t\,dt \quad \text{（需要用循环积分）}$$

$$=\int_0^1 \sin t\,de^t = e^t\sin t\Big|_0^1-\int_0^1 \cos t\,e^t\,dt$$

$$=e\sin 1-\int_0^1 \cos t\,de^t$$

$$=e\sin 1-e^t\cos t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\sin t\,dt$$

$$=e\sin 1-e\cos 1+1-I.$$

故而 $I=\frac{1}{2}(1+e\sin 1-e\cos 1)$

练习：(17) 计算下列积分

(i) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$； (ii) $\int_1^2 x\ln\sqrt{x}\,dx$； (iii) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^2 x}\,dx$；

(iv) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x+(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$； (v) $\int_0^1 x\arctan x\,dx$； (vi) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$.

注：关于变上限或变下限定积分，要会求对积分变量的导数.

Ⅱ. 曲线、曲面积分理论

知识点:

1. 二维空间中,

$$
\begin{tikzcd}
\text{定积分} & \text{第一型曲线积分} \arrow[l, "\text{参数方程}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{微元关系}"] & \\
& \text{第二型曲线积分} \arrow[ul, "\text{参数方程}"] \arrow[r, "\text{格林公式}"] & \text{二重积分}
\end{tikzcd}
$$

2. 三维空间中

$$
\begin{tikzcd}
\text{定积分} & \text{第一型曲线积分} \arrow[l, "\text{参数方程}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{微元关系}"] & \text{第一型曲面积分} \arrow[r, "\text{参数方程}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{微元关系}"] & \text{二重积分} \\
& \text{第二型曲线积分} \arrow[ul, "\text{参数方程}"] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{斯托克斯公式}"] & \text{第二型曲面积分} \arrow[ur, "\text{参数方程}"] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{高斯公式}"'] & \text{三重积分}
\end{tikzcd}
$$

3. 核心：弄清各种微元之间的换算关系.

§1. 曲线、曲面微分学.

1. 二维曲线的表示:

$$\gamma(t)=(x(t),y(t)),\quad t\in[a,b]$$

三维曲线的表示: $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[a,b]$.

2. 曲线在 $t=t_0$ 处的切线方向. $l(t_0)$

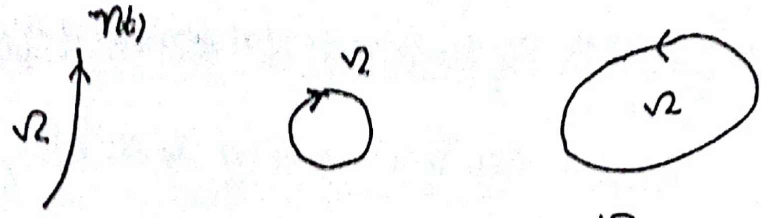
对于二维情形: $l(t_0)=\gamma'(t_0)=(x'(t_0), y'(t_0))$

对于三维情形: $l(t_0)=\gamma'(t_0)=(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

3. 二维区域的边界.

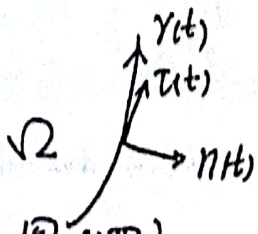
① 定侧(定向): 沿曲线的正向, 区域在曲线的左侧.

例:



图(一). 图(二). 图(三)

② 外法向与定向切线方向的关系.



图(四)

其中 $n(t)$ 为二维区域 Ω 的边界的外法向, $n(t)\triangleq(n_1(t), n_2(t))$,

则: 定向切线的切线方向 $\gamma'(t)\triangleq\tau(t)=(\tau_1(t), \tau_2(t))$ 与 $(-n_2(t), n_1(t))$ 同向.

4. 三维空间曲面一般表示式 $F(x,y,z)=0$，其对应法向量为

$\pm(\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F)$（注意判别方向）。

三维空间曲面参数方程表示式

$$\gamma(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)),\quad (u,v)\in D.$$

则 u 参数曲线的切线方向：（v 视为固定参数）

$$\gamma_u(u,v)=(\partial_u x(u,v),\ \partial_u y(u,v),\ \partial_u z(u,v))$$

v 参数曲线的切线方向：（u 视为固定参数）

$$\gamma_v(u,v)=(\partial_v x(u,v),\ \partial_v y(u,v),\ \partial_v z(u,v))$$

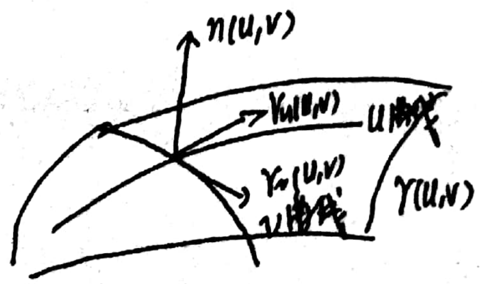
从而曲面对应的法向量为：

$$n(u,v)=\pm\gamma_u(u,v)\times\gamma_v(u,v)$$

$$=\pm\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

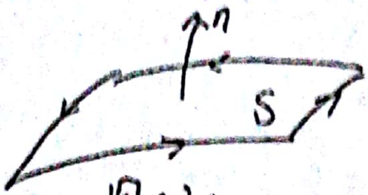
$$=\pm(\partial_u y\,\partial_v z-\partial_u z\,\partial_v y,\ \partial_u z\,\partial_v x-\partial_u x\,\partial_v z,\ \partial_u x\,\partial_v y-\partial_u y\,\partial_v x)$$

（注意判别方向）



图（五）

5. 定侧曲面的边界的定向.



图(六)

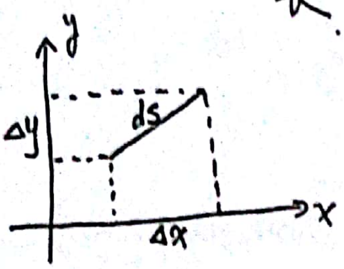
如图(六),n指向一侧为S的定侧,则利用右手系,四指沿曲面边界的正向时,大拇指指向定侧.

一类曲面. $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

$$\int_c f(x,y)\,ds=\int_a^b(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

§2. 微元法.

1. 二维曲线的~~弧度~~长微元dl. $(\gamma(t)=(x(t),y(t)))$



图(七)

$$ds=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,|dt| \qquad (0)$$

若参数增加方向与曲线定向相同,则$|dt|=dt$, $ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$.

二类曲面

此时

$$(dx,dy)=(x'(t),y'(t))\,dt$$

$$=\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}},\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}\right)ds$$

$$\triangleq T(t)\,ds=(-n_2(t),n_1(t))\,ds \quad (图(四)) \quad (1)$$

其中$(n_1(t),n_2(t))$为相应区域的单位外法向量.

