微积分II（第一层次）期末试卷 (2021.6.22)

一、计算下列各题（6分×5 = 30 分）

1. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ 3x+2y+z=10 \end{cases}$ 在点 $P(1,2,3)$ 处的法平面与切线方程.

2. 求柱面 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部分曲面的面积.

3. 计算第二类曲线积分 $I_1=\int_C \cos(x+y^2)\mathrm{d}x+\big(2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}\ \big)\mathrm{d}y$, 其中 C 为旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, 由 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$, 其中 $a>0$.

4. 计算第一类曲面积分 $I_2=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截下的部分.

5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

二、计算下列各题（8分×5 = 40 分）

1. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.

2. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

3. 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(1-\dfrac{1}{3^n}\Big)$ 的和.

4. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3x^2+2xy-y^2}{2xy-x^2}$ 的通积分.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通积分.

三、（本题10分）计算 $I_3=\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, 其中 C 是平面 $x+y+z=1$ 的第一卦限部分与三个坐标面的交线，从 z 周正向往 z 轴负向看去是逆时针方向.

四、（本题10分）计算 $I_4=\iint\limits_S 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面，取下侧.

五、（本题10分）设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)},\ x\in(-1,1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程，并求解之. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2022.6.13)

一、简答题（8 分 $\times 6 = 48$ 分）

1. 计算 $I = \iint\limits_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $xy = 1, xy = 2$ 以及 $y = x, y = 2x$ 所围图形在第一象限的部分.

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\Big(\cos(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) - \cos(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})\Big)$ 绝对收敛.

3. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数及收敛域.

4. 求方程 $y'' + \mathrm{e}^{y'} = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$ 的解.

5. 求函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的马克劳林展式.

6. 求函数 $y = x$ $(x \in [0, \pi])$ 的余弦级数.

二、(10 分) 已知 $y = \mathrm{e}^x$ 为方程 $y'' + \tan x\ y' - (1 + \tan x)y = 0$ 的一个解, 求方程的通解.

三、(10 分) 计算第二型曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{1}{1+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, 取上侧.

四、(10 分) 已知第二型曲线积分 $I_L = \int_L (x + y^2 + \mathrm{e}^z)\mathrm{d}x + (2xy + yz)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$ 与路径无关, $R(0, 0, z) = z^2$. 求函数 $R(x, y, z)$ 的表达式以及当 L 的起点为 $(0, 0, 0)$, 终点为 $(1, 1, 1)$ 时 I_L 的值.

五、(10 分) 已知 $A = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t^k} \iiint\limits_{\Omega(t)} (e^{xy} - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为非零常数, 求 A 及 k 的值, 其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$.

六、(12 分) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数, 记 $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. 求方程 $y'' - y = f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ 的有界解, 并证明对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $|y(x)| \leq M$.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2023.6.14)

一、计算下列各题（每题6分, 共3题, 合计18 分）

1. 设 $u=\mathrm{e}^{xy^2}+\ln(x+y+z^2)$, 求 u 在点 $P(1,-1,1)$ 处的全微分.

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 截下的部分曲面的面积.

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 的和.

二、计算下列各题（每题7分, 共3题, 合计21 分）

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 的马克劳林级数，并给出其收敛域.

2. 求微分方程 $y'-y=xy^5$ 的通积分.

3. 求微分方程 $y''-8y'+16y=x\mathrm{e}^{4x}$ 的通解.

三. (本题10分）求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

四. (本题10分）$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z$, Σ 为立体 Ω 的表面，求曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}(x^4+y^4+z^4-z^3)\mathrm{d}S$.

五. (本题10分）讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 的敛散性 (绝对收敛/条件收敛/发散), 其中 $p>0$.

六. (本题10分）试将函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 展成 x 的幂级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

七. (本题10分）设函数 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，且 $f(x)=2+|x|, x\in[-1,1]$.

1. 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的傅里叶展开式；
2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和；
3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

八. (本题11分）求微分方程 $y''-y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}+\cos x$ 的通解.

2022-2023 学年第二学期第一层次微积分 II 试卷 A 参考答案 2023.6.14

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 3 题，计 18 分）：

1. 设 $u=e^{xy^2}+\ln(x+y+z^2)$，求 u 在点 $P(1,-1,1)$ 处的全微分.

解：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.[y^2e^{xy^2}+\dfrac{1}{x+y+z^2}]\right|_P=e+1,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.[2xye^{xy^2}+\dfrac{1}{x+y+z^2}]\right|_P=-2e+1,$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=\left.\frac{2z}{x+y+z^2}\right|_P=2,\ \therefore du|_P=(e+1)dx+(-2e+1)dy+2dz.$$

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 截下的部分曲面的面积.

解：设 S_1 是所求曲面在第一卦限部分的面积，则由对称性，$S=4S_1$，

$$S_1:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},(x,y)\in D,\quad D:x^2+y^2\le ax,y\ge 0.$$

$$S=4S_1=4\iint_D\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy=4a\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=2a^2(\pi-2).$$

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}$ 的和.

解：令 $a_n=\dfrac{2n-1}{3^n}=\dfrac{n}{3^{n-1}}-\dfrac{n+1}{3^n}$，

所以 $S_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{3}{3^2}-\dfrac{4}{3^3}+\cdots+\dfrac{n}{3^{n-1}}-\dfrac{n+1}{3^n}=1-\dfrac{n+1}{3^n}$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$. 故所求和为 1.

二、计算下列各题（每小题 7 分，共 3 题，计 21 分）：

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 的马克劳林级数，并给出其收敛域.

解：$$f(x)=\frac{5x-12}{x^2+5x-6}=\frac{1}{1+x/6}+\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}[1+\frac{(-1)^n}{6^n}]x^n,x\in(-1,1).$$

2. 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-y=xy^5$ 的通积分.

解：这是一个关于自变量为 x 函数为 y 的伯努利方程，原方程可以写为

$\frac{d(y^{-4})}{dx}+4y^{-4}=-4x$，其中 $p(x)=4,q(x)=-4x.$

所以 $y^{-4}=e^{-4\int dx}(C-4\int xe^{\int 4dx}dx)=Ce^{-4x}-x+\frac{1}{4}$. 所求通积分为：$y^4(Ce^{-4x}-x+\frac{1}{4})=1.$

3.求微分方程 $y''-8y'+16y=xe^{4x}$ 的通解.

解：原方程对应的齐次微分方程为：$y''-8y'+16y=0$，其特征方程为：$r^2-8r+16=0$，

其特征根为：$r=4$. 所以 $y''-8y'+16y=0$ 的通解为：$\overline{y}(x)=(C_1+C_2x)e^{4x}$，

对于 $f(x)=xe^{4x}$，$y''-8y'+16y=xe^{4x}$ （1） 的特解为：$y^*(x)=x^2(Ax+B)e^{4x}.$

代入（1）式中，得 $A=\frac{1}{6},B=0$. 所以 $y^*(x)=\frac{x^3}{6}e^{4x}.$

故所求微分方程的通解为：$y(x)=(C_1+C_2x)e^{4x}+\frac{x^3}{6}e^{4x}$.

三、（本题 10 分）求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解：设切点坐标为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 其切平面的切向量为：$\vec{n}=(x_0,2y_0,z_0)$，已知平面的法向量为：$\vec{n}_1=(1,-1,2),\vec{n}//\vec{n}_1\Rightarrow\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{-1}=\frac{z_0}{2}=k,\Rightarrow x_0=k,y_0=-\frac{k}{2},z_0=2k,$

将其代入椭球面方程中，得 $k^2+2*(-k/2)^2+(2k)^2=1$, 得 $k=\pm\sqrt{2/11}$.，

而切平面方程为：$x-y+2z=1/k$, 即 $x-y+2z=\pm\sqrt{11/2}$.

四、（本题 10 分）$\Omega:x^2+y^2+z^2\le 2z$，Σ 为立体 Ω 的表面，求曲面积分 $I_3=\iint_\Sigma(x^4+y^4+z^4-z^3)dS$.

解：Σ 的单位法向量为：$\vec{n}=(x,y,z-1)$，$I_3=\iint_\Sigma(x^3\cdot x+y^3\cdot y+z^3(z-1))dS$

所以，$I_3=\iint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，由高斯公式，得

$$I_3=3\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$，令 $x=u,y=v,z-1=w,$

$$I_3=3\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u^2+v^2+w^2+2w+1)dudvdw$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2r^2\sin\varphi dr+3\cdot\frac{4\pi}{3}=\frac{32\pi}{5}.$$

五、（本题 10 分）讨论级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$的敛散性（绝对收敛、条件收敛或发散，其中

$p>0$）.

解：由于$a_n=\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n},|a_n|=\frac{1}{n^p+(-1)^n}\sim\frac{1}{n^p}(n\to\infty)$，所以，原级数在$p>1$时绝对

收敛，在$0<p\le 1$时非绝对收敛.

8

在$0<p\le 1$时，将原级数拆分为两个级数，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n[n^p-(-1)^n]}{[n^p+(-1)^n][n^p-(-1)^n]}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}-1},$$

4

对于$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1}$由莱布尼茨判别法知其收敛，

对于$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}-1}$由$p$级数的敛散性知，$p>\frac{1}{2}$时收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$时发散.

综上，原级数在$p>1$时绝对收敛，$\frac{1}{2}<p\le 1$时条件收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$时发散. 3.

六、（本题 10 分）试将函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\ne 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$展成$x$的幂级数，并求级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$的和.

解：$\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in[-1,1]$, 于是

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},x\in[-1,1]$$，因此，$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

七、（本题 10 分）设函数$f(x)$是周期为2的周期函数，并且$f(x)=2+|x|,(-1\le x\le 1)$，

1. 求$f(x)$在$[-1,1]$上的傅里叶展开式. 2. 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和. 3. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

解：由于 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是偶函数，所以 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$，$a_0=2\int_0^1(2+x)dx=5.$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x dx=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}=\begin{cases}0,n=2,4,\cdots;\\ -\frac{4}{n^2\pi^2},n=1,3,\cdots\end{cases},$$

所以，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的傅里叶展开式为：$f(x)\sim\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$，由 Dirichlet

收敛定理，$\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}=2+|x|(-1\le x\le 1).$

令 $x=0$, 有 $2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$ 而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

八、（本题 11 分）求微分方程 $y''-y=\frac{e^{2x}}{1+e^x}+\cos x$ 的通解.

解：$y''-y=0$ 的特征方程为：$\lambda^2-1=0$，其特征根为 $\lambda=\pm1$，

$y''-y=0$ 的通解为：$\overline{y}(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x.$

对于 $y''-y=\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ ①，用常数变易法，设其特解为：$y_1^*(x)=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^x$ 代入①，

其中 $C_1(x),C_2(x)$ 满足 $\begin{cases}C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^x=0,\\ -C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^x=\frac{e^{2x}}{1+e^x}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C_1'(x)=-\frac{1}{2}\frac{e^{3x}}{1+e^x},\\ C_2'(x)=\frac{1}{2}\frac{e^x}{1+e^x}.\end{cases}$

得 $C_1(x)=-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}e^x-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^x)$, $C_2(x)=\frac{1}{2}\ln(1+e^x)$，

所以 $y_1^*(x)=-\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{2}-xe^{-x}+\frac{e^{-x}+e^x}{2}\ln(1+e^x).$

对于 $y''-y=\cos x$ ②，设其特解为：$y_2^*(x)=A\cos x+B\sin x$ 代入②，

得 $A=-\frac{1}{2},B=0.$ 所以 $y_2^*(x)=-\frac{1}{2}\cos x.$

综上，所求通解为：$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x-\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{2}-xe^{-x}+\frac{e^{-x}+e^x}{2}\ln(1+e^x)-\frac{1}{2}\cos x.$

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2021.6.22)

一、 1. 法平面方程为 $x-2y+z=0$, 切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

2. $4a^2$. 3. $\sin(2\pi a)$. 4. $\dfrac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. 5. 仅当 $p>0$ 时收敛；

二、1. 收敛. 2. 条件收敛. 3. $\ln\dfrac{3}{2}$. 4. $x^3+x^2y-xy^2=C$. 5. $y^3=x^3(C+3x)$.

三、-1. 四、$(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2$.

五、$f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)-\dfrac{x}{1-x^2}f'(x)=\dfrac{8x^2}{1-x^2}$, 这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程，解得 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(C_1+4\arcsin x-4x\sqrt{1-x^2}\Big)$, 由 $f'(0)=0$ 得 $C_1=0$, 故 $f'(x)=4\Big(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\Big)$, 两边再积分得 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2+C_2$, 由 $f(0)=0$ 得 $C_2=0$, 所以 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}=f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\pi^2}{8}-1.$

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2022.6.13)

一、 1. $\dfrac{3}{8}$.

2. $\left|n\Big(\cos(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})-\cos(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2})\Big)\right|=2n\sin\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{2}{n^2}$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，故原级数绝对收敛.

3. 收敛域为$[-1,1]$，和函数 $S(x)=\begin{cases}-\ln(1-x)+1+\frac{\ln(1-x)}{x}, & x\in[-1,1),x\neq 0,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. $y=-x\ln(1+x)+x-\ln(1+x)$.

5. $\displaystyle\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad(|x|\le 1).$

6. x 的余弦级数为 $\displaystyle\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos(nx),\quad x\in[0,\pi].$

二. 通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}(\sin x-2\cos x)$, 其中$c_1,c_2$ 为任意常数.

三. $(\dfrac{8}{3}-2\ln 2)\pi$.

四. $R(x,y,z)=x\mathrm{e}^z+\dfrac{1}{2}y^2+z^2$. 当$L$ 的起点为$(0,0,0)$, 终点为$(1,1,1)$ 时, $I_L=\mathrm{e}+\frac{7}{3}$.