三维曲线的长度微元 dl ($r(t)=(x(t),y(t),z(t))$)

$$dl=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

$$=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,|dt|$$

若参数增加方向与曲线定向相同，则 $|dt|=dt$,

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

此时

$$(dx,dy,dz)=(x'(t),y'(t),z'(t))\,dt$$

$$=\frac{(x'(t),y'(t),z'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}}\,dl \qquad (2)$$

2. 三维空间中曲面面积微元 ds ($r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$)

设曲面 S 上单位法向量 $n=(n_1,n_2,n_3)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则:

$$(|dydz|,|dzdx|,|dxdy|)=(|\cos\alpha|,|\cos\beta|,|\cos\gamma|)\,ds$$

同时，

$$|dydz|=\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|dudv,\quad |dzdx|=\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|dudv,\quad |dxdy|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$\triangleq|A|\,dudv \qquad \triangleq|B|\,dudv \qquad \triangleq|C|\,dudv$$

$$\iint f(x,y,z)\,ds=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x'^2+g_y'^2}\,dxdy$$

$$=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

且

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm(A,B,C)/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

从而

$$dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv \qquad (3)$$

另一方面，记 $E=r_u'\cdot r_u'$，$F=r_u'\cdot r_v'$，$G=r_v'\cdot r_v'$，则：

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2$$

注：

$$\begin{aligned}A^2+B^2+C^2&=|r_u'\times r_v'|^2\\&=|r_u'|^2\cdot|r_v'|^2\cdot\sin^2\langle r_u',r_v'\rangle\\&=|r_u'|^2\cdot|r_v'|^2\left(1-\cos^2\langle r_u',r_v'\rangle\right)\\&=|r_u'|^2\cdot|r_v'|^2\left(1-\left(\frac{r_u\cdot r_v}{|r_u|\cdot|r_v|}\right)^2\right)\\&=EG-F^2\end{aligned}$$

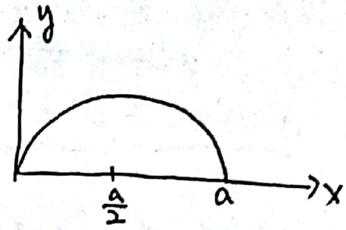
注：若 n 为 S 上指定一侧的单位法向量，$n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，在第二型曲面积分计算中可利用如下公式

$$(dydz,\ dzdx,\ dxdy)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\,dS \qquad (4)$$

（见课本149页公式），其中 $dydz$、$dzdx$、$dxdy$ 为有向面积元.

§3. 曲线积分与格林公式

例1. 计算 $I=\int_L \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,ds$, 其中 L 为上半圆弧 $x^2+y^2=ax$, $y\geq 0$.



分析: 由被积函数的形式, 需要用极坐标参数形式, 从而

令 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则圆弧的极坐标参数方程形式:

$$\rho=a\cos\theta \quad \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

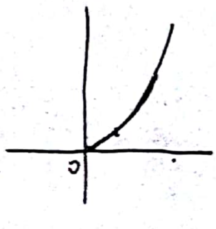
$\Rightarrow$ $x=a\cos^2\theta$, $y=a\sin\theta\cos\theta$

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2(2\theta)+a^2\cos^2(2\theta)}\,d\theta, \quad \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right). \quad (公式(0))$$

从而 $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}\cdot a\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta = a^2.$$

例2. 计算 $I=\int_C\sqrt{y}\,ds$, 其中 C 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧 (2014.4.26)



分析: 曲线利用 x 为参数, 曲线方程 $y=y(x)$, 则

$$ds=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \quad (0\le x\le 2) \quad (公式(0))$$

$$ds=\sqrt{1+y}$$

$$I=\int_C \sqrt{y}\,ds \qquad y=x^2$$

$$=\int_0 \sqrt{y}\,ds \qquad x$$

小命 $I=\int_0^2 x\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx$

$ds=\sqrt{1+(y'(x))^2}=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+4x^2}\,dx^2$$

$=\sqrt{1+}$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 \qquad \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{12}\left[17^{\frac{3}{2}}-1\right]$$

习题：(1) 计算 $I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 Γ 为螺旋线 $x=\cos t, y=\sin t,$
$z=t$ 上相应于 t 从 0 到 2π 的一段弧.

(2). 计算 $I=\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中 Γ 为曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t,$
$z=e^t\ (0\le t\le 2)$.

例3. 计算曲线积分 $I=\int_L (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$，其中积分曲线 L 是从 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的螺线：$x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=h\varphi/2\pi$.

分析：① 本题直接给出了曲线的参数方程，且被积表达式形式简单，因此可直接化为定积分.

$$I=\int_0^{2\pi}\left\{\left[a^2\cos^2\varphi-\frac{a}{2\pi}h\varphi\sin\varphi\right]\cdot(-a\sin\varphi)+\left[a^2\sin^2\varphi-a\cos\varphi\cdot h\varphi/2\pi\right](a\cos\varphi)\right.$$

$$\left.+\left[h^2\varphi^2/4\pi^2-a^2\sin\varphi\cos\varphi\right]\cdot h/2\pi\right\}d\varphi$$ —— 化成了复杂的定积分

② 另一方面，被积表达式有形式

$$(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=d\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}-xyz\right)$$

因此，被积表达式为全微分形式 从而

$$I=\int_L d\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}-xyz\right)$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}-xyz\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}$$

$$=\frac{a^3}{3}+\frac{h^3}{3}$$

例4. 计算曲线积分 $I=\int_\Gamma 2y\,dx+x\,dy+e^z dz$，其中 Γ 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y=1\end{cases}$

从y轴正向看去是顺时针方向.

$\frac{\partial Q}{\partial x}$

分析：① 求曲线参数方程

$$(y-1)^2+y^2+z^2=1$$

$$\Rightarrow 2y^2-2y+z^2=0$$

$$\Rightarrow (y-\tfrac{1}{2})^2+\frac{z^2}{2}=\frac{1}{4}$$

从而参数方程：$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta$，$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$，$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$，$\theta\in[2\pi,0]$

从而

$$I=-\int_0^{2\pi}\left[(1+\cos\theta)\frac{1}{2}\sin\theta+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right)+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right]d\theta$$

$= \cdots$（形式复杂）

$$I=\int_L \underline{y\,dx}+\underline{y\,dx+x\,dy+e^z\,dz}$$

④同时，注意到

$$\underline{y\,dx+x\,dy+e^z\,dz}=\underline{d(xy+e^z)}$$

因此，由于L为封闭曲线，$\int_L y\,dx+x\,dy+e^z\,dz=0$

从而

$$I=-\int_0^{2\pi}\underline{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)}\cdot\underline{\frac{1}{2}\sin\theta}\,d\theta\quad\left(=\int_L y\,dx\right)$$

$=0.$ $\qquad I=$

注：若 u 在曲线 Γ 上连续，则

$$\int_\Gamma du=u(\text{终点值})-u(\text{起点值})\qquad(5)$$

（即斯托克斯公式）

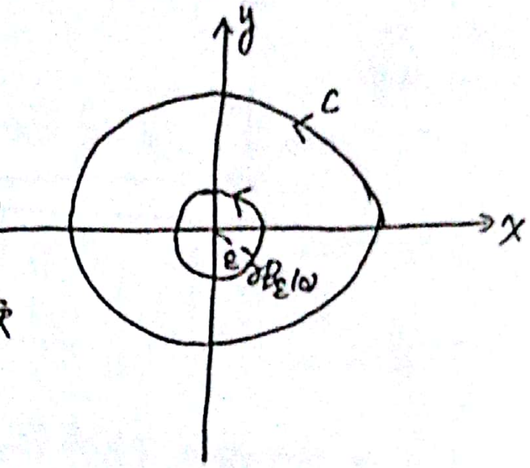
注：很多情形下，第一型或第二型曲线积分都可以化成定积分进行计算，需要根据曲线的形式及被积表达式形式选择合适的方法。

注：对于二维曲线积分，有时可结合格林公式选择相较办法.

例5. 计 $I=\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中C为椭圆周 $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$，积分按逆时针方向进行.

分析：① 根据被积函数及曲线形式，利用参数方程进行计算不太有利. 此时 令 $P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \quad ((x,y)\neq(0,0))$$



故取 $\partial B_\varepsilon(0)=\{(x,y): x^2+y^2=\varepsilon^2\}$ $(0<\varepsilon<1)$

取逆时针方向.（此处取此曲线依赖于被积函数形式），从而

$$I=\int_{C-\partial B_\varepsilon(0)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=0\,(\text{格林公式})+\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^2[\cos^2\theta+\sin^2\theta]\,d\theta}{\varepsilon^2}$$

$$=2\pi.$$

② 错误解法.

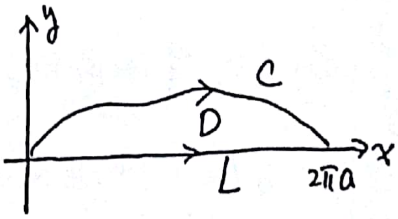
$$I=\int_C d\arctan\frac{y}{x}$$

从而应该可利用公式(5),得 $I=0$.

其错误原因在于 $\arctan\frac{y}{x}$ 在 D 上不连续.

例6. $I=\int_C \overbrace{((x+y+1)e^x-e^y+y)}^{P}dx+\underbrace{\overbrace{(e^x-(x+y+1)e^y-x)}^{Q}dy}_{x}$, 其中C是旋轮线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$ 的一拱.

分析: 记 $I=\int_C p(x,y)dx+q(x,y)dy$.



则 $\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=-2$.

从而可补曲线 L: 从 $(0,0)$ 到 $(2\pi a,0)$ 的有向线段, 故

$$I=\int_{C-L}p(x,y)dx+q(x,y)dy+\int_L p(x,0)dx$$

$$=-\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy+\int_0^{2\pi a}[(1+x)e^x-1]dx$$

$$=2\int_0^{2\pi a}y\,dx+e^{2\pi a}-1+xe^x\Big|_0^{2\pi a}-[e^{2\pi a}-1]-2\pi a$$

$$=2\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt+2\pi a(e^{2\pi a}-1)$$

$$=6\pi a^2+2\pi a(e^{2\pi a}-1)$$

习题：(3) 计算 $I=\int_L (y+\frac{e^y}{x})dx+e^y\ln x dy$，L是半圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ $(x\geq1)$ 上从点 (1,0) 到点 (2,1) 的一段弧。

(4) 计算 $I=\oint_L \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}dx+\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}dy$，其中 L为圆周 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 在第一象限所围区域的正向边界。

$$\iint_S Pdxd.$$

§4. 曲面积分与高斯公式.

例7. 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma \frac{ds}{z}$，其中 Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ $(0<h<a)$ 截出的顶部

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

分析：① 曲面方程得单位外法向

$$n=\frac{1}{a}(x,y,z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

从而 $\frac{z}{a}ds=dxdy$

则 $ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

② 曲面方程可写为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

单位外法向量 $n=\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},1\right)$

单位化，得：$n=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a}\right)$

从而

$$dS = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$x^2+y^2+z^2=a^2$

$z=h$

$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

故

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2-h^2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2-h^2} \frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{a\rho}{a^2-\rho^2}d\rho$$

$$= a\pi\cdot(-\ln(a^2-\rho^2))\Big|_0^{\sqrt{a^2-h^2}}$$

$$= a\pi(\ln a^2 - \ln h^2)$$

$$= 2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

$I = \iint\limits_S x^2 dS$

$S: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

例8 求 $\iint\limits_S x^2 dS$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

分析：在 S 上，x, y 具有对称性，故

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$$

由例7的分析，$dS = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$

从而 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho$$

$$=\pi\int_0^1\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho^2$$

$$=\pi\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$$

$$\overset{t=\sqrt{1-x}}{=}\pi\int_0^1\frac{(1-t^2)}{t}2t\cdot dt$$

$$=2\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi.$$

习题：(5) $\iint\limits_S(x+y+z)dS$，其中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geq 0$

(6) $\iint\limits_S\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}dS$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

例 9. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma xyz\,dxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0$，$y\geq 0$ 的部分.

分析：Σ 可分为 Σ_1：Σ 上 $z\geq 0$ 部分及 Σ_2：Σ 上 $z\leq 0$ 部分.

从而 Σ_1 及 Σ_2 均可投影到 x,y 平面区域 $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$

故

$$I=\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxy-\iint_D xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy$$

$$=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \rho^3\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho$$

$$=\int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{15}$$

例10. 计算 $I=\iint_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$.

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

分析：首先简化形式

$$I=\frac{1}{R^3}\iint_S (x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy)$$

球面S外侧的单位法向量为

$$n=\frac{1}{R}(x,y,z)$$

故 $$I=\frac{1}{R^3}\iint_S \frac{1}{R}(x^2+y^2+z^2)\,ds$$

$$=\frac{1}{R^2}\iint_S ds$$

$$=4\pi.$$

例11. 计算 $I=\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中S为球面

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

分析：此题被积函数为多次式形式，可选用常规办法.

S上外侧的单位向量为

$$n=\frac{1}{R}(x-a,\ y-b,\ z-c)$$

从而 $$I=\frac{1}{R}\iint_S [x^2(x-a)+y^2(y-b)+z^2(z-c)]\,ds$$

此题中，利用对称性.

$$\iint_S (x-a)^3 ds = \iint_S (y-b)^3 ds = \iint_S (z-c)^3 ds = 0$$

$$\iint_S (x-a)^2 ds = \iint_S (y-b)^2 ds = \iint_S (z-c)^2 ds$$

$$\iint_S (x-a) ds = \iint_S (y-b) ds = \iint_S (z-c) ds = 0$$

$$\therefore I = \frac{1}{R}\iint_S [\underline{(x-a+a)^2(x-a)} + \underline{(y-b+b)^2(y-b)} + \underline{(z-c+c)^2(z-c)}] ds$$

$$= \frac{2}{R}\iint_S [a(x-a)^2 + b(y-b)^2 + c(z-c)^2] ds$$

$$= \frac{2}{R} \times \frac{a+b+c}{3} \times \iint_S [(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2] ds$$