五. 解: 由泰勒公式可得，当 $(x,y,z)\in\Omega(t)$ 时, $\mathrm{e}^{xy}-1=xy+\frac{1}{2}x^2y^2+o(t^4)$.

$$\iiint\limits_{\Omega(t)}(e^{xy}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega(t)}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+o(t^7)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}x^2y^2\sqrt{t^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+o(t^7)$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^t \rho^5 \sqrt{t^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho + o(t^7) \xlongequal{(\sqrt{t^2-\rho^2}=u)} \frac{\pi}{4}\int_0^t u^2(t^2-u^2)^2\mathrm{d}u + o(t^7)$$

$$= \frac{2\pi}{105}t^7 + o(t^7). \quad \text{因此} \, k=7, A=\frac{2\pi}{105}.$$

六. 解: 齐次方程的通解为 $y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}$.

利用常数变易法, 设非齐次方程的解为 $y = c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$, 则有

$$\begin{cases} c_1'(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ c_1'(x)\mathrm{e}^x - c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = f(x) \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x} \\ c_2'(x) = -\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

为了保证方程的解为有界解, 形式上需要 $c_1(+\infty)=0, c_2(-\infty)=0$.

从而我们取 $c_1(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, $c_2(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$.

因此形式上非齐次方程的解为 $y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$.

同时由于对任意的 $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|\le M$, 从而

$$|y(x)| \le \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left|\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right| + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left|\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right| \le \frac{M\mathrm{e}^x}{2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \frac{M\mathrm{e}^{-x}}{2}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^t\mathrm{d}t \le M.$$

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2023.6.14)

一、1. $\mathrm{d}u\Big|_{(1,-1,1)} = (\mathrm{e}+1)\mathrm{d}x + (-2\mathrm{e}+1)\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z$; 2. $2a^2(\pi-2)$; 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n} = 1$.

二、1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\Big)x^n$, $x\in(-1,1)$. 2. $y^4(C\mathrm{e}^{-4x} - x + \frac{1}{4}) = 1$. 3. $y = (C_1+C_2x)\mathrm{e}^{4x} + \dfrac{x^3\mathrm{e}^{4x}}{6}$.

三、$x-y+2z = \pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$. 四、$\dfrac{32\pi}{5}$.

五、$p>1$ 时绝对收敛；$\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时条件收敛；$0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时发散.

六、$f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n}$, $x\in[-1,1]$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{f(1)-1}{2} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

七、1. $f(x) = \dfrac{5}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$; 2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$; 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

八、$y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2} - x\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\ln(1+\mathrm{e}^x) - \dfrac{1}{2}\cos x$.

微积分 II（第一层次）期末 A 卷参考答案 2022.6.13

一、简答题（每题 8 分, 共 6 小题, 计 48 分）

1. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D x^2dxdy$, 其中 D 由曲线 $xy=1, xy=2$ 以及 $y=x, y=2x$ 所围区域.

$y=\sqrt{uv}$

$x=\sqrt{\frac{u}{v}}$

2分 2分

解: 令 $u=xy, v=\frac{y}{x}$, 则区域 D 变成了 $Q=\{(u,v):1\le u\le 2, 1\le v\le 2\}$. 从而

$$2.\quad I=\iint_Q \frac{u}{v}\frac{1}{2v}dudv=\frac{1}{2}\int_1^2 udu\int_1^2 v^{-2}dv=\frac{3}{8}.$$

1分 2分 1分 $\frac{3}{4}$

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left[\cos(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})-\cos(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})\right]$ 绝对收敛.

证明: 由于 $\cos(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})-\cos(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})=-2\sin(\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n^2})$, 从而

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left|\left(\cos(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})-\cos(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})\right)\right|$$
$$\le 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left|sin(\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n^2})\right|\le 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\le 4.$$

故原级数绝对收敛.

3. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数及收敛域.

解: 当 $x=\pm1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$, 且由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$, 故函数项级数的收敛域为 $[-1,1]$.
令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ $(x\in[-1,1])$, 则 $(xf(x))''=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ $(x\in(-1,1))$.
由于 $f(0)=0$, 因此 $(xf(x))'(0)=0$, 从而 $(xf(x))'=-\ln(1-x)$ $(x\in(-1,1))$.
此时, $xf(x)=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)$ $(x\in[-1,1])$.
从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}-\ln(1-x)+1+\frac{\ln(1-x)}{x}, & x\in[-1,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$.

4. 求方程 $y''+e^{y'}=0, y(0)=0, y'(0)=0$ 的解.

解: 令 $z=y'$, 则 $z'+e^z=0, z(0)=0$. 此时 $(e^{-z})'=1$, 从而 $e^{-z}=1+x$, 即 $y'=-\ln(1+x), y(0)=0$.

$\int \ln(1+x)\,dx = (x+1)\ln(1+x) - x + C$

$(x+1)\ln(1+x) - x$

故 $y = -\int_0^x \ln(1+t)dt = -x\ln(1+x) + \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = -x\ln(1+x) + x - \ln(1+x)$

5. 求函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的马克劳林展式.

解: 令 $f(z) = \sqrt{1-z}$, 则 $f'(0) = -\frac{1}{2}$, $f^{(n)}(0) = -\frac{(2n-3)!!}{2^n}$ $(n \geq 2)$,

因此 $f(z) = 1 - \frac{z}{2} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} z^n$ $(|z| < 1)$.

从而 $y(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} x^{2n}$ $(|x| < 1)$.

6. 求函数 $y = x$ $(x \in [0, \pi])$ 的余弦级数.

解:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x d\sin(nx) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1).
\end{aligned}
$$

因此所求正弦级数为 $y \sim \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)\cos(nx)$.

二. (本题满分 10 分) 已知 $y = e^x$ 为方程 $y'' + \tan x\, y' - (1 + \tan x)y = 0$ 的一个解, 求方程的通解.

解: 设方程的两个线性无关的解为 $y_1(x), y_2(x)$,

则朗斯基行列式 $W(x) = y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)$

满足 $W'(x) = -\tan x W(x)$. 不妨取 $W(0) = 1$, 从而 $W(x) = \cos x$.

由于已知方程的一个解为 $y = e^x$, 从而由朗斯基行列式的定义知,

方程另一个线性无关的解满足 $y' - y = e^{-x}\cos x$.

解得 $y = -\frac{2}{5}e^{-x}\cos x + \frac{1}{5}e^{-x}\sin x$.

因此原方程的通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}(\sin x - 2\cos x)$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

三. (本题满分 10 分) 计算第二型曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} x dy \wedge dz + dz \wedge dx + \frac{1}{1+z} dx \wedge dy$, 其中 $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, 取上侧.

解: 令 $\Sigma_1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, 取上侧. 则由 Gauss 公式,

$\iint\limits_{\Sigma - \Sigma_1} x dy \wedge dz + dz \wedge dx + \frac{1}{1+z} dx \wedge dy = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0} (1 - \frac{1}{(1+z)^2}) dx dy dz.$

从而

$$
\begin{aligned}
I=&\iint\limits_{\Sigma_1} xdy\wedge dz+dz\wedge dx+\frac{1}{1+z}dx\wedge dy\\
&+\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\le 1,z\ge 0\}}(1-\frac{1}{(1+z)^2})dxdydz\\
=&\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}dxdy+\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\le 1,z\ge 0\}}(1-\frac{1}{(1+z)^2})dxdydz\\
=&\pi+\frac{2}{3}\pi-\pi\int_0^1\frac{1-z^2}{(1+z)^2}dz\\
=&\frac{5}{3}\pi-\pi\int_0^1\frac{1-z}{1+z}dz=(\frac{8}{3}-2\ln 2)\pi.
\end{aligned}
$$

四. (本题满分 10 分) 已知第二型曲线积分 $I_L=\int_L(x+y^2+e^z)dx+(2xy+yz)dy+R(x,y,z)dz$ 与路径无关, $R(0,0,z)=z^2$. 求函数 $R(x,y,z)$ 的表达式以及当 L 的起点为 $(0,0,0)$, 终点为 $(1,1,1)$ 时 I_L 的值.

解: 令 $P(x,y,z)=x+y^2+e^z, Q(x,y,z)=2xy+yz$, 由于 I_L 积分与路径无关,
故 $\partial_x R=\partial_z P=e^z, \partial_y R=\partial_z Q=y$,
从而 R 可表示成 $R(x,y,z)=xe^z+\frac{1}{2}y^2+f(z)$, 其中 $f(z)$ 为待定函数.
又因为 $R(0,0,z)=z^2$, 因此 $f(z)=z^2$, 从而 $R(x,y,z)=xe^z+\frac{1}{2}y^2+z^2$.
此时 $I_L=\int_L du$, 其中 $u=\frac{1}{2}x^2+xy^2+xe^z+\frac{1}{2}y^2z+\frac{1}{3}z^3$.
当 L 的起点为 $(0,0,0)$, 终点为 $(1,1,1)$ 时, $I_L=u(1,1,1)-u(0,0,0)=e+\frac{7}{3}$.

五. (本题满分 10 分) 已知 $A=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^k}\iiint\limits_{\Omega(t)}[e^{xy}-1]dxdydz$ 为非零常数, 求 A 及 k 的值, 其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\le t^2\}$.

解: 由泰勒级数知道当 $(x,y,z)\in\Omega(t)$ 时, $e^{xy}-1=xy+\frac{1}{2}x^2y^2+o(t^5)$.

利用区域的对称性可知,

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega(t)}[e^{xy}-1]dxdydz\\
=&\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega(t)}x^2y^2dxdydz+o(t^8) \quad \text{Taylor}\\
=&\iint_{\{x^2+y^2\le t^2\}}x^2y^2\underline{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}dxdy+o(t^8) \quad \text{先一后二}\\
=&\int_0^{2\pi}\int_0^t r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{t^2-r^2}drd\theta+o(t^8) \quad \text{极坐标换元}\\
=&\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\int_0^t r^5\sqrt{t^2-r^2}dr+o(t^8)\\
=&\frac{\pi}{4}\int_0^t r^5\sqrt{t^2-r^2}dr+o(t^8)\\
=&\frac{\pi}{4}\int_0^t r^5dr+o(t^7)=\frac{\pi}{24}t^6+o(t^7).
\end{aligned}
$$

?

$\frac{2\pi}{105}t^7+o(t^8)$

$r=t\sin\alpha$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t r^5\sqrt{t^2-r^2}\,dr\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^5\sin^5\alpha\sqrt{t^2-t^2\sin^2\alpha}\,dt\sin\alpha\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^5\sin^5\alpha\; t\cos\alpha\, t\cos\alpha\, d\alpha\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^7\sin^5\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^7\sin^5\alpha(1-\sin^2\alpha)\, d\alpha\\
=&t^7\left(\frac{4!!}{5!!}-\frac{6!!}{7!!}\right)\\
=&t^7\left(\frac{7\times4\times2-6\times4\times2}{7\times5\times3}\right)=\frac{8}{105}t^7
\end{aligned}
$$

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$

故原式 $=\frac{8}{105}t^7\times\frac{\pi}{4}$

$=\frac{2\pi}{105}t^7.$

因此取 $k=6, A=\frac{\pi}{24}$.

$\int_0^{2\pi}(\cos\theta\sin\theta)^2=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\, d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos4\theta)d\theta=\frac{\pi}{4}$

六. (本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数, 记 $M=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. 求方程 $y''-y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 的有界解, 并证明对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 有 $|y(x)|\le M$.

解: 齐次方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2x^{-x}$,

从而通过常数变易法, 设非齐次方程的解为 $y=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{-x}$.

因此 $c_1'(x)e^x+c_2'(x)e^{-x}=0, c_1'(x)e^x-c_2'(x)e^{-x}=f(x)$,

故 $c_1'(x)=\frac{1}{2}f(x)e^{-x}, c_2'(x)=-\frac{1}{2}f(x)e^x$.

为了保证方程的解为有界解, 形式上需要 $c_1(+\infty)=0, c_2(-\infty)=0$.

从而我们取 $c_1(x)=\frac{1}{2}\int_{+\infty}^x f(t)e^{-t}dt, c_2(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^x f(t)e^tdt$.

因此形式上非齐次方程的解为 $y(x)=\frac{e^x}{2}\int_{+\infty}^x f(t)e^{-t}dt-\frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^x f(t)e^tdt$.

同时由于对任意的 $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|\le M$, 从而

$$
\begin{aligned}
|y(x)|\le&\frac{e^x}{2}\left|\int_{+\infty}^x f(t)e^{-t}dt\right|+\frac{e^{-x}}{2}\left|\int_{-\infty}^x f(t)e^tdt\right|\\
\le&\frac{Me^x}{2}\int_x^{+\infty}e^{-t}dt+\frac{Me^{-x}}{2}\int_{-\infty}^x e^tdt\le M.
\end{aligned}
$$

2022年第六题：

设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数，记 $M=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$．求方程 $y''-y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 的有界解，并证明对任意的 $x\in\mathbb{R}$，有 $|y(x)|\leq M$．

解: 齐次方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$.

利用常数变易法, 设非齐次方程的解为 $y=c_1(x)\mathrm{e}^x+c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$, 则有

$$\begin{cases} c_1'(x)\mathrm{e}^x+c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=0 \\ c_1'(x)\mathrm{e}^x-c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=f(x) \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} c_1'(x)=\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x} \\ c_2'(x)=-\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

为了保证方程的解为有界解, 形式上需要 $c_1(+\infty)=0, c_2(-\infty)=0$.