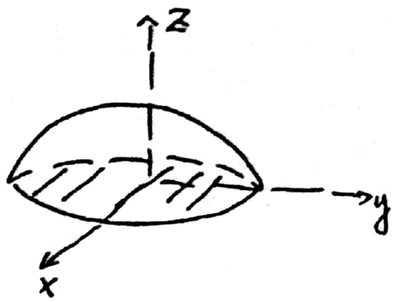
$$= \frac{2}{R} \times \frac{a+b+c}{3} \times R^2 \iint_S ds = \underline{\frac{8(a+b+c)}{3}\pi R^3}.$$

例12. 计算曲面积分 $I = \iint_\Sigma x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$，其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

分析：此题中，设 $p(x,y,z)=x$，$q(x,y,z)=y$，$r(x,y,z)=z$，则

$$\partial_x p + \partial_y q + \partial_z r = 3$$

故可尝试用高斯公式



记 $\Sigma_1=\{(x,y,z): x^2+y^2\le a^2, z=0\}$ 下侧.

则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

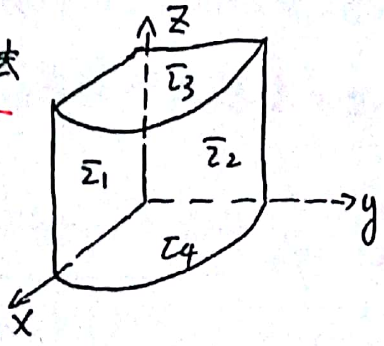
$$=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le a^2\\ z\ge 0}} 3\,dv=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\pi a^3=2\pi a^3$$

习题: (17) 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} z^2dxdy$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的下半部分的下侧.

(18) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dzdx+zdxdy$, Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上满足 $x\ge 0$, $z\le 1$ 的那一部分下侧.

(19) $\iint\limits_{\Sigma} e^y dydz+ye^x dzdx+x^2y\,dxdy$, 其中 Σ 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x=0, x=1, y=0, y=1$ 所截的有限部分的上侧.

例13. 计算 $I=\iint\limits_{S} z\,dxdy+x\,dydz+y\,dzdx$，其中S是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=2$ 所截得的第一卦限内的部分的前侧.



分析：① 曲面上对应侧单位法向量 $n=(x,y,0)$

从而

$$I=\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\,ds$$

$$=\iint\limits_{S}ds=\frac{\pi}{2}\times 2=\pi.$$

② 如图，Σ_1 取左侧，Σ_2 取后侧，Σ_3 取上侧，Σ_4 取下侧.

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4} z\,dxdy+x\,dydz+y\,dzdx$$

$$-\underbrace{\iint\limits_{\Sigma_1}\cdots}_{=0}-\underbrace{\iint\limits_{\Sigma_2}}_{=0}-\iint\limits_{\Sigma_3}-\underbrace{\iint\limits_{\Sigma_4}\cdots}_{=0}$$

$$=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1,\,x\ge 0,\,y\ge 0\\ 0\le z\le 2}}3\,dV-2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1,\,x\ge 0,\,y\ge 0}dxdy$$

$$=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi.$$

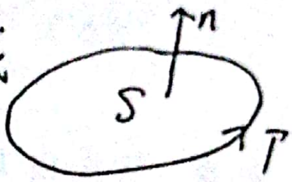
§5. 斯托克斯公式

注：一般情况下不用 Stokes 公式把第二型曲线积分化成对坐曲面上的第二型曲面积分，除非运用公式后的被积函数在较简单曲面上有较好的形式。

公式：$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$

$$=\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

其中 Γ 的正向与 n 对应侧外法向成右手系，Γ 为曲面 S 的边界。



注：斯托克斯重要用途之一就是给出积分与路径无关条件。

若 $du=Pdx+Qdy+Rdz$，则

$$\int_L du = u(\text{终点})-u(\text{起点})$$

例14. 计算 $I=\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 C 是椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0, h>0)$，若从 Ox 轴的正向看去，此椭圆是依逆时针方向进行。

分析：① 参数方程办法.

$$x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\quad z=h(1-\cos\theta),\quad \theta\in[0,2\pi].$$

从而

$$I=\int_0^{2\pi}\Big[(a\sin\theta-h(1-\cos\theta))(-a\sin\theta)$$
$$+(h(1-\cos\theta)-a\cos\theta)\,a\cos\theta$$
$$+a(\cos\theta-\sin\theta)\cdot h\sin\theta\Big]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big[-a^2\sin^2\theta+ha\sin\theta-ah\sin\theta\cos\theta$$
$$+ah\cos\theta-ha\cos^2\theta-a^2\cos^2\theta$$
$$+ah\sin\theta\cos\theta-ah\sin^2\theta\Big]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big[-a^2\sin^2\theta-ha-a^2\cos^2\theta\Big]d\theta$$

$$=\cancel{-a^2\pi-2\pi ha-ha^2\pi}\ -2\pi a(h+a)$$

② 见课本P163，利用Stokes公式计算.

例15. 见例4.

例16. 设函数$f(x),g(x)$连续可微，$f(0)=g(0)=0$，使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}((x^2-f(x))y+\tfrac{1}{2}g(x)y^2)dx+(f(x)y-g(x))dy+dz.$$

与路径无关，求出$f(x)$, $g(x)$，并求该曲线积分的值.

分析：利用Stokes公式，知.

$$x^2-f(x)+g(x)y=f'(x)y-g'(x)$$

从而 $f'(x)=g(x)$， $g'(x)=f(x)-x^2$， $f(0)=g(0)$

$$\Rightarrow f''(x)-f(x)=-x^2,\ f(0)=f'(0)=0$$

$$\therefore f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+x^2+2.$$

$$f(0)=C_1+C_2+2=0 \qquad f'(0)=C_1-C_2\ \cancel{}=0$$

$$\therefore C_1=-1,\ C_2=1$$

$$\therefore f(x)=e^x+e^{-x}+x^2+2,\quad g(x)=e^x-e^{-x}+2x.$$

习题：(10). 计算 $I=\oint_\Gamma xy\,dx+yz\,dy+zx\,dz$，$\Gamma$是以点$(1,0,0)$, $(0,3,0)$ $(0,0,3)$为顶点的三角形的周界，从z轴的正向看去，Γ取逆时针方向.

(11) 计算 $I=\oint_\Gamma z^2dx+x^2dy+y^2dz$，$\Gamma$是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 位于第一卦限那部分的边界线，从z轴的正向看去，Γ取逆时针方向.

三. 级数

§1. 常数项级数

重点：正项级数的比较判别法、比值判别法(根) lim 及对应的极限形式；

交错级数的莱布尼次定理；会判定绝对收敛与条件收敛.

大收敛 → 小收敛

小发散 → 大发散

例1. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的.

证明：由于 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\Big/\frac{1}{n}=1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

故由比较判别法极限形式知，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

例2. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的收敛性.

证明：由于 $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n}=1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

例3. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ 的收敛性.