从而我们取 $c_1(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\quad c_2(x)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t.$

因此形式上非齐次方程的解为 $y(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t.$

同时由于对任意的 $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|\leq M$, 从而

$$|y(x)|\leq\frac{\mathrm{e}^x}{2}\left|\int_{+\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right|+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left|\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right|\leq\frac{M\mathrm{e}^x}{2}\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\frac{M\mathrm{e}^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\leq M.$$

补充证明：为了保证方程的解为有界解，形式上需要 $c_1(+\infty)=0, c_2(-\infty)=0$.

$c_1'(x)=\dfrac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x}$, 则 $c_1(x)=c_1(a)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{a}^{x}f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$c_2'(x)=-\dfrac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{x}$, 则 $c_2(x)=c_2(a)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{a}^{x}f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$

广义积分 $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}c_1(x)$ 存在.　同理，$\lim\limits_{x\to-\infty}c_2(x)$ 存在.

$|c_2(x)|\leq|c_2(a)|+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{a}^{x}|f(x)|\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\leq|c_2(a)|+\dfrac{M}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a)\leq|c_2(a)|+\dfrac{M}{2}\mathrm{e}^x\leq M\mathrm{e}^x$ (x 充分大)

要使 $y=c_1(x)\mathrm{e}^x+c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$ 有界，即存在常数 N, 使得 $|y|\leq N$,

而 $c_1(x)\mathrm{e}^x=y-c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$, $|c_1(x)\mathrm{e}^x|\leq|y|+|c_2(x)|\mathrm{e}^{-x}\leq N+M\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}=N+M$,

所以 $|c_1(x)|\leq(N+M)\mathrm{e}^{-x}$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}c_1(x)=0$.

类似地，

$|c_1(x)|\leq|c_1(a)|+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x}^{a}|f(x)|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\leq|c_1(a)|+\dfrac{M}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-a})\leq|c_2(a)|+\dfrac{M}{2}\mathrm{e}^{-x}\leq M\mathrm{e}^{-x}$,

($x<0$ 且 $|x|$ 充分大)

$c_2(x)\mathrm{e}^{-x}=y-c_1(x)\mathrm{e}^x$, $|c_2(x)\mathrm{e}^{-x}|\leq|y|+|c_1(x)|\mathrm{e}^x\leq N+M\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}=N+M$,

所以 $|c_2(x)|\leq(N+M)\mathrm{e}^x$. 所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}c_2(x)=0$.

2020-2021 学年第二学期第一层次微积分 II 试卷 A 参考答案 2021.6.22

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 5 题，计 30 分）：

1. 求空间曲线 $x^2+y^2+z^2=14, 3x+2y+z=10$ 在点 $P(1,2,3)$ 的法平面和切线方程.

解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，则 $\vec{n}_1=(F'_x,F'_y,F'_z)|_P=2(1,2,3)$,

设 $G(x,y,z)=3x+2y+z-10$，则 $\vec{n}_2=(3,2,1)$，$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=2(1,2,3)\times(3,2,1)=-8(1,-2,1)$，

取空间曲线在 P 点处的切向量为 $\vec{s}=(1,-2,1)$，所以所求法平面方程为：$x-2y+z=0$，

切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

2. 求柱面 $x^2+y^2=ay(a>0)$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部曲面的面积.

解：由对称性，曲面在 2、3、6、7 卦限内的面积是一样的，所以只要求出第 2 卦限内曲面面积再乘以 4 即可．曲面在第 2 卦限内的方程为：$x=\sqrt{ay-y^2}$，

其中 $0\le y\le a, 0\le z\le\sqrt{a^2-ay}$，$\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{a-2y}{2\sqrt{ay-y^2}},\dfrac{\partial x}{\partial z}=0,\sqrt{1+(\dfrac{\partial x}{\partial y})^2+(\dfrac{\partial x}{\partial z})^2}=\dfrac{a}{2\sqrt{ay-y^2}}$，

所求曲面面积为：$S=4\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-ay}}\dfrac{a}{2\sqrt{ay-y^2}}dz=2a\sqrt{a}\int_0^a\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=4a^2$.

3. 计算第二类曲线积分 $\int_C\cos(x+y^2)dx+[2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}]dy$，其中 C 为旋轮线：$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0)$，由 $O(0,0)\to A(2\pi a,0)$.

解：$P(x,y)=\cos(x+y^2),Q(x,y)=2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}$,

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2y\sin(x+y^2),\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin(x+y^2)$，所以此积分与路径无关，选取直线段

$OA: y=0, x:0\to 2\pi a$. 原式$=\int_C Pdx+Qdy=\int_0^{2\pi a}\cos xdx=\sin x|_0^{2\pi a}=\sin(2\pi a)$.

4. 计算第一类曲面积分 $\iint_S(xy+yz+zx)dS$，其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所截下部分.

解：曲面 S 关于 zOx 平面对称，函数 $xy+yz$ 关于 y 为奇函数，所以 $\iint_S(xy+yz)dS=0$. 在 S

上，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z},dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$. 所以在极坐标变换下，

原式=$\iint_S xzdS=2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\cdot rdr=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta d\theta$

$=8\sqrt{2}a^4\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$

5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 的敛散性 .

解：$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=I_1+I_2$，

对于 $I_1, p-1<0, 0$ 为奇点，$\lim\limits_{x\to 0+}x^{1-p}\cdot x^{p-1}e^{-x}=1$, 由 *Cauchy* 判别法知，$I_1$ 在

$0<1-p<1$ 即 $1>P>0$ 时收敛.而 $p-1\geq 0, 0$ 不是奇点.

对于 $I_2, +\infty$ 为奇点，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot x^{p-1}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p+1}e^{-x}=0$, 由 *Cauchy* 判别法知，$I_2$ 对一切

的 p 收敛.所以广义积分 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 在 $p>0$ 时收敛.

二、计算下列各题（每小题 8 分，共 5 题，计 40 分）：

1. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.

解：$0<u_n=\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\frac{n^{n-1}}{(n^2)^{(n+1)/2}}=\frac{1}{n^2}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数收敛.

2. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：由于 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 当 $n\to\infty$ 时单调下降趋于 0，又部分和

$\left|\sum\limits_{m=2}^{n}\sin\frac{m\pi}{6}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{4}-\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{12}}\right|\leq\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$ 有界，由狄利克莱判别法知原级数收敛.

但是 $\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}\right|\geq\frac{\sin^2\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$ 而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，级数

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{3})}{\sqrt{n}}$收敛，故级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left|\sin(\frac{n\pi}{6})\right|}{\sqrt{n}}$发散，从而原级数条件收敛.

3. 求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(1-\frac{1}{3^n})$的和.

解：注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x),x\in(-1,1],\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(1-\frac{1}{3^n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{3^n}=\ln(1+1)-\ln(1+\frac{1}{3})=\ln\frac{3}{2}.$$

4. 求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+2xy-y^2}{2xy-x^2}$的通积分.

解：原方程可以化为：$(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0\quad(1)$

其中$P(x,y)=3x^2+2xy-y^2,Q(x,y)=x^2-2xy,P'_y=2x-2y=Q'_x$，所以上述微分方程是全微分方程，采用分项组合凑微分法，可得$d(x^3+x^2y-xy^2)=0,$故所求通积分为：

$x^3+x^2y-xy^2=C.$

5. 求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$的通积分.

解：原微分方程可化为：$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{x^3}{y^2}$这是伯努利方程，可写为$y^2\frac{dy}{dx}-\frac{y^3}{x}=x^3$，再化为：

$\frac{d(y^3)}{dx}-\frac{3}{x}y^3=3x^3$，由公式可得 $y^3=e^{\int\frac{3}{x}dx}(C+\int 3x^3e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx)=x^3(C+3x).$

故所求通积分为：$y^3=x^3(C+3x).$

三、（本题10分）求第二类曲线积分$\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$其中C是平面$x+y+z=1$的第一卦限部分与三个坐标平面的交线，从z轴正向往z轴负向看去是逆时针方向.

解：原式$=\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz=-2\iint_S zdydz+xdzdx+ydxdy$

$$=-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(x+y+z)dS=-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\sigma(S)=-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sin\tfrac{\pi}{3}=-1.$$

四、（本题10分）求第二类曲面积分$\iint_S 4xzdydz-2yzdzdx+(1-z^2)dxdy.$

其中 S:曲线 $z=e^y(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转面，取下侧.

Gauss 公式

解：曲面 $z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ (x^2+y^2\le a^2)$, 增 $S_1: z=e^a$, 取上侧 $P=4xz, Q=-2yz, R=1-z^2$.

所以，$I=-\iint_{S_1}(1-z^2)dxdy=-(1-e^{2a})\iint_{D_1}dxdy=(e^{2a}-1)\pi a^2$.

五、(本题 10 分) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)}, x\in(-1,1)$，求出 $f(x)$ 满足的微分方程，并求之. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$ 的和.

解：$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}, f''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=xs(x)$,

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}$, 两边积分，得 $\int_0^x s(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=$ (令 $m=n-1$) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{4(2m)!!}{(2m+1)!!}x^{2m+1}=4x+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{4(2m)!!}{(2m+1)!!}x^{2m+1}=4x+f'(x)$,

所以，$f''(x)=x[x(4x+f'(x))]'=x[8x+f'(x)+xf''(x)]$，故 $f(x)$ 满足的微分方程为：

$f''(x)-\dfrac{x}{1-x^2}f'(x)=\dfrac{8x^2}{1-x^2}$. 这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程，由通解公式得，

$f'(x)=e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}(C_1+\int\dfrac{8x^2}{1-x^2}e^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx}dx)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(C_1+8\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx)$，而

$\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=(\text{令}x=\sin t)\int\sin^2 tdt=\dfrac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt=\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{1}{2}\sin 2t)=\dfrac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})$,

所以，$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(C_1+4\arcsin x-4x\sqrt{1-x^2})$.

由 $f'(0)=0$, 得 $C_1=0, \therefore f'(x)=4(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x)$.

两边再积分，得 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2+C_2$，

由 $f(0)=0$, 得 $C_2=0, \therefore f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2$.

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}\dfrac{1}{2^{n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(n+1)}=f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})$，

$f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=2(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2-1=\dfrac{\pi^2}{8}-1.$

微积分II(第一层次)期末试卷 (2018.7.3)

一、计算下列各题(6分 × 5=30分)

1. 设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 其中 $f(v)$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$ 的收敛域.

4. 求微分方程 $(x-\sin y)\mathrm{d}y+\tan y\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y(1)=\dfrac{\pi}{6}$ 的特解.

5. 求微分方程 $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+5\right)\mathrm{d}x+\left(-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{6}{y^3}\right)\mathrm{d}y=0$ 的通积分.

二、(10分)　计算 $I_1=\displaystyle\iint_S(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ 的上侧.

三、(10分)　计算 $I_2=\displaystyle\oint_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 C 是立方体 $0\le x\le a,0\le y\le a,0\le z\le a$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ 的交线，若从 z 轴正向看去是逆时针方向.

四、(10分)　对常数 p, 讨论数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛，何时条件收敛，何时发散.

五、(10分)　试将函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$ 展成马克劳林级数，并写出其收敛域.

六、(10分)　将函数 $f(x)=\dfrac{x}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并求级数 $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$ 的和.

七、(10分)　求二阶微分方程 $y''-y=2x+e^{2x}\cos x$ 的通解.

八、(10分)　(1) (非商学院学生做) 设函数 $f(x)$ 对定义域内任意两点 x,y 有等式 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0)=a$ $(a\neq 0)$, 求函数 $f(x)$.

(2) (商学院学生做) 已知 $\displaystyle\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a=\frac{1}{2}f(x)+1$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2019.6.17)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求平面 $x+4y-8z=18$ 被圆柱面 $x^2+y^2=6y$ 所截部分的面积.

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$ 的敛散性.

3. 讨论广义积分 $\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $2xy\cdot y'-y^2+x=0$ 的解.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2-y+5}{x+y^2+2}$ 的通积分.

二、(10分) 求过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 且与曲面 $S:3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的切平面方程.

三、(10分) 设 $C:x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$, $t:0\to 2\pi$ 为旋轮线的一拱，方向由原点到$A(2\pi a,0)$, 计算 $I_1=\int_C((x+y+1)e^x-e^y+y)\mathrm{d}x+(e^x-(x+y+1)e^y-x)\mathrm{d}y$.

四、(10分) 计算 $I_2=\iint\limits_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\geq 0)$ 的上侧.

五、(10分) 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

六、(10分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域、和函数，并由此计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

七、(10分) 将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

八、(10分) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x+e^{-x},y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求出此微分方程，写出其通解.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2020.8.18)

一、(8分）设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性以及连续可微性.

二、计算下列各题（7分×3 = 21 分）

1. 求过直线 $L:\begin{cases} 10x+2y-2z=27, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的平面方程.

2. 求旋转抛物面 $x^2+y^2=2az\ (a>0)$ 与半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面积.

3. 计算 $I=\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x\geq 1, y\geq x^2$.

三、计算下列各题（7分×3 = 21 分）

1. 计算 $I=\displaystyle\int_C 2x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+(x+2y-z)\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y=z \end{cases}$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到$B(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 的位于第一卦限的一段曲线.

2. 计算 $I=\displaystyle\oint_C \frac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y=R. \end{cases}$ 从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.

3. 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

四、计算下列各题（7分×4 = 28 分）

1. 考察级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性. Taylor

2. 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性. （提示：$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$）

3. 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ 的和函数，并求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n}$ 的和.

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

五、计算下列各题（7分×2 = 14 分）

1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(1+x+y), y(0)=-1$ 的特解. 2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$ 的通解.

六、(8分) 求微分方程 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

微积分II（第一层次）期末试卷参考答案2018.7.3

一、1. 解: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2});$$

2. 解: $+\infty$是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\cdot x^{1+\frac{1}{n}}=1$, $1+\frac{1}{n}>1$, 所以原广义积分收敛。

3. 解：令$t=(x-3)^2$, 对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n5^n}$, $a_n=\dfrac{1}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}$, 所以$R=5$. $t=5$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 发散; 所以$0\le(x-3)^2<5$, 解得$3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为$(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

4. 解: 原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x\cot y=\cos y$, 关于$x$是一阶线性方程，解得

$$x=e^{-\int\cot y\mathrm{d}y}(C+\int\cos y e^{\int\cot y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y)=\frac{C}{\sin y}+\frac{\sin y}{2}.$$

$y(1)=\dfrac{\pi}{6}$代入得$C=\dfrac{3}{8}$, 所以所求特解为$8x\sin y=3+4\sin^2 y$.

5. 这是一个全微分方程，通解为$\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+5x-\dfrac{3}{y^2}=C$.

二、解: 设$S_1: z=0,((x,y)\in D)$ 取下侧, 其中$D: x^2+y^2\le a^2$. Ω是S与S_1所围立体，

$P=x^3+az^2, Q=y^3+ax^2, R=z^3+ay^2$, 则

$$\iint\limits_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5},$$

$$\iint\limits_{S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4},$$

所以 $I=\dfrac{6\pi a^5}{5}+\dfrac{\pi a^5}{4}=\dfrac{29}{20}\pi a^5$

三、解: 设C所围的正六边形为$S: x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, 取上侧，则S的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 由斯托克斯公式， $I_2=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_{S}(x+y+z)\mathrm{d}S=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3a}{2}\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3a}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2=-\dfrac{9}{2}a^3$.

四、解: $a_n=\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}=\dfrac{2}{n^p(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}\sim\dfrac{1}{n^{p+1/2}}$，所以 $p>\dfrac{1}{2}$时绝对收敛，$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$时，非绝对收敛. $-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$时，原级数是交错级数，用莱布尼茨判别法可得级数条件收敛；$p\le-\dfrac{1}{2}$时，一般项不趋向于0，级数发散.

五、解：$f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}=\dfrac{1}{2x+5}+\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{5}(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}+\dfrac{1}{9}(1-\dfrac{x}{3})^{-2}$

$$(1+\frac{2}{5}x)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}(\frac{2}{5}x)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^n}x^n,\quad x\in(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}),$$

$$(1-\frac{x}{3})^{-2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!}(-\frac{x}{3})^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}x^n,\quad x\in(-3,3),$$

所以 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}\Big)x^n,\ \ x\in\Big(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\Big)$.

六、$f(x)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\ \ x\in[0,\pi)$.

在上式中取 $x=\frac{\pi}{2}$, 得 $I=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$, 于是

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots=I+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots=I+\frac{1}{3}I=\frac{\pi}{3}.$$

七、$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-2x+\frac{e^{2x}}{10}(\cos x+2\sin x)$.

八、解：(1) 在 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$.

因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$.

且 $f'(0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}$.

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}(1+4f^2(x))=f'(0)(1+4f^2(x)),$$

即 $f'(x)=a(1+4f^2(x))$, 这是一个可分离变量的方程，解得 $f(x)=\frac{1}{2}\tan(2ax+C)$,

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 所以 $f(x)=\frac{1}{2}\tan(2ax)$.

(2) $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{2}{x},\quad f(x)=2+Cx$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2019.6.17)

一、 1. 解：平面方程为 $z=\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}y-\frac{9}{4}$, $(x,y)\in D$, 其中 $D: x^2+(y-3)^2\le 9$.

则所求面积 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{9}{8}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{8}\cdot 9\pi=\frac{81}{8}\pi$.

2. 解：$a_n=n\arcsin\frac{\pi}{5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\frac{\pi}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$, 所以级数收敛.

3. 解：$x=1$ 是奇点. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sqrt{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$, 所以广义积分收敛.

4. 解：这是伯努利方程，令 $y^2=u$, 方程化为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}u=-1$, 通积分为 $y^2=Cx-x\ln|x|$.

5. 解：方程化为 $(x^2-y+5)\mathrm{d}x-(x+y^2+2)\mathrm{d}y=0$, 是全微分方程，通积分为 $\frac{x^3-y^3}{3}-xy+5x-2y=C$.

二、解：直线 L 过点 $M_0(\frac{27}{8},-\frac{27}{8},0)$, 方向向量为 $(10,2,-2)\times(1,1,-1)=8(0,1,1)$.

设切点为 (x_0,y_0,z_0), 则法向量为 $(3x_0,y_0,-z_0)$, 切平面方程为 $3x_0x+y_0y-z_0z=27$.

所以 $\begin{cases} 3x_0\cdot\frac{27}{8}+y_0\cdot(-\frac{27}{8})=27, \\ (3x_0,y_0,z_0)\cdot(0,1,1)=0, \\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27. \end{cases}$ 解得 $(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1)$ 或 $(-3,-17,-17)$,

所以切平面方程为 $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z=-27$.

三、解: 记 $P(x,y)=(x+y+1)e^x-e^y+y,\ Q(x,y)=e^x-(x+y+1)e^y-x$, 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$

$$\int_{C+\overline{AO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint\limits_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{其中 } D \text{ 为旋轮线的一拱与 } x \text{ 轴所围的区域})$$

$$=2\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi a^2,$$

所以 $I_1=6\pi a^2+\displaystyle\int_0^{2\pi a}((x+1)e^x-1)\mathrm{d}x=6\pi a^2+2\pi a(e^{2\pi a}-1)$.

四、方法一: 设 $S_1: z=0,\ (x^2+y^2\le 1)$, 取下侧, 则

$$\iint\limits_{S+S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (\text{柱坐标})$$

$=6\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^3+\rho z)\mathrm{d}z=2\pi$, 所以

$$I_2=2\pi-\iint\limits_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

方法二: $S: z=1-x^2-y^2,\ (x,y)\in D,\quad D: x^2+y^2\le 1$, 则

$$I_2=\iint\limits_D\Big(2x^3(-z_x')+2y^3(-z_y')+3\big((1-x^2-y^2)^2-1\big)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D(7x^4+7y^4-6x^2-6y^2+6x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{极坐标})$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\Big(7\rho^5\cos^4\theta+7\rho^5\sin^4\theta-6\rho^3+6\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\Big)\mathrm{d}\rho=-\pi.$$

五、解：$x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$, 令 $x=\dfrac{1}{k}$, 则 $\dfrac{1}{k+1}<\ln\Big(1+\dfrac{1}{k}\Big)$, 取 $k=1,2,\cdots,n-1$,

再将各式相加可得 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\ln n+1<2\ln n\ (n\ge 3)$, 所以 $\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}<\dfrac{2\ln n}{n^2}$.

而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n^2}\cdot n^{\frac{3}{2}}=0$, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ln n}{n^2}$ 收敛. 由比较判别法，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 收敛.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}a_k\Big(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\Big)=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$=1-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{a_n}{n+2}$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=1$.

六、解：令 $t=x^2$, 对于级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$, $a_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n}{(2n-1)2^{n+1}}=\frac{1}{2}$,

所以 $R=2$. $t=2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2}$ 发散; 所以 $0\le x^2<2$, 收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, 则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^{2n-1}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n=\dfrac{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}{1-\frac{x^2}{2}}=\dfrac{x}{2-x^2}$,

所以 $S(x)=\left(\dfrac{x}{2-x^2}\right)'=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=S(1)=3.$

七、解：$f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0,\ n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4\pi^2}{3},\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2},\ n=1,2,\cdots,$$

所以 $\pi^2-x^2=\dfrac{2}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi]$.

代入 $x=0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$, 代入 $x=\pi$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{6}+\dfrac{\pi^2}{12}=\dfrac{\pi^2}{4}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

八、解：$y_1-y_3=e^{-x}$ 是对应的齐次方程的一个解，则 $y_4=y_2-e^{-x}=xe^x$ 是非齐次方程的一个解，$y_1-y_4=e^{2x}$ 是对应的齐次方程的另一个解。所以 $-1,2$ 是特征根。

二阶线性非齐次微分方程为 $y''-y'-2y=f(x)$, 将 $y_4=xe^x$ 带入方程可得 $f(x)=(1-2x)e^x$.

所以微分方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$, 通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2020.8.18)

一、 解：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, $f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$,

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

$$\omega=f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)=xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\omega}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\rho\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时, $f'_x(x,y)=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$,

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{\rho\to0^+}(\rho\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}-\cos^2\theta\sin\theta\cos\dfrac{1}{r})$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续可微.

二、1. $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z+27=0$.

2. 解：$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le2a^2}\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}+\dfrac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}a} \Big(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-\rho^2}} + \frac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a}\Big)\rho\mathrm{d}\rho = \frac{16}{3}\pi a^2.$$

3. $I = \int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\frac{y}{x^2}\Big|_{y=x^2}^{y\to+\infty} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$

三、1. 曲线的参数方程为 $x=\cos\theta, y=\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, z=\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, \theta$ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$, 则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \frac{1}{2}.$$

2. 记 $S: x+y=R$ 后侧, $I = \iint\limits_S (y+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{R}{\sqrt{2}}\iint\limits_S \mathrm{d}S = -\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$

3. 设 $S_1: z=0, ((x,y)\in D)$ 取下侧, 其中 $D: x^2+y^2\le a^2$. Ω 是 S 与 S_1 所围立体，

$P = x^3+az^2, Q = y^3+ax^2, R = z^3+ay^2$, 则

$$\iint\limits_{S+S_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{6\pi a^5}{5},$$

$$\iint\limits_{S_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho = -\frac{\pi a^5}{4},$$

所以 $I = \frac{6\pi a^5}{5} + \frac{\pi a^5}{4} = \frac{29}{20}\pi a^5$

四、1. 解：$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $a_n = \frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^4})\Big) \sim \frac{1}{3n^3}$,
所以级数收敛.

2. 解：$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, a_n 单调减，$\frac{1}{2n} < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，所以由莱布尼茨判别法可知原级数收敛；由 $a_n > \frac{1}{2n}$ 可知原级数非绝对收敛, 故原级数条件收敛.

3. 解：设 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$, 两边积分得

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\Big)' = x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)' = \frac{x}{(1-x)^2}, (|x|<1)$$

两边求导 $S(x) = \Big(\frac{x}{(1-x)^2}\Big)' = \frac{x+1}{(1-x)^3}, (-1<x<1)$. 令 $x=-\frac{1}{3}$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n} = \frac{9}{32}$.

4. $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos n\pi x, x\in(-\infty,+\infty)$, 取 $x=0$ 即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

五、1. $\tan(1+x+y) - \sec(1+x+y) = x-1$.

2. 原方程可以写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{2x}{y} = -2\frac{x^2}{y^3}$, 这是一个关于 x 的伯努利方程，通积分为 $y^2 = C\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x}}$.

六、$y = (C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2019.6.17)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求平面 $x+4y-8z=18$ 被圆柱面 $x^2+y^2=6y$ 所截部分的面积.
2. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\arcsin\frac{\pi}{5^n}$ 的敛散性.
3. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.
4. 求微分方程 $2xy\cdot y'-y^2+x=0$ 的解.
5. 求微分方程 $\displaystyle\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2-y+5}{x+y^2+2}$ 的通积分.

二、(10分) 求过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 且与曲面 $S:3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的切平面方程.

三、(10分) 设 $C: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(t\in[0,2\pi])$ 为旋轮线的一拱，方向由原点到 $A(2\pi a,0)$, 计算 $I_1=\displaystyle\int_C [(x+y+1)e^x-e^y+y]\mathrm{d}x+[e^x-(x+y+1)e^y-x]\mathrm{d}y$.

四、(10分) 计算 $I_2=\displaystyle\iint_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\geq 0)$ 的上侧.

五、(10分) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

六、(10分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域、和函数，并由此计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

七、(10分) 将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成余弦级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

八、(10分) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求出此微分方程，写出其通解.

微积分II（第一层次）期末试卷参考答案 (2019.6.17)

一、 1. 平面方程为 $z=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{9}{4}$, $(x,y)\in D$, 其中 $D: x^2+(y-3)^2\le 9$.

则所求面积 $S=\displaystyle\iint_D\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{9}{8}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{8}\cdot 9\pi=\frac{81}{8}\pi.$

2. $a_n=n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\arcsin\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\arcsin\frac{\pi}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\frac{\pi}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$,

所以级数收敛.

3. $x=1$ 是奇点. $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sqrt{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$, 所以广义积分收敛.

4. 这是伯努利方程，令 $y^2=u$, 方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}u=-1$, 通积分为 $y^2=Cx-x\ln|x|$.

5. 方程化为 $(x^2-y+5)\mathrm{d}x-(x+y^2+2)\mathrm{d}y=0$, 这是全微分方程，通积分为 $\frac{x^3-y^3}{3}-xy+5x-2y=C$.

二、 解：直线 L 过点 $M_0(\frac{27}{8},-\frac{27}{8},0)$, 方向向量为 $(10,2,-2)\times(1,1,-1)=8(0,1,1)$.

设切点为 (x_0,y_0,z_0), 则法向量为 $(3x_0,y_0,-z_0)$, 切平面方程为 $3x_0x+y_0y-z_0z=27$.

所以 $\begin{cases}3x_0\cdot\frac{27}{8}+y_0\cdot(-\frac{27}{8})=27,\\(3x_0,y_0,-z_0)\cdot(0,1,1)=0,\\3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27.\end{cases}$ 解得 $(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1)$ 或 $(-3,-17,-17)$,

所以切平面方程为 $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z=-27$.