1. 大收敛 → 小收敛

小发散 → 大发散

2. $\frac{1}{n^p}$ $p>1$ 收敛

$p\le 1$ 发散

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

4. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

$\rho<1$ 收敛

$\rho>1$ 发散

5. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 有相同敛散性

微积分期中试卷　2020.05.10

姓名___________ 系科、年级___________ 学号___________

1. (6分) 如果你学号的最后三位除以3的余数是r，就做本题的第$(1+0)$题！

(1)讨论$f(x,y)$在$(0,0)$的连续性、可偏导性与可微性。

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt[3]{xy}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad(1)$$

连续：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt[3]{xy}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$　可偏导：$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta y\to0}=0$

可微：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{w}{\rho}=\frac{\sqrt[3]{xy}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt[3]{xy}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=+\infty$ 不可微.

(2)讨论$f(x,y)$在$(0,0)$的连续性、可偏导性与可微性。

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin x+\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad(2)$$

连续：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin x+\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin x+\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}=0$　$0\times$有界量

可偏导：$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2\sin(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta x\sin\Delta x=0=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

可微：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{w}{\rho}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin x+y^2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$,　可微.

(3)讨论$f(x,y)$在$(0,0)$的连续性、可偏导性与可微性。

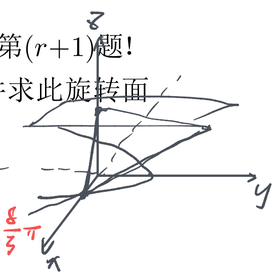
$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad(3)$$

连续：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$.

可偏导：$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left.\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right|_{(0,0)}=0=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\cdots=0$

可微　$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{w}{\rho}=\frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$.

2. (6分)　如果你学号的最后三位除以4的余数是r，就做本题的第$(r+1)$题！



(1)求曲线$y=1-x^2, z=0$绕y轴旋转一周的旋转曲面的方程,并求此旋转面与平面$y=0, y=0.5$所围立体的体积。

$x=\rho\cos\theta$　$z=\rho\sin\theta$.
$y=1-\rho^2$.

$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0\Rightarrow y=1-x^2-z^2$.

$V=\iiint\limits_{\Omega_1}dxdydz-\iiint\limits_{\Omega_2}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho^2}dy-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\rho d\rho\int_{\frac12}^{1-\rho^2}dy=\frac{8}{3}\pi$

（2）直线$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$绕$z$轴旋转一周的旋转曲面的方程。

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$为直线L上一点. $x_0=1$. $P_0(1,y_0,z_0)$.

L绕z轴旋转　$z=z_0$保持不变　$d_{P-z}=r^2=1+y_0^2=x^2+y^2$.

又$y_0=z_0$.　故$r^2=x^2+y^2=1+y_0^2=1+z_0^2=1+z^2$.　故$T$: $x^2+y^2-z^2=1$

（3）求以曲线$\Gamma: x^2-y^2=z$, $x+y+z=0$为准线，母线垂直于Γ所在平面的柱面方程。

① ②

$x+y+z=0$ 法向量 $\vec n=(1,1,1)$. 为柱面准线方向向量.

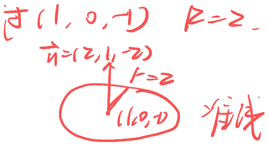
$M(x,y,z)$为准线上一点. 过该点母线: $\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}$　即 $X-x=Y-y=Z-z$

与 $\begin{cases}z=x^2-y^2\\x+y+z=0\end{cases}$　消去x,y,z，有　$10(z+2x)=25y^2+(z+2x)^2$为柱面.

（4）求以直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$为对称轴，半径等于2的圆柱面方程。

$(2y+z+1)^2+4(x+z)^2+(x-2y-1)^2=36$.

准线：过$(1,0,-1)$　$R=2$.



柱面上一点 (x,y,z)

对称轴上一点 $M_0(1,0,-1)$.

$\overrightarrow{M_0M}=(x-1,y,z+1)$.

$\vec n=(2,1,-2)$

$r=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec n|}{\vec n}\Rightarrow$ 什么.

3. (6分) 如果你学号的最后二位除以2的余数是r，就做本题的第$(r+1)$题！

(1)设f可微，$z=f(xy,x^2-y^2)$，求$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+2xf_2'$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-2yf_{12}'')+2x^2f_{21}''-4xyf_{22}''$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-2yf_2'$　　$=f_1'+xyf_{11}''+(2x^2-2y^2)f_{12}''-4xyf_{22}''$.

$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=y^2f_1'+2xyf_2'+x^2f_1'-2xyf_2'=(x^2+y^2)f_1'$

(2)设f可导，$z=x^3f(\frac{y}{x^2},x^2+y^2)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2f-2yf_1'+2x^4f_2'$

$\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=3x^2\left(\frac{1}{x^2}f_1'+2yf_2'\right)-2f_1'-2y\left(\frac{1}{x^2}f_{11}''+2yf_{12}''\right)+2x^4\left(\frac{1}{x^2}f_{21}''+2yf_{22}''\right)$

$=f_1'+6x^2yf_2'-\frac{2y}{x^2}f_{11}''+(2x^2-4y^2)f_{12}''+4x^4yf_{22}''$

4.(6分)如果你学号的最后三位除以4的余数是r，就做本题的第$(4-r)$题！

(1) 设$z=z(x,y)$由方程$F(x-\frac{z}{y},y-\frac{z}{x})=0$所确定，这里$F$可微，计算$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z$，并说明此式与$z$无关。

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+\cancel{\frac{z f_2'}{x^2}}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}f_1'+f_2'$

$xf_1'+\frac{z}{x}F_2'+\frac{z}{y}f_1'+yF_2'-z.$

$F_1'\left(1-\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+(-F_2')\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x-z}{x^2}\right)=0$

$\frac{F_1'}{y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{F_2'}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=F_1'-\frac{z}{x^2}F_2'$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'+\frac{z}{x^2}F_2'}{\frac{F_1'}{y}+\frac{F_2'}{x}}$ 同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{z}{y^2}F_1'+F_2'}{\frac{F_1'}{y}+\frac{F_2'}{x}}$

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=\frac{xF_1'+\cancel{\frac{z}{x}F_2'}+\cancel{\frac{z}{y}F_1'}+yF_2'}{\frac{F_1'}{y}+\frac{F_2'}{x}}\cancel{-\frac{zF_1'}{y}}\cancel{-\frac{zF_2'}{x}}$ 与z无关

(2)设$z=z(x,y)$由方程$x-z=ye^x$所确定，计算$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$1-\frac{\partial z}{\partial x}=ye^x$ $\quad\frac{\partial z}{\partial x}=1-ye^x.$

$-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x$ $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^x$

(3)设$f(x,x-y,x-y-z)=0$，f可微，求dz

$0=f_1'+f_2'+f_3'\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'+f_2'+f_3'}{f_3'}$

$0=-f_2'-f_3'\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_2'+f_3'}{f_3'}.$