三、 记 $P(x,y)=(x+y+1)e^x-e^y+y$, $Q(x,y)=e^x-(x+y+1)e^y-x$, 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$

$$\int_{C+\overline{AO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad(\text{其中 } D \text{ 为旋轮线的一拱与 } x \text{ 轴所围的区域})$$

$$=2\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi a^2,$$

所以 $I_1=6\pi a^2+\displaystyle\int_0^{2\pi a}((x+1)e^x-1)\mathrm{d}x=6\pi a^2+2\pi a(e^{2\pi a}-1)$.

四、方法一: 设 $S_1: z=0$, $(x^2+y^2\le1)$, 取下侧, 则

$$\iint_{S+S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega 6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\qquad(\text{柱坐标})$$

$=6\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^3+\rho z)\mathrm{d}z=2\pi$, 所以

$$I_2=2\pi-\iint_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi+\iint_{x^2+y^2\le1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

方法二: $S: z=1-x^2-y^2$, $(x,y)\in D$, $D: x^2+y^2\le1$, 则

$$I_2=\iint_D\Big(2x^3(-z_x')+2y^3(-z_y')+3\big((1-x^2-y^2)^2-1\big)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(7x^4+7y^4-6x^2-6y^2+6x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad(\text{极坐标})$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left(7\rho^5\cos^4\theta + 7\rho^5\sin^4\theta - 6\rho^3 + 6\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\rho = -\pi.$$

五、(10分)　设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

解：$x > 0$ 时，$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$, 令 $x = \frac{1}{k}$, 则 $\frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, 取 $k = 1, 2, \cdots, n-1$,

再将各式相加可得 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n + 1 < 2\ln n\ (n \geq 3)$, 所以 $\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} < \frac{2\ln n}{n^2}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = 0$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\ln n}{n^2}$ 收敛. 由比较判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 收敛.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2 - a_1}{3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}$$

$= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

六、　令 $t = x^2$, 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{n-1}$, $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot 2^n}{(2n-1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$,

所以 $R = 2$. $t = 2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$ 发散; 所以 $0 \leq x^2 < 2$, 收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$, 则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} = \frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2-x^2}$,

所以 $S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$,　$x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.　　$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = S(1) = 3$.

七、 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n = 0$, $n = 1, 2, \cdots$.

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4\pi^2}{3}$,　　$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$, $n = 1, 2, \cdots$,

所以 $\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$,　$x \in [-\pi, \pi]$.

代入 $x = 0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$,　代入 $x = \pi$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^{n+1}}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4}, \text{所以} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

八、 $y_1 - y_3 = e^{-x}$ 是对应的齐次方程的一个解，则 $y_4 = y_2 - e^{-x} = xe^x$ 是非齐次方程的一个解，

$y_1 - y_4 = e^{2x}$ 是对应的齐次方程的另一个解。所以 $-1, 2$ 是特征根。

二阶线性非齐次微分方程为 $y'' - y' - 2y = f(x)$, 将 $y_4 = xe^x$ 带入方程可得 $f(x) = (1-2x)e^x$.

所以微分方程为 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$, 通解为 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + xe^x$.

参考答案:

08 级: 一、1. $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(y^2)+y^2e^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2xy\cos(y^2)+e^{xy}+xye^{xy}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x\cos(y^2)-4xy^2\sin(y^2)+2xe^{xy}+x^2ye^{xy}$. 2. 45/8; 3. $2\pi^2a^3(2\pi^2+1)$; 4. 1/4;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n$, $x\in[-1/2,1/2)$; 6. (5 , 2 , 12); 7. $\sqrt{\pi}/2$; 8. $-x+y-z=0$;

9. $4\pi a^4$; 10. $\arctan x$.二、$\frac{4}{15}\pi abc^3$. 三、1. 用莱布尼茨判别法；2. 用部分和序列的极限.

四. 1. $\frac{x}{2\sqrt{x_0}}+\frac{y}{2\sqrt{y_0}}+\frac{z}{2\sqrt{z_0}}=1$; 2. 4. 五. 1. $\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2},(|x|\le 1)$,

2. $\pi^2/8$; 3. $\pi^2/6$. 六. 2π.

09 级:1. 1/5; 2. $2ab\pi/3$; 3. $10/\sqrt{11}$; 4. 收敛，值为π;

5. $y=C_1\sin x+C_2\cos x+x^2-2$; 6. $x^2+y^2=Ce^{-2\arctan(x/y)}$; 7. $2\pi/3$; 8. 2π.

二. $f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1},(|x|\le 1)$. 三. P>1 绝对收敛, $0<p\le 1$条件收敛.

四. $f(x)=\tan x$. 五. $f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\cos nx,(-\pi\le x\le\pi),\frac{\pi^2}{12},\frac{\pi^2}{24}$.

六. $R=(\sqrt{5}+1)/2, f(x)=x/(1-x-x^2)$.

10 级:

一. 1. $(x^2+y^2)f_1'$; 2. $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

3. $2\pi/3$; 4. 条件收敛; 5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{4n+2}(|x|<1)$; 6. $-4/(9\pi)$;

7. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{4}e^{-x}$. 二. $\frac{1}{2}\ln(1+\pi^2)-2$. 三. $0<a<1$绝对收敛, a>1 绝对收敛, a=1 发散. 四. e-(7/3).

五. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}\cos x\ln|\sec x+\tan x|+\frac{1}{2}\sin x\ln|\csc x-\cot x|$.

六. (1) $6\pi/5$, (2) $32\pi/5$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2012.6.20)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 10=60分)

1. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧.

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ 的和.

4. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

5. 求微分方程 $y''+y=x^2$ 的通解.

6. 求微分方程 $(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

7. 求函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式.

8. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的敛散性.

9. 计算曲线积分 $\displaystyle\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$.

10. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint_\Omega y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{4x^2+4y^2}$ 与 $z=2$ 所围立体.

二、(10分)　讨论实数 p 为何值时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^p$ 收敛，实数 p 为何值时，级数发散.

三、(10分)　设函数 $f(x),g(x)$ 连续可微，$f(0)=g(0)=0$, 使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}\Big((x^2-f(x))y+\frac{1}{2}g(x)y^2\Big)\,\mathrm{d}x+\big(f(x)y-g(x)\big)\,\mathrm{d}y+\,\mathrm{d}z$$

与路径无关，求出 $f(x),g(x)$, 并求出该曲线积分的值.

四、(10分)　1. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\pi^2-x^2,\ (-\pi\le x\le\pi)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶级数展开式；

2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 的和.

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

五、(本题非商学院的学生必做题，10分) 已知曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 恒等于常数 A, 其中函数 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$, L 为任意包围原点 $O(0,0)$ 的简单闭曲线，取正向，

(1) 设 G 为不包含原点的单连通区域，证明：G 内的曲线积分 $\displaystyle\int_C\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 与路径无关，其中 C 为完全位于 G 内的曲线；

(2) 求函数 $f(x)$ 与常数 A.

六、(本题商学院学生做，非商学院学生做了不给分，10分)　利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_C(y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 是椭圆 $x^2+y^2=a^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1(a>0,h>0)$, 从 x 轴的正向看去，此椭圆取逆时针方向.

大学数学理一(II)期末试卷(A卷)参考答案 (2012.6.20)

一、1. $\pi a(a^2-h^2)$.

2. $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$, 由高斯公式，

原式 $=\displaystyle\iiint\limits_V\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_V(y-z)\,\mathrm{d}V=-\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=\int_0^3 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{9}{2}\pi.$

3. $\displaystyle\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\Big(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\Big)$

$\displaystyle S_n=\frac{1}{8}\bigg(\Big(1-\frac{1}{3^2}\Big)+\Big(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\Big)\bigg)=\frac{1}{8}\Big(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\Big)$, 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{8}$.

4. $\displaystyle l=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$, 所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{l}=1$. $x=1$ 时级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，这是莱布尼茨型的交错级数，收敛；当 $x=-1$ 时，级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$, 此级数发散，故收敛域为 $(-1,1]$.

5. 通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$

6. 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$, 这是一个齐次方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u-1}{u+1}$, 分离变量得 $\big(\dfrac{u+1}{1+u^2}\big)\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$, 两边积分得 $\ln(1+u^2)+2\arctan u=-2\ln|x|+\ln|C|$, 所以原方程的通积分为 $x^2+y^2=Ce^{-2\arctan\frac{y}{x}}$.

7. $\displaystyle\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n\quad(-1<x\le 1),\qquad \ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}x^n\quad(-1\le x<1)$, 因此

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1}\quad(-1<x<1),$$

8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^p\cdot\frac{\arctan x}{1+x^p}=\frac{\pi}{2}$, 所以 $p>1$ 时原广义积分收敛，$0<p\le 1$ 时，原广义积分发散.

9. 方法1： 设曲线 C 的参数方程为 $x=a\sin\theta\cos\theta, y=a\sin^2\theta\ (0\le\theta\le\pi)$, 则

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta}\sqrt{a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2+4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{\pi}a\sin\theta\sqrt{a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2a^2.$$

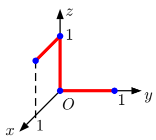
方法2： 设曲线 C 的参数方程为 $x=\dfrac{a}{2}\cos\theta, y=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\sin\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$, 则

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\sin\theta)}\sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2\theta+\frac{a^2}{4}\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}\Big(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\Big)^2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\Big|\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\Big|\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\Big(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\Big)\mathrm{d}\theta+\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\Big(-\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\Big)\mathrm{d}\theta=2a^2.$$

10. 采用柱坐标，原式 $\displaystyle=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{2\rho}^{2}\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{10}$.

二、 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, 所以 $\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^p = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right)^p \sim \frac{1}{6^p n^{3p}}$, 所以原式当 $3p > 1$ 即 $p > \frac{1}{3}$ 时收敛, 当 $3p \le 1$ 即 $p \le \frac{1}{3}$ 时发散.

三、 $P = (x^2 - f(x))y + \frac{1}{2}g(x)y^2$, $Q = f(x)y - g(x)$, $R = 1$, 积分与路径无关的充要条件是 $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 即 $f'(x)y - g'(x) = x^2 - f(x) + g(x)y$, 整理得 $(f'(x) - g(x))y = g'(x) - f(x) + x^2$ 此式对所有的 x, y 都成立，必有 $f'(x) - g(x) = 0, g'(x) - f(x) + x^2 = 0$. 整理得 $f''(x) - f(x) = -x^2$, 这是二阶非齐次线性常系数微分方程，且有初始条件 $f(0) = 0, g(0) = f'(0) = 0$, 解得 $f(x) = -e^{-x} - e^x + x^2 + 2, g(x) = f'(x) = e^{-x} - e^x + 2x$.



因为积分与路径无关，沿如图所示折线积分，可得

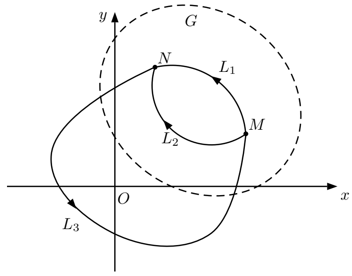
原式 $= \int_0^1 0\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}z + \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 1$.

四、 1. 显然 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 连续. 所以 $b_n = 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi^2$,

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}$, 故 $f(x) = \pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos nx$, $(-\pi \le x \le \pi)$.

在上式中分别令 $x = 0$, $x = \pi$ 可得 $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

五、 证明：(1) 如图所示，设 M, N 是 G 内任意两点， L_1, L_2 是 G 内连接 M, N 的任意两条曲线，只需要证明



$$\int_{L_1} \frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{L_2} \frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$$

取 L_3 为连接 M, N 的曲线，使得 $L_1 + L_3$ 为包围原点的简单闭曲线，则 $L_2 + L_3$ 也是包围原点的简单闭曲线，据题意可知

$$\int_{L_1 + L_3} \frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{L_2 + L_3} \frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = A,$$

所以 $$\int_{L_1} \frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{L_2} \frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

(2) $P = \frac{-y}{f(x) + 8y^2}$, $Q = \frac{x}{f(x) + 8y^2}$, 因为积分和路径无关，所以 $Q'_x = P'_y$, 即

$$\frac{8y^2 - f(x)}{(f(x) + 8y^2)^2} = \frac{f(x) + 8y^2 - xf'(x)}{(f(x) + 8y^2)^2},$$

可得 $xf'(x) = 2f(x)$, 分离变量解得 $f(x) = Cx^2$, 又 $f(1) = 1$, 所以 $f(x) = x^2$.

取 $l : x^2 + 8y^2 = \varepsilon^2$, 即 $x = \varepsilon\cos\theta, y = \frac{1}{\sqrt{8}}\varepsilon\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, 则

$$A = \int_L \frac{1}{x^2 + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_l \frac{1}{x^2 + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

六、见教材163页例7.6.6.

微积分II（第一层次）期末试卷(2013.6.26)

一、计算下列各题(5分 $\times$ 10=50分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\ \mathrm{d}S$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径, 收敛区间和收敛域.

4. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

5. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 判别广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 若收敛，计算其值.

7. 计算曲面积分 $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0, y\geq 0$ 的部分.

8. 计算曲线积分 $\int_l\dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 l 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, 积分按逆时针方向进行.

9. 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面的方程.

10. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是区域 $x^2+y^2+z^2\leq 4z, \sqrt{x^2+y^2}\leq z$.

二、(8分) 设区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leq z\leq t, x^2+y^2\leq t^2\}\ (t>0)$, 函数 $f(u)$ 可导并且 $f(0)=0, f'(0)=2, F(t)=\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^5}$.

三、(10分) 设函数 $f(x)$ 二阶连续可微，满足 $\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 求函数 $f(x)$.

四、(12分) 计算曲线积分 $\int_l(x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z$, 其中积分曲线 l 是从 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的螺线 $x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$.