$dz=\cdots$

(4)设$x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$，$f$可微，求$dz$

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=yf'\left(\frac{z}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}$

$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{z}{y}\right)+f'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-f(\frac{z}{y})+\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y})}{\frac{f'(\frac{z}{y})}{y}-2z}$

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$

5.(6分) f连续可导，$z(x,y)=\int_0^y e^y f(x-t)dt$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

令 $x-t=u$ $\quad t=x-u.$ $\quad z(x,y)=e^y-\int_{\boxed{x}}^{\boxed{x-y}}f(u)du$

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^y\left(f(x)-f(x-y)\right)$

$\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=e^y\left(f(x)-f(x-y)+f'(x-y)\right).$

6. (6分)如果你学号的最后三位除以3的余数是r，就做本题的第$(3-r)$题！

(1)由$u=\frac{x-z}{y-z},ze^z=xe^x+ye^y$确定$u$是$x,y$的函数，求$du$ $\quad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(1-\frac{\partial z}{\partial x})(y-z)+\frac{\partial z}{\partial x}(x-z)}{(y-z)^2}$ $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial z}{\partial y}(y-z)-(1-\frac{\partial z}{\partial y})(x-z)}{(y-z)^2}$

$(z+1)e^z\frac{\partial z}{\partial x}=(x+1)e^x.$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}.$ $\quad$代入$\Rightarrow$.

(2)设$x+y+z=0,x^2+y^2+z^2=1$，求$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$

$dx+dy+dz=0$

$xdx+ydy+zdz=0.$

$(x-z)dx+(y-z)dy=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-z}{y-z}$

$(x-y)dx+(z-y)dz=0$

$\frac{dz}{dx}=-\frac{x-y}{z-y}.$

(3)设$x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2,x+y+z=2$，求$\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz},\frac{d^2x}{dz^2},\frac{d^2y}{dz^2}$.

$2xdx+2ydy=zdz$

$dx+dy+dz=0$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{dz}=\frac{z+2y}{2x-2y}\\ \frac{dy}{dz}=\frac{z+2x}{2y-2x}\end{cases}$

$\frac{d^2x}{dz^2}=\frac{(2x-2y)-2\frac{dx}{dz}(z+2y)}{(2x-2y)^2}$ 代入

$\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{(2y-2x)-2\frac{dy}{dz}(z+2x)}{(2y-2x)^2}$ 代入.

7. (6分)如果你学号的最后三位除以4的余数是r，就做本题的第$(r+1)$题!

(1)求第二类曲线积分$\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$为包含单位圆周$x^2+y^2=1$在内的分段光滑单闭曲线，按照逆时针方向积分。取足够小的$\varepsilon>0$，使$C: x^2+y^2=\varepsilon^2$全部被$x^2+y^2=1$包围.

$P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ $Q(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\int_{C^-}=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy=\iint_D \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \frac{4\rho^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^4}\rho\,d\rho$

$\int_{C^+}=\int_{C^+}\frac{\varepsilon\cos\theta\, d\varepsilon\sin\theta-\varepsilon\sin\theta\, d\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}=\int_{C^+}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta=2\pi.$ $=2\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\, d\theta\int_0^1\frac{1}{\rho}d\rho=0.$ 故$\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_L+\int_{C^-}+\int_{C^+}=2\pi.$

（2）求第二类曲线积分$\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，按照逆时针方向积分。取$\varepsilon>0$充分小，使曲线$C: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=\varepsilon^2$及其所围区域完全包含在$L$区域内，$C$的方向取逆时针方向.

$P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ $Q(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

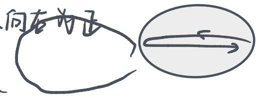
$\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\int_{C^-}=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\iint_D\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy=0$ 奇函数.

☆ $\int_{C^+}=\int_0^{2\pi}\frac{5\varepsilon\cos\theta\, d4\varepsilon\sin\theta-4\varepsilon\sin\theta\, d5\varepsilon\cos\theta}{(5\varepsilon\cos\theta)^2+(4\varepsilon\sin\theta)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{20}{25\cos^2\theta+16\sin^2\theta}d\theta=20\int_0^{2\pi}\frac{1}{16+9\cos^2\theta}d\theta$

(3)判断$\int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$是否与路径无关？当$C$为曲线$x=2\cos t, y=\sin t(0\le t\le 2\pi)$并沿着$t$增加的方向时，求该积分。

$P(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}$ $Q(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)-2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$ 故与路径无关. 不妨沿 $y=0$, $-2\le x\le 2$ 积分, 以向右为正



$\int_C=\int_{L^-}+\int_{L^+}=\int_2^{-2}\frac{1}{x}dx+\int_{-2}^{2}\frac{1}{x}dx=0$

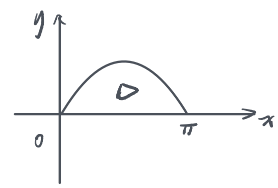
$\cos xy-xy\sin xy$

(4)Γ为$y=\sin x$上自点$(0,0)$到$(\pi,0)$的一段，求$\int_\Gamma(\frac{x}{1+x^2}+y\cos xy)dx+x(1+cosxy)dy$

$P(x,y)=\frac{x}{1+x^2}+y\cos xy$ $Q(x,y)=x(1+\cos xy)$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos xy-xy\sin xy$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos xy-xy\sin xy$

$\int_\Gamma=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\iint_D dxdy=\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}dy=\int_0^\pi\sin x\,dx=2$



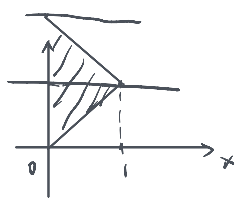
$x=2-y$
$y=2-x$

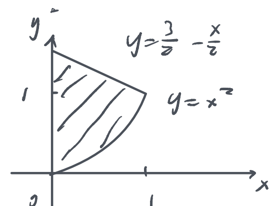
8. (6分)本题三选一

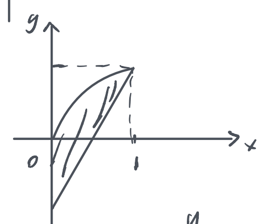
(1)交换积分次序$\int_0^1 dx\int_x^{2-x}f(x,y)dy$

(2)交换积分次序$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)dx$

（3）交换积分次序$\int_0^1 dx\int_{2x-1}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$



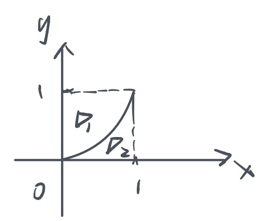


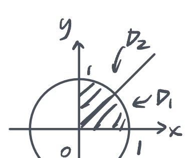


(1) $\int_1^2 dy\int_1^{2-y}f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dy$ (2) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\frac{3}{2}-\frac{x}{2}}f(x,y)dy.$

(3) $\int_{-1}^1 dy\int_{\frac{y}{2}+\frac{1}{2}}^{y^2}f(x,y)dx.$

9. (6分)如果你学号的最后三位除以3的余数是r，就做本题的第$(1+r)$题!





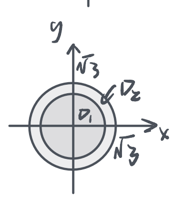
(1)$\int\int_D(|x-y|+2)dxdy$，$D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$

(2)$\int\int_D(|x^2+y^2-2|dxdy$，$D: x^2+y^2\le 3$

(3)$\int\int_D|y-x^2|dxdy$，$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$

(1) $\iint_D(|x-y|+2)dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta.]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_1}(\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+2)\rho\,d\rho\,d\theta+\iint_{D_2}(\rho\sin\theta-\rho\cos\theta+2)\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\rho^2(\cos\theta-\sin\theta)+2\rho\,d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho^2(\sin\theta-\cos\theta)+2\rho\,d\rho$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)+1\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(\sin\theta-\cos\theta)+1\,d\theta=$ $\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)+\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{3}(-\cos\theta-\sin\theta)+\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$



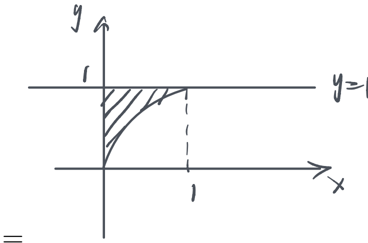
$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}+\frac{\pi}{2}$

(2) $\iint_D|x^2+y^2-2|dxdy=\iint_{D_1}2-(x^2+y^2)dxdy+\iint_{D_2}x^2+y^2-2\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta.]{x=\rho\cos\theta} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\rho\,d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(\rho^2-2)\rho\,d\rho$

$=2\pi(2-\frac{2}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}-3-\frac{2}{3}\sqrt{2}+2)=2\pi(1+\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2})$

(3) $\iint_D|y-x^2|dxdy=\iint_{D_1}y-x^2dxdy+\iint_{D_2}x^2-y\,dxdy=\int_0^1dx\int_{x^2}^1 y-x^2dy+\int_0^1dx\int_0^{x^2}x^2-y\,dy=\int_0^1\frac{1}{2}x^4-x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^4dx$

$\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x=\frac{1}{30}.$

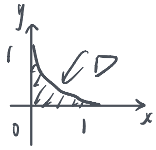


10. (6分)如果你学号的最后三位除以3的余数是r，就做本题的第$(3-r)$题!

(1) $\int\int_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$，$D: y^2=x, x=0, y=1$ $\quad x=\cos^4\theta \quad y=\sin^6\theta.$

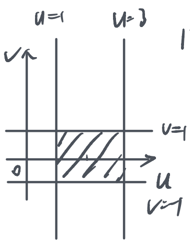
△(2)$\int\int_D\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}}dxdy$，其中$D$为$\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}=1$与坐标轴所围成的区域。

(3) $\int\int_D(x+y)^3(x-y)^2dxdy$，$D$是由$x+y=1, x+y=3, x-y=1, x-y=-1$所围成的区域。



(1) $\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1dy\int_{y^2}^{1} e^{\frac{x}{y}}dx=\int_0^1 ye^{\frac{1}{y}}-ye^{y}dy=-y^3e^{\frac{1}{y}}-(y-1)e^{y}\Big|_0^1=1-e$

(2) $\iint_D\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}}\,dxdy \xlongequal[y=\sin^6\theta]{x=\cos^4\theta} 24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin^6\theta\,d\theta$



(3) $\iint_D(x+y)^3(x-y)^2dxdy \xlongequal[x-y=v]{x+y=u} \iint_{D'}u^3v^2\cdot 2\,dudv=2\int_1^3u^3du\int_{-1}^1v^2dv=2\times\frac{2}{3}\times 20=\frac{80}{3}$

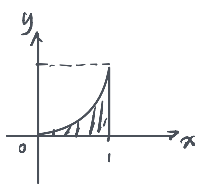
$J(u,v)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2$

11. (6分) 如果你学号的最后三位除以3的余数是r，就做本题的第$(1+r)$题!

(1) 计算$\int_0^1dx\int_0^{x^2}\frac{ye^y}{1-\sqrt{y}}dy$ $\qquad \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt$

(2)计算$\int_0^1xf(x)dx$，其中$f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$

(3)计算$\int\int_D(x+y)^2dxdy$，其中$D:(x^2+y^2)^2\le 2(x^2-y^2)$ $\qquad \frac{1}{2}y^2-e^y$



(1) $\int_0^1dx\int_0^{x^2}\frac{y-e^y}{1-\sqrt{y}}dy=\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^1\frac{y-e^y}{1-\sqrt{y}}dx=\int_0^1 y-e^ydy=(\frac{1}{2}-e)+1=\frac{3}{2}-e$

(2) $\int_0^1xf(x)dx=\int_0^1f(x)\,d\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2f(x)-\int_0^1\frac{1}{2}x^2f'(x)dx$

$=\frac{1}{2}x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot 2xe^{-x^4}dx$

$=\frac{1}{4}e-1$

$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$

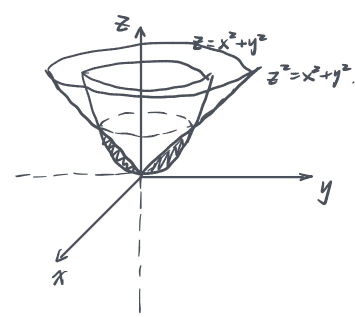
$\rho^4\le 2\rho^2\cos2\theta$

$\rho^2\le 2\cos2\theta$

(3) $\iint_D\rho^2(1+\sin2\theta)\rho\,d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2\cos2\theta}}\rho^3d\rho=\int_0^{2\pi}(1+\sin2\theta)\cos^22\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos^22\theta\,d\theta+\int_0^{2\pi}\sin2\theta\cos^22\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{\sin(4\theta)}{8}-\frac{\cos^3(2\theta)}{6}\Big|_0^{2\pi}=\pi$

$1+\sin2\theta$

$z=z^2$



12. (6分) 如果你学号的最后三位除以3的余数是r，就做本题的第$(3-r)$题!