五、(12分) 1. 设函数 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，且 $f(x)=2+|x|, (-1\leq x\leq 1)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的傅立叶展开式;

2. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.　　3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

六、(8分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续可微函数，使得广义积分 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，证明：如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 收敛，则广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

大学数学理一(II)期末试卷(A卷)参考答案 (2013.6.26)

一、 1. $\pi a(a^2-h^2)$.

2. 解法1： $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},\qquad 2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}},$

$$S_n=2S_n-S_n=1+\big(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\big)+\big(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\big)+\cdots+\big(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}\big)-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n},\qquad \text{所以 } S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\big)=3.$$

解法2： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},\qquad$ 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,

则 $S(x)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\int_0^x x^{n-1}\mathrm{d}x\right)'=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$,

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=S\big(\frac{1}{2}\big)=4$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\big(1-\frac{1}{2^n}\big)}{1-\frac{1}{2}}=1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=4-1=3$.

3. 令 $x+1=t$, 则原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n,\ a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3+(-2)(-\frac{2}{3})^n}{1+(-\frac{2}{3})^n}=3$, 收敛半径$R=\frac{1}{3}$.

收敛区间为$t\in\big(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big)$, 即 $x\in\big(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\big)$.

当 $x=-\frac{4}{3}$ 时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(\frac{2}{3}\big)^n$, 两个级数都收敛, 故原级数收敛;

当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(-\frac{2}{3}\big)^n$, 一个收敛一个发散，故原级数发散;

所以级数的收敛域为 $\big[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\big)$.

4. 原方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+5=0$, 解之得 $\lambda=1\pm 2i$, 因此所求通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

5. 原方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1}$, 这是一个齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$, 原方程化为 $u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u=\frac{u^2}{u+1}\mathrm{d}x$, 分离变量得 $\big(1+\frac{1}{u}\big)\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, 两边积分得 $u+\ln|u|=-\ln|x|+C$, 所以原方程的通积分为 $\frac{y}{x}+\ln|y|=C$. 另外 $y=0$ 是奇解. (或者原方程的通积分为 $ye^{\frac{y}{x}}=C$.)

6. $$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{3}\big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\big)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_2^A=\frac{2}{3}\ln 2.$$

7. 计算曲面积分 $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\ge 0,y\ge 0$ 的部分.

解法1 记 $S_1:z=\sqrt{1-x^2-y^2},(x,y)\in D_{xy}$, 取上侧；$S_2:z=-\sqrt{1-x^2-y^2},(x,y)\in D_{xy}$, 取下侧；其中 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$, 则

$$\iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{S_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{S_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}} xy\big(-\sqrt{1-x^2-y^2}\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{2}{15}.$$

解法2　曲面 S 的方程为 $x=\sqrt{1-y^2-z^2}$, $(y,z)\in D_{yz}$, $D_{yz}=\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\le 1, y\ge 0\}$.

$$\iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2-z^2}\cdot yz\cdot(-x_z')\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}} yz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{2}{15}.$$

8.　$P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y)\ne(0,0)$, 令 $c: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向，则由格林公式可得 $\displaystyle\int_{l+c^-}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$, 所以 $\displaystyle\int_l\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_c\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$

9.　设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则 $z_0=\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2$, 点 M_0 处的法向量为 $\overrightarrow{n_0}=(x_0,2y_0,-1)$, 平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(2,2,-1)$, $\overrightarrow{n_0}//\overrightarrow{n}$, 所以 $x_0=2, y_0=1, z_0=3$, 故所求切平面方程为 $2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$, 即 $2x+2y-z=3$.

10.　用球坐标变换将 Ω 变为 Ω', 　Ω': $0\le r\le 4\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$, $0\le\theta\le 2\pi$,

$$\text{原式}=\iiint_{\Omega'} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{56}{3}\pi.$$

二、　采用柱坐标变换，则　$\displaystyle F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{d}\rho\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}z=2\pi t\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho}{t^4}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi t f(t^2)}{4t^3}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2-0}=\frac{\pi}{2}f'(0)=\pi.$$

三、(10分)　将 $x=0$ 代入 $\displaystyle\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 可得 $f(0)=1$.

$\displaystyle\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$　化简得　$\displaystyle(x+1)\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$,

两边对 x 求导数得　$\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+(x+1)f'(x)-xf'(x)=2x+e^x-f'(x)$,

即　$f(x)-f(0)+f'(x)=2x+e^x-f'(x)$, 化简得　$f'(x)+\dfrac{1}{2}f(x)=x+\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}$,

这是一阶线性非齐次方程，解之得　$f(x)=e^{\int-\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\Big(C+\displaystyle\int\big(x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\big)e^{\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=Ce^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{3}e^x+2x-3$

又因为 $f(0)=1$, 所以 $C=\dfrac{11}{3}$, 所以 $f(x)=\dfrac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{3}e^x+2x-3$.

四、解法1　记 $P=x^2-yz$, $Q=y^2-xz$, $R=z^2-xy$, 则 $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=0$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$,

所以积分与路径无关，取直线段 $L:\begin{cases}x=a,\\ y=0\end{cases}$ $0\le z\le h$, 则　原式$=\displaystyle\int_0^h z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}h^3$.

解法2　记 $P=x^2-yz$, $Q=y^2-xz$, $R=z^2-xy$, 则 $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=0$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$,

$$(x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}\Big(\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-xyz\Big),$$

原式 $=\Big(\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-xyz\Big)\Big|_{(a,0,0)}^{(a,0,h)}=\frac{1}{3}h^3.$

五、 (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0(n=1,2,\dots)$. $\quad a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5.$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}\sin n\pi x$$
$$=\frac{2}{n\pi}(x+2)\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],\qquad n=1,2,\cdots$$

$$f(x)=\frac{5}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi x.\qquad x\in[-1,1].$$

(2) 在上式中令 $x=0$, 得 $f(0)=\frac{5}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}\Longrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$

六、证明：因为 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^{A}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\Big(\int_1^{[A]}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$

$$=\lim_{A\to+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{[A]-1}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{A\to+\infty}\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

要证广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，只需证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

因为 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-f(1)$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

$$\min_{x\in[[A],A]}f(x)\cdot(A-[A])\le\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\le\max_{x\in[[A],A]}f(x)\cdot(A-[A]),$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\min\limits_{x\in[[A],A]}f(x)=\lim\limits_{A\to+\infty}\min\limits_{x\in[[A],A]}f(x)=0$. 而 $|A-[A]|\le1$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

令 $a_n=\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(n)$,

$$|a_n|=\Big|\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(n)\Big|=\Big|\int_n^{n+1}(f(x)-f(n))\,\mathrm{d}x\Big|=\Big|\int_n^{n+1}\Big(\int_n^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x\Big|$$
$$\le\int_n^{n+1}\Big(\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|=\sum\limits_{k=1}^{n}\Big|\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(k)\Big|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 有上界，

部分和数列有上界，所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+f(n))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2014.6.23)

一、简答题(6分 $\times$ 8=48分)

1. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域.

2. 求积分 $I=\displaystyle\int_C \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ 的一段弧.

3. 求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 的通积分.

4. 已知 $f(x)$ 为 $[0,2]$ 上的连续函数，证明 $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 u[f(u)+f(2-u)]\,\mathrm{d}u$.

5. 求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 关于 x 的幂级数展式.

6. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ (p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

7. 求函数项级数 $I(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$ 的和函数.

8. 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 外侧在 $z\geq 0$ 的部分.

二、(10分)　求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n n!}$ 的和.

三、(10分)　计算曲线积分 $\displaystyle\int_\Gamma 2y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+e^z\,\mathrm{d}z$, 其中积分曲线 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y=1 \end{cases}$ 从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分)　计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截得的有限部分.

五、(10分)　设 $f(x)=|x|$,

1. 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi)$ 上的正弦级数展式的前两项系数 b_1 和 b_2；

2. 证明：对于二元函数 $F(a,b)=\displaystyle\int_0^{\pi}\Big[f(x)-a\sin x-b\sin(2x)\Big]^2\mathrm{d}x$, (b_1,b_2) 为其在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点.

商学院同学任选下列两题中一题，其他院系同学必须选做第七题.

六、(12分)　(1) 求方程 $y''-5y'+6y=e^x$ 的通解.

(2) 设 $y=f(x)$ 为 $y'''-5y''+6y'=e^x$ 的解，证明：$y=f(x)$ 为 $y''-5y'+6y=e^x$ 的解的充要条件为 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

七、(12分)　(1) 求方程 $y''-5y'+6y=f(x)$ 的通解, 其中 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(2) 若 $f(x)\geq 0$, 证明上述方程满足条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的解必非负.

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2014.6.23)

一、 1. 收敛域为 $(\frac{1}{e}, e)$.

2. $I=\int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^2\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}(1+4x^2)=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{17^{\frac{3}{2}}-1}{12}$.

3. 设 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$, 分离变量得 $\frac{1}{p}\mathrm{d}p=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$,

两边积分得 $p=\frac{C_1}{y}$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{y}$, 分离变量得 $y\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$, 积分得 $y^2=C_1x+C_2$.

4. 设$x+y=u, y-x=v$, $J(u,v)=\frac{1}{2}$,

原式$=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}v+2\int_1^2\mathrm{d}u\int_0^{2-u}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}v=\int_0^1 uf(u)\mathrm{d}u+\int_1^2(2-u)f(u)\mathrm{d}u$

$(2-u=t)=\int_0^1 uf(u)\mathrm{d}u+\int_0^1 tf(2-t)\mathrm{d}t=\int_0^1 u[f(u)+f(2-u)]\,\mathrm{d}u$.

5. $f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, 所以 $f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x\in(-1,1]$.

6. $x=0, x=+\infty$ 是两个奇点，原式$=\int_0^1\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x=I_1+I_2$,

对于 I_1, $x=0$ 是唯一奇点，$\frac{x^p}{1+x^2}\sim x^p=\frac{1}{x^{-p}}$, 所以 I_1 仅当 $-p<1$ 即 $p>-1$ 时收敛；

对于 I_2, $x=+\infty$ 是唯一奇点，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2-p}\cdot\frac{x^p}{1+x^2}=1$, 所以 I_2 仅当 $2-p>1$ 即 $p<1$ 时收敛；

综上，原广义积分仅当 $-1<p<1$ 时收敛.

7. 级数的收敛域为$[-1.1]$; $xI(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=S(x)$,

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$, $\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$, $\quad x\in(-1,1)$, $\qquad S(0)=S'(0)=0$,

所以 $S'(x)=S'(0)+\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$,

$S(x)=S(0)-\int_0^x\ln(1-x)\mathrm{d}x=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)$, $x\in[-1,1)$,

$I(0)=0$, $\quad I(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1$.

所以 $I(x)=\begin{cases}1+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1\end{cases}$

8. 设 $S_1: z=0, x^2+y^2\le R^2$ 取下侧, 由高斯公式 $\iint\limits_{S+S_1}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi R^4}{2}$.

所以 $I=\dfrac{\pi R^4}{2}-\displaystyle\iint\limits_{S_1} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{\pi R^4}{2}$.

二、 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\ x\in\mathbb{R},\quad$ 原式 $\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})^n}{(n+1)!}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)!}=-2(e^{-\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{2})=-2e^{-\frac{1}{2}}+1.$

三、 $P=2y,Q=x,R=e^z,\quad S:x+y=1$ 取左侧，

原式 $\displaystyle=\iint\limits_{S}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S}-1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

四、 曲面 S 关于 $y=0$ 对称，$xy+yz$ 关于 y 是奇函数，所以 $\displaystyle\iint\limits_{S}(xy+yz)\,\mathrm{d}S=0$;

原式 $\displaystyle=\iint\limits_{S}zx\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\cos\theta\mathrm{d}\rho=\frac{64\sqrt{2}}{15}.$

五、 1. $\displaystyle b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=2,\qquad b_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=-1;$

2. $\displaystyle F(a,b)=\int_0^{\pi}\Big[f(x)-a\sin x-b\sin(2x)\Big]^2\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\Big[x-a\sin x-b\sin(2x)\Big]^2\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x+a^2\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x+b^2\int_0^{\pi}\sin^2 2x\mathrm{d}x-2a\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x-2b\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x+2ab\int_0^{\pi}\sin x\sin 2x\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi}{2}a^2+\frac{\pi}{2}b^2-2a\pi+b\pi=\frac{\pi}{2}\big[(a-2)^2+(b+1)^2\big]-\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi^3}{3}$, 显然 $F(a,b)$ 在 $(2,-1)$ 处取得最小值.

六、 (1) 特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$. 设原方程有特解 $y^*=Ce^x$, 代入原方程得 $C=\dfrac{1}{2}$, 所以原方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\dfrac{1}{2}e^x$.

(2) 若 $y=f(x)$ 为 $y''-5y'+6y=e^x$ 的解，则由(1)知 $f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$, 所以 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

对于三阶方程 $y'''-5y''+6y'=e^x$，其特征方程为 $\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0$, 解得 $\lambda=0,2,3$, 设此方程有特解 $y^*=Ce^x$, 代入方程得 $C=\dfrac{1}{2}$, 所以此三阶方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+C_3+\frac{1}{2}e^x$.

所以若 $y=f(x)$ 为 $y'''-5y''+6y'=e^x$ 的解，则 $f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+C_3+\frac{1}{2}e^x$, 若 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, 则 $C_3=0$, 所以 $f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$, $y=f(x)$ 是 $y''-5y'+6y=e^x$ 的解.