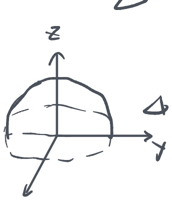
(1)$\int\int\int_\Omega\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}dV$，$\Omega: z=x^2+y^2$与$z^2=x^2+y^2$所围成区域。

(2)$\int\int\int_\Omega x\exp(\frac{1}{a^2}(x^2+y^2+z^2))dV$，$\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2, x\ge0, y\ge0, z\ge0$

(3)$\int\int\int_\Omega\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$，$\Omega:\pi^2\le x^2+y^2+z^2\le 4\pi^2$

(1) 令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z.$

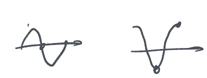
$\iiint_\Omega\frac{\ln(1+\rho)}{\rho^2}\rho\,d\rho d\theta dz=\int_0^1dz\iint\frac{\ln(1+\rho)}{\rho}d\rho d\theta=\boxed{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1d\rho\int_{\rho^2}^{\rho}\frac{\ln(1+\rho)}{\rho}dz=2\pi\int_0^1(1-\rho)\ln(1+\rho)d\rho=2\pi(2\ln2-\frac{5}{4})}$



(2) 令 $x=a\cos\theta\sin\varphi\quad y=a\sin\theta\sin\varphi\quad z=a\cos\varphi.$

$\iiint_\Omega x\exp(\frac{1}{a^2}(x^2+y^2+z^2))dV=\iiint_\Omega(r\cos\theta\sin\varphi)e^{\frac{r^2}{a^2}}\cdot r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^a r^3e^{\frac{r^2}{a^2}}dr=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^4}{2}=\frac{\pi}{8}a^4$

(3) 令 $x=r\cos\theta\sin\varphi\quad y=r\sin\theta\sin\varphi\quad z=r\cos\varphi\qquad \pi\le r\le2\pi.$



$\iiint_\Omega\frac{\cos r}{r}r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_{\pi}^{2\pi}r\cos r\,dr=4\pi(r\sin r+\cos r)\Big|_{\pi}^{2\pi}=8\pi$

$*$ 13. (6分) 三选一 $x^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}$ $\int_C z\,ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{a(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin\theta)}\,\frac{a}{2}\,d\theta$

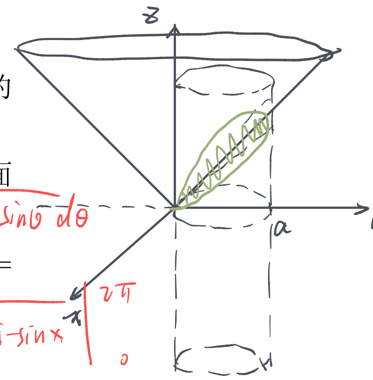
(1)求圆柱面$x^2+y^2=ay$介于$z=\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$与xy平面之间部分曲面的面积。

$2a^2$ $x=\frac{a}{2}\cos\theta$ $\sqrt{ay}$ $y=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin\theta$

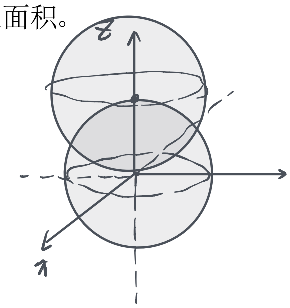
(2)求球面$x^2+y^2+z^2=R^2$位于球面$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$内部的部分曲面的面积（$0<R<2a$）。

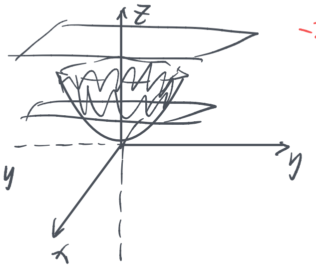
$\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta$

(3)设Ω是由曲线$y^2=2z,x=0$绕z轴旋转一周所生成的曲面与平面$z=2,z=8$所围成的区域，求Ω的表面积。



$-2\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin x}$





$\Rightarrow x^2+y^2=2z.$

14. (4分) 三选一

(1)求$f(x,y,z)=xy+yz+xz$在点$(1,1,1)$沿$\overrightarrow{l}=(1,3,1)$的方向导数

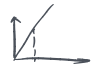
(2)求$z=x^2-y^2$在点$(1,1)$沿x轴正向成角$\alpha=\frac{\pi}{3}$方向上的方向导数 $\frac{1}{3}\ln(x^2+y^2)$.

(3)求$z=\ln\sqrt[3]{x^2+y^2}$在点$P(1,1)$沿$\overrightarrow{OP}$方向的方向导数。

(1) $\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}})$ $\frac{\partial f}{\partial x}=y+z$ $\frac{\partial f}{\partial y}=x+z$ $\frac{\partial f}{\partial z}=y+x.$

故 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{y+z}{\sqrt{11}}+\frac{3(x+z)}{\sqrt{11}}+\frac{y+x}{\sqrt{11}}$

(2) $\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$ $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$



故 $\frac{\partial z}{\partial l}=x-\sqrt{3}y$

(3) $\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{3x^2}=\frac{2}{3x}.$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3y}.$

$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\sqrt{2}}{3x}+\frac{\sqrt{2}}{3y}$

15.(6分) 曲面$\sum$方程为$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2,P_0(x_0,y_0,z_0)$为$\sum$上一点，求$\sum$在$P_0$处的切平面在各个坐标轴的截距之和。

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 有过 P_0 切平面的法向量 $\vec{n}=(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}})$.

$\pi_{切}$: $\frac{x-x_0}{\sqrt{x_0}}+\frac{y-y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{z-z_0}{\sqrt{z_0}}=0.$

截距 $(2\sqrt{x_0},2\sqrt{y_0},2\sqrt{z_0})$

$2\sqrt{x_0}+2\sqrt{y_0}+2\sqrt{z_0}=4.$ $\ln x_1+1$

16.(6分) 设有函数$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln x_i$，求在满足$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$下的最大值。

令 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=H(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-1\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln x_i+\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i-1)$

$$\begin{cases}F'_{x_1}=\ln x_1+1+\lambda\\F'_{x_2}=\ln x_2+1+\lambda\\\cdots\\F'_{x_n}=\ln x_n+1+\lambda\\F'_{\lambda}=\sum_{i=1}^{n}x_i-1\end{cases}$$

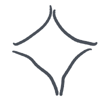
解得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}.$

函数H在有界闭区域上必有最大...

故解处取最大

故 $H_{max}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}=-\ln n.$

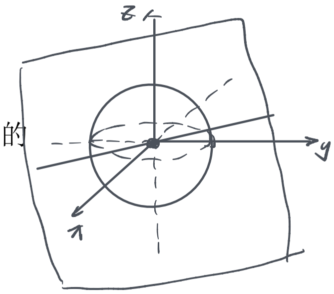
$x = \cos^3\theta \quad y=$



17. (6分) 二选一

(1)求$\int_L |y|^{\frac{2}{3}} ds$，其中$L$为星形线$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

(2)求$\int_L (xy+yz+xz) ds$，其中L为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线。



(1) 令 $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$. $\quad x' = -3\cos^2\theta\sin\theta \quad y' = 3\sin^2\theta\cos\theta$

$$\int_L |y|^{\frac{2}{3}} ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \sqrt{9\cos^4\theta\sin^2\theta + 9\sin^4\theta\cos^2\theta}\, d\theta = 12\int_0^1 \sin^3\theta \, d\sin\theta = 3$$

(2) $\oint_L (xy+yz+zx) ds = \frac{1}{2}\oint_L \left((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\right) ds = -\frac{1}{2}\oint_L ds = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi = -\pi.$

18. 附加题(10分)计算由曲线$y^2=a^2-2ax, y^2=b^2-2bx, y^2=m^2+2mx, y^2=n^2+2nx$所围成区域的面积（$y\geq 0, b>a>0, n>m>0$).