七、 (1) 特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

所以对应的齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$;

设 $y^*=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)e^{3x}$ 是原方程的解，则 $\begin{cases}C_1'(x)e^{2x}+C_2'(x)e^{3x}=0,\\ 2C_1'(x)e^{2x}+3C_2'(x)e^{3x}=f(x),\end{cases}$

解得 $\displaystyle C_1(x)=-\int_0^x e^{-2t}f(t)\mathrm{d}t,\ C_2(x)=\int_0^x e^{-3t}f(t)\mathrm{d}t,$

原方程的通解为 $\displaystyle y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\int_0^x(e^{3x-3t}-e^{2x-2t})f(t)\mathrm{d}t.$

(2) 证明： 若 $y(0)=y'(0)=0$，则由(1)知 $C_1=C_2=0$, 从而 $\displaystyle y=\int_0^x(e^{3x-3t}-e^{2x-2t})f(t)\mathrm{d}t.$

当 $x>0$ 时，$e^{3x-3t}-e^{2x-2t}>0,\ t\in(0,x)$; 当 $x<0$ 时，$e^{3x-3t}-e^{2x-2t}<0,\ t\in(x,0)$; 从而当 $f(x)\ge 0$ 时，$y\ge 0$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2015.6.22)

一、计算下列各题(5分 $\times$ 11=55分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D |y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $|x|\le 1, 0\le y\le 2$.

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2+2z=5$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面和法线.

4. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 若收敛，计算其值.

5. 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 计算曲线积分 $\oint_C \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$, 其中 C 为 $y=x^2$ 与 $y=x$ 所围区域的边界，取逆时针方向.

7. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{3^n}-\frac{7}{10^n}\Big)$是否收敛，如果收敛，求其和.

8. 计算曲线积分 $\int_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 l 为包含单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在内的分段光滑的简单闭曲线，取逆时针方向.

9. 求解微分方程 $(e^x\sin y-2y\sin x)\mathrm{d}x+(e^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=0$.

10. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域, 并求其和函数.

11. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ 的值.（提示：可利用上题结果）

二、(12分)　计算曲面积分 $\iint\limits_S \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 $a>0$ 是一个常数, S 是曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,

三、(12分)　设函数 $Q(x,y)$ 连续可微，曲线积分 $\int_C 3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，且对一切实数 t 都有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 求函数 $Q(x,y)$.

四、(13分)　1. 求函数 $f(x)=x^2, (-\pi\le x\le\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶展开式；

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ 的和.　　3. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

五、(8分) (本题非商学院的考生做)　设 $a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\ (n=1,2,\cdots)$,

证明：(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛；　(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

六、(8分) (本题商学院的考生做)　讨论当实数 p 为何值时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\right)^p$ 收敛, 实数 p 为何值时, 级数发散.

微积分II(第一层次)期末参考答案 (2015.6.22)

一、1. 曲面 S 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D$, $D:\ x^2+y^2\le a^2-h^2$,
原式$=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D a\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2)$.

2. 原式$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y=\dfrac{46}{15}$.

3. 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2z-5$, 则 $\boldsymbol{n}=(F'_x(1,1,1),F'_y(1,1,1),F'_z(1,1,1))=(2,2,4)=2(1,1,2)$, 于是曲面在 $(1,1,1)$ 的切平面方程为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$, 法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

5. 原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1}$, 这是一个齐次微分方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 于是原方程变为 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2}{u+1}$, 分离变量得 $\left(1+\dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 两边积分, 得 $u+\ln|u|+C=-\ln|x|$, 所以原方程的通积分为: $\dfrac{y}{x}+\ln|y|+C=0$. $y=0$ 为奇解. (通积分也可写成 $y=Ce^{-\frac{y}{x}}$.)

6. $\displaystyle\oint_C \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=\int_0^1[2x\arctan x-1]\mathrm{d}x+\int_1^0(\arctan 1-1)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-1$.

7. $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{7}{10}(1-(\frac{1}{10})^n)}{1-\frac{1}{10}}\right)=-\frac{5}{18}$. 所以级数收敛，和为$-\dfrac{5}{18}$.

8. 记 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在 l 与单位圆周 $C:x^2+y^2=1$ 所围的区域内成立，故积分与路径无关，所以 $\displaystyle\int_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$.

9. 记 $P=e^x\sin y-2y\sin x,Q=e^x\cos y+2\cos x$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-2\sin x$, 这是一个全微分方程，$u(x,y)=\displaystyle\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(e^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=e^x\sin y+2y\cos x$, 所以原方程的通解为 $e^x\sin y+2y\cos x=C$.

10. 令 $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^2=x^2$, 所以 $|x|<1$ 时级数收敛，$|x|>1$ 时级数发散，而 $x=\pm1$ 时，易知级数收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$. 设 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, 则 $S(0)=0$, $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, 所以 $S(x)=S(0)+\displaystyle\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x$, $x\in[-1,1]$.

11. 在上题中令 $x=1$ 得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

二、 设 $S_1:z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧, 记 V 是 S 与 S_1 所围立体.

$$I=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}$$

$$=\iint\limits_{S+S_1}\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}-\iint\limits_{S_1}\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}$$

$$=\iiint\limits_{V}\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_1}\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}=\frac{2}{3}\pi a^3+\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{3}\pi a^3.$$

三、 设 $P(x,y)=3x^2y$, 因为积分与路径无关，所以 $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)=3x^2$, 故 $Q(x,y)=x^3+\varphi(y)$.

又因为 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,1)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1Q(0,y)\mathrm{d}y+\int_0^t3x^2\mathrm{d}x=\int_0^1Q(0,y)\mathrm{d}y+t^3,$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^tQ(0,y)\mathrm{d}y+\int_0^13x^2t\mathrm{d}x=\int_0^tQ(0,y)\mathrm{d}y+t,$$

所以 $\displaystyle\int_0^1Q(0,y)\mathrm{d}y+t^3=\int_0^tQ(0,y)\mathrm{d}y+t$, 两边对 t 求导得 $3t^2=Q(0,t)+1$, 即 $Q(0,t)=3t^2-1$, 所以 $\varphi(y)=Q(0,y)=3y^2-1.$ 所以 $Q(x,y)=x^3+3y^2-1.$

四、 (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0\ (n=1,2,3\cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}.\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2},(n=1,2,3,\cdots).$$

而 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $f(-\pi)=f(\pi)$, 所以 $\displaystyle f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,\ \ (-\pi\le x\le\pi).$

(2) 在上式中令 $x=0$, 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$

(3) 在(1)中令 $x=\pi$, 得 $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 与(2)式相加得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

五、 (1) $\displaystyle\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}<\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n},\ (n\ge2),$

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^2}<\frac{1}{S_1}+\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)=\frac{2}{a_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{2}{a_1},$$

而正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有界，所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

(2) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 的部分和为 σ_n, 即 $\displaystyle\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_k}}$, $\displaystyle\sigma_n>\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_n}}>\sqrt{S_n}$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛，则 σ_n 有上界，由上式可知 S_n 有上界，故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. $\displaystyle\sigma_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_1}}=\frac{S_n}{\sqrt{a_1}},$ 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 S_n 有上界，由上式可知 σ_n 有上界，故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛.

六、 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e-(1+\frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}}=\frac{e}{2}$, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ 与级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 敛散性相同，$p>1$ 时收敛，$p\le1$ 时发散.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2016.6.20)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}$.

2. 设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} u^2-v+xy=0,\\ u+v^2+x-y=0\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

3. 求证级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 收敛，并求其和。

4. 求微分方程 $y'-y=xy^3$ 的通解.

5. 求微分方程 $yy''=(y')^2$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

二、(10分)　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性，可偏导性与可微性。

三、(10分)　求第一类曲面积分 $I_1=\displaystyle\iint_S x^2y^2\mathrm{d}S$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, x^2+y^2\leq R^2$.

四、(10分)　计算第二类曲面积分 $I_2=\displaystyle\iint_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $a>0$ 是一个常数, S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧. (提示：利用高斯公式)

五、(10分)　讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ 的敛散性。如果收敛，说明其是条件收敛还是绝对收敛.

六、(10分)　求 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 的马克劳林展式。

七、(10分)　将函数 $f(x)=x\ (0\leq x\leq\pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, 以及 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和。

八、(10分)　(1) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域；

(2) 设 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, 建立 $S(x)$ 所满足的微分方程，并求 $S(x)$.

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2016.6.20)

一、 1. $0<\left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}\le\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2}$, 而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2}=0$, 由夹逼准则可知，原式=0.

2. 设 $F=u^2-v+xy, H=u+v^2+x-y$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}}=-\dfrac{2vy+1}{4uv+1}, \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(u,y)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}}=\dfrac{2u+x}{4uv+1}$.

3. 方法1: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{2n-1}=\dfrac{1}{3}<1$, 由达朗贝尔判别法知原级数收敛。

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{3^{k-1}}-\frac{k+1}{3^{k+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{3}\right)=1.$$

方法2：构造幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$, 此幂级数的收敛域为(-1,1).

则 $\displaystyle\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^{n-1}=\frac{x}{1-x^2},\quad S(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},\quad x\in(-1,1).$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n-2}=\frac{1}{3}S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1.$$

4. 令 $y^{-2}=u$, 则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2u=-2x$, 通解为

$$u=y^{-2}=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(C+\int(-2x)\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=C\mathrm{e}^{-2x}-x+\frac{1}{2}.$$

5. 令 $y'=P(y)$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$, 分离变量积分得 $p=cy$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Cy$, 代入初值条件得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$, 分离变量积分得 $y=C_1\mathrm{e}^x$, 代入初值条件得 $y=\mathrm{e}^x$.

二、 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^3\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\rho^2}=0=f(0,0)$,

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

(2) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1,\quad f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{0}{y}=0$,

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

(3) 令 $f(x,y)-f(0,0)=f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+\omega$, 则 $\omega=\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-x=-2\rho\cos\theta\sin^2\theta$,

$\dfrac{\omega}{\rho}=-2\cos\theta\sin^2\theta\not\to0(\rho\to0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、 $$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}x^2y^2\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{Rx^2y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\frac{\rho^5}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{(\rho=R\sin t)}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{8}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^5\sin^5t\mathrm{d}t=\frac{2\pi R^6}{15}.$$

四、　设曲面$S_1: z=0, (x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧，则

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5}.$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4}.\qquad \text{原式}=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29\pi a^5}{20}.$$

五、　$|u_n|=\dfrac{1}{n+(-1)^n}\sim\dfrac{1}{n}$, $(n\to\infty)$, 而调和级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以原级数不绝对收敛；

$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=(-1)^n\dfrac{n}{n^2-1}-\dfrac{1}{n^2-1}$, 而级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}$是莱布尼兹型的交错级数，收敛；　级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$也收敛，所以原级数收敛且条件收敛.

六、　$f'(x)=\dfrac{1}{1-x^4}-1=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}$　$(|x|<1)$, 所以 $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$,　$|x|<1$.

七、　将$f(x)$进行偶延拓，则$b_n=0$　$(n=1,2,\cdots)$;　　$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi},\quad (n=2k-1,\quad k=1,2,\cdots)$$

所以 $x=\dfrac{\pi}{2}-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$,　$x\in[0,\pi]$.　　$x=0$代入上式得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S$, 所以$S=\dfrac{\pi^2}{6}$.

八、　(1)　$u_n(x)=\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{3n+1}(3n)!}{|x|^{3n}(3n+3)!}=0$, 所以收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)　$S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, $S''(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$, 可得微分方程 $\begin{cases}S''+S'+S=e^x,\\ S(0)=1,\ S'(0)=0.\end{cases}$

特征方程为$\lambda^2+\lambda+1=0$,　$\lambda=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 设特解为$y^*=Ae^x$, 代入原方程得 $y^*=\dfrac{1}{3}e^x$.

方程的通解为　$S=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\dfrac{1}{3}e^x$.

由初始条件$S(0)=1, S'(0)=0$可得$C_1=\dfrac{2}{3}, C_2=0$, 所以$S(x)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^x$.

($S(x)$满足的微分方程也可以是$S'''(x)-S(x)=0, S(0)=1, S'(0)=S''(0)=0.$)

微积分II（第一层次）期末试卷 (2017.7.4)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x - ye^y$ 的极值，并讨论是极大还是极小.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n+2}{n+1}\quad(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $(x^2y^3+xy)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$ 的通积分.

5. 求微分方程 $y''=1+(y')^2$ 的通解.

二、(10分)　计算 $I_1=\displaystyle\oint_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 C 取逆时针方向，分别取以下两种路径：

(1) 圆周 $x^2+y^2=2x+2y-1$;　　(2) 闭曲线 $|x|+|y|=1$.

三、(10分)　计算 $I_2=\displaystyle\oint_C\frac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+y=R$ 的交线，从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分)　计算第二类曲面积分 $I_3=\displaystyle\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取下侧.

五、(10分)　(1) 证明 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(2) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性。如果收敛，指明其是条件收敛还是绝对收敛，并说明理由.

六、(10分)　求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和。

七、(10分)　将函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内展开成傅里叶级数.

八、(10分)　(1) (非商学院学生做) 设 $f(x)$ 二阶连续可微，$g(x)$ 一阶连续可微，且满足 $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2e^x-f(x)$, 且 $f(0)=0$, $g(0)=2$, 计算 $I_4=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$.

(2) (商学院学生做) 设 $f(x)=x^3+1-x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2017.7.4)

一、1. 由$\begin{cases} f'_x = -(1+e^y)\sin x = 0, \\ f'_y = e^y(\cos x - 1 - y) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $P_1(2k\pi, 0)$, $P_2((2k-1)\pi, -2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$f''_{xx} = -(1+e^y)\cos x$, $f''_{xy} = -e^y \sin x$, $f''_{yy} = e^y(\cos x - y - 2)$,

对于 P_1, $A = -2, B = 0, C = -1, B^2 - AC < 0, A < 0$, 所以 $f(P_1) = 2$ 是极大值；

对于 P_2, $A = 1 + e^{-2}, B = 0, C = -e^{-2}, B^2 - AC > 0$, 所以 P_2 不是极值点.

2. $+\infty$ 是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = 1$, 所以原广义积分收敛。

3. $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^p} \sim \dfrac{1}{2^p n^{\frac{p}{2}+1}}$, 仅当 $\dfrac{p}{2} + 1 > 1$ 即 $p > 0$ 时原级数收敛.

4. 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - yx = y^3x^2$, 关于 x 是伯努利方程. 令 $x^{-1} = u$, 则方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + yu = -y^3$, 解得 $u = e^{-\int y\mathrm{d}y}\left(C - \displaystyle\int y^3 e^{\int y \mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right) = e^{-\frac{y^2}{2}}\left(C - 2e^{\frac{y^2}{2}}\big(\dfrac{y^2}{2} - 1\big)\right)$, 故通积分为 $x\left(Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2\right) = 1$.

5. 令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 1 + p^2$, 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{1+p^2} = \mathrm{d}x$, 两边积分得 $\arctan p = x + C_1$, 即 $y' = \tan(x + C_1)$, 解得通解为 $y = -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2$.

二、 (1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, 由格林公式得 $I_1 = 0$.

(2) 设曲线 $C_1 : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon < 0.5$, 取顺时针方向, 则

$$I_1 = \oint_{C+C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - \oint_{C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 0 - \oint_{C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = -2\pi.$$

三、 由斯托克斯公式, $I_2 = \displaystyle\iint_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（其中 S 为 $x + y = R$, 取后侧）

$$= -\iint_S \frac{\sqrt{2}R}{2}\mathrm{d}S = -\frac{\sqrt{2}}{2}R\cdot\pi\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}R\Big)^2 = -\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$$

四、 设曲面$S : z = 0, (x^2 + y^2 \le 1)$, 取上侧，则

$$\iint_{\Sigma+S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_\Omega (2z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 2r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$I_3 = \frac{3\pi}{2} - \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} - \iint_{x^2+y^2\le1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

五、证明：(1) 设 $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由不等式 $n^2 > (n+1)(n-1)$ 可得,

$$(a_n)^2 = \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2} < \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{(1\cdot3)(3\cdot5)\cdots(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}, \text{所以 } a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(2) 由于 $0 < a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 且 $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} < a_n$,

由莱布尼茨判别法可得级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$收敛.

又$a_n=1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}$, 所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$发散. 故原级数条件收敛.

六、方法一：考虑幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n$, 此幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

则$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$, $S(x)=\left(xe^x\right)'=(x+1)e^x$. 令$x=2$即得$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=3e^2$.

方法二：注意到 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=2e^2+e^2=3e^2.$$

七、 因为$f(x)$是偶函数，所以$b_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$;

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\big(-x\cos x+\sin x\big)\Big|_0^{\pi}=2,$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\big(-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\big)\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\big(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\big)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\Big(-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x+\frac{x}{n-1}\cos(n-1)x-\frac{1}{(n-1)^2}\sin(n-1)x\Big)\Big|_0^{\pi}\\&=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1},\ (n=2,3,\cdots).\end{aligned}$$

所以 $x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx,\qquad x\in(-\pi,\pi)$.

八、 (1) 由题意可得$f(x)$满足的微分方程为$f''(x)+f(x)=2e^x, f(0)=0, f'(0)=2$, 解这个微分方程得$f(x)=-\cos x+\sin x+e^x$.

$$I_4=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}f(x)-\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

(2) $f(x)$满足的微分方程为$f''(x)+f(x)=6x, f(0)=1, f'(0)=0$, 解得$f(x)=\cos x-6\sin x+6x$.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2018.7.3)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 其中 $f(v)$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$ 的收敛域.

4. 求微分方程 $(x-\sin y)\mathrm{d}y+\tan y\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y(1)=\dfrac{\pi}{6}$ 的特解.

5. 求微分方程 $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+5\right)\mathrm{d}x+\left(-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{6}{y^3}\right)\mathrm{d}y=0$ 的通积分.

二、(10分)　计算 $I_1=\displaystyle\iint_S(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ 的上侧.

三、(10分)　计算 $I_2=\displaystyle\oint_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 C 是立方体 $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ 的交线，从 z 轴正向看去是逆时针方向.

四、(10分)　对常数 p, 讨论数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛，何时条件收敛，何时发散.

五、(10分)　试将函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$ 展成马克劳林级数，并写出其收敛域.

六、(10分)　将函数 $f(x)=\dfrac{x}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并求级数 $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$ 的和.

七、(10分)　求二阶微分方程 $y''-y=2x+e^{2x}\cos x$ 的通解.

八、(10分)　(1)（非商学院学生做）设函数 $f(x)$ 对定义域内任意两点 x,y 有等式 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0)=a$ $(a\neq 0)$, 求函数 $f(x)$.

(2)（商学院学生做）已知 $\displaystyle\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a=\frac{1}{2}f(x)+1$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分II（第一层次）期末试卷参考答案2018.7.3

一、1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})；$$

2. $+\infty$ 是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\cdot x^{1+\frac{1}{n}}=1$, $1+\frac{1}{n}>1$, 所以原广义积分收敛。

3. 解法一： 令 $t=(x-3)^2$, 对于级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n5^n}$, $a_n=\dfrac{1}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}$, 所以 $R=5$. $t=5$ 时，级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 发散; 所以 $0\le(x-3)^2<5$, 解得 $3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为 $(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

解法二：令 $u_n=\dfrac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n(x-3)^2}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{(x-3)^2}{5}$, 当 $\dfrac{(x-3)^2}{5}<1$ 时，原级数绝对收敛；当 $\dfrac{(x-3)^2}{5}>1$ 时，原级数发散；当 $\dfrac{(x-3)^2}{5}=1$ 时，级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 发散; 所以 $\dfrac{(x-3)^2}{5}<1$, 解得 $3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为 $(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

4. 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x\cot y=\cos y$, 关于 x 是一阶线性方程，解得

$$x=e^{-\int\cot y\mathrm{d}y}(C+\int\cos y e^{\int\cot y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y)=\frac{C}{\sin y}+\frac{\sin y}{2}.$$

$y(1)=\dfrac{\pi}{6}$ 代入得 $C=\dfrac{3}{8}$, 所以所求特解为 $8x\sin y=3+4\sin^2 y$.

5. (全微分方程，通解为 $\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+5x-\dfrac{3}{y^2}=C$)

二、 设曲面 $S_1: z=0, (x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧，则

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5}.$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4}.\qquad \text{原式}=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29\pi a^5}{20}.$$

三、 设 C 所围的正六边形为 $S: x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, 取上侧，则 S 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 由斯托克斯公式,

$$I_2=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_{S}(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$$

四、 $a_n=\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}=\dfrac{2}{n^p(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}\sim\dfrac{1}{n^{p+1/2}}$，

所以 $p>\dfrac{1}{2}$ 时绝对收敛，$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，非绝对收敛。

$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，原级数是交错级数，用莱布尼茨判别法可得级数条件收敛；

$p\le-\dfrac{1}{2}$ 时，一般项不趋向于0，级数发散.

五、 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}=\dfrac{1}{2x+5}+\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{5}(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}+\dfrac{1}{9}(1-\dfrac{x}{3})^{-2}$

$(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}(\dfrac{2}{5}x)^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{5^n}x^n,\qquad x\in(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2})$,

$(1-\dfrac{x}{3})^{-2}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!}(-\dfrac{x}{3})^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}x^n,\qquad x\in(-3,3)$,

所以 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\dfrac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\dfrac{2^n}{5^{n+1}}\Big)x^n,\quad x\in\Big(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\Big)$.

六、$f(x)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in[0,\pi)$.

在上式中取 $x=\dfrac{\pi}{2}$, 得 $I=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots=\dfrac{\pi}{4}$, 于是

$1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots=I+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{21}+\cdots=I+\dfrac{1}{3}I=\dfrac{\pi}{3}$.

七、$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-2x+\dfrac{e^{2x}}{10}(\cos x+2\sin x)$.

八、(1) 在 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$.

因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

且 $f'(0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)-f(0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{y}$.

$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{y}(1+4f^2(x))=f'(0)(1+4f^2(x))$,

即 $f'(x)=a(1+4f^2(x))$, 这是一个可分离变量的方程，解得 $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax+C)$,

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax)$.

(2) $f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=-\dfrac{2}{x},\quad f(x)=2+Cx$.

三. 级数

§1. 常数项级数

大收敛
小收敛
小发散
大发散

重点：正项级数的比较判别法、比值判别法（根）及对应的极限形式；$\lim$

交错级数的莱布尼次定理；会判定绝对收敛与条件收敛.

例1. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的.

证明：由于 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\Big/\frac{1}{n}=1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

故由比较判别法极限形式知，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

1. 大收敛 → 小收敛
小发散 → 大发散

2. $\frac{1}{n^p}$. $p>1$ 收敛
$p\le 1$ 发散.

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

4. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

<1 收敛
>1 发散

例2. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的收敛性.

证明：由于 $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n}=1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

例3. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 的收敛性.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 有相同敛散性

证明：由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2}) \Big/ \frac{1}{n^2} = 1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ 收敛.

例4. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\,(1-\cos\frac{\pi}{n})$ 的收敛性.

证明：$1-\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin^2(\frac{\pi}{2n}) \sim \frac{\pi^2}{2n^2} \quad (n\to+\infty)$

故 $\sqrt{n+1}\,(1-\cos\frac{\pi}{n}) \sim \frac{\pi^2}{2n^{3/2}} \quad (n\to+\infty)$

又 ∵ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^{3/2}}$ 收敛. $\frac{1}{n^p}$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\,(1-\cos\frac{\pi}{n})$ 收敛.

例5. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$ 的收敛性.

证明：$\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}\Big/\frac{n^4}{n!} = \frac{(1+\frac{1}{n})^4}{n+1} \to 0 \quad (n\to+\infty)$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$ 收敛.

例6. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\frac{3}{4})^n$ 的收敛性.

解：由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(\frac{3}{4})^n}=\frac{3}{4}<1$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{3}{4})^n$ 收敛.

练习：① 判定下列级数敛散性.

ⅰ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ ⅱ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ ⅲ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$

ⅳ $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ⅴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ ⅵ $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

② 判定下列级数敛散性.

ⅰ $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ ~~ⅱ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(n+1)}{n^2}$~~

ⅱ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$

ⅲ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_n>0$ 且 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geq 1+\lambda\ (\lambda\geq 0,\ n=2,3,\cdots)$

ⅳ $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]^p\ (p\in\mathbb{R})$

例7. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 的收敛性.

解：$\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$

又 $\because\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛.

例8. 判定 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$ 的收敛性. ($\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$)

解: 由于 $\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{n} 2\sin k\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\alpha\right)-\cos\left(\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\alpha\right)\right)$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$

又: $\{\frac{1}{n}\}$ 单调下降趋于0,

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$ 收敛;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n} \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n\alpha)}{2n}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\alpha)}{2n}$ 收敛 (论法同上), $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n}$ 发散.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$ 为条件收敛.

例9. 判定 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$ 敛散性.

解: $\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}\right|}\to\frac{1}{3}<1\ (n\to+\infty)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛. $n!$ n^n

例10. 判定 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$ 敛散性. $n!$

解: $\sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{n!}}=\frac{2^n}{\sqrt[n]{n!}}\geq\frac{2^n}{\sqrt[n]{n^n}}=\frac{2^n}{n}>1$

$$=\frac{(1+1)^n}{n}>\frac{C_n^2}{n}=\frac{n-1}{2}\geq 2\ (n\geq 5)$$

故 $\frac{2^{n^2}}{n!}>2^n\ (n\geq 5)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$ 发散.

练习: ③ 设$f(x)$在$x=0$的某一邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛;

④ 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_{n}^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}$ 的敛散性. 若收敛, 是条件收敛, 还是绝对收敛.

§2. 幂数项级数

重点：会求幂级数的收敛半径及收敛域；会利用导数或积分求(幂)级数的和；会对一些基本函数进行泰勒展式。~~重要~~

例11. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径与收敛域.

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|=1$

所以收敛半径

$R=\frac{1}{\rho}=1$

$x=1$处，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛

$x=-1$处，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ 发散

故收敛域为 $(-1,1]$.

例12. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径

解：注意到表达式为关于 x^2 的级数

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\Big/\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4$$

从而收敛半径

$R=\sqrt{\frac{1}{p}}=\frac{1}{2}$

例13. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解：由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}/\frac{1}{n}\right|=1$

∴收敛半径为1.

$x=-1$时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛；

$x=1$时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散.

∴收敛域为 $[-1,1)$

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，则

$(xS(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$；$x\in(-1,1)$，且 $S(0)=1$

$\therefore xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1-s}ds=-\ln(1-x)$

$\therefore S(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}$，$x\neq 0$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1; & x=0.\end{cases}$$

例14. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^n}$ 的和.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^n}$ $\quad x^{2n+1}\quad \frac{1}{2^n}$.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big/\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right|=x^2<1$

∴收敛域为 $(-1,1)$ (此时，$x=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散；$x=-1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2n+1}$ 发散)

$\frac{1}{2^n}=x^{2n}$

$(\frac{1}{2})^n=x^{2n}$

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, $\quad S(0)=0$.

$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$, $\quad |x|<1$

从而 $S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-s^2}ds=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\frac{1}{1+s}+\frac{1}{1-s}\right]ds$ $\quad 2^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x\in(-1,1)$ $\quad \frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}\cdot\sqrt{2}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^n}=S(\frac{1}{\sqrt{2}})\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\quad \frac{1}{2n+1}\cdot\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{2n+1}\cdot 2^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2n+1\cdot 2^n}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})^2$

$=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$

练习：⑤ 求下列级数收敛区间及和函数.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$；(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$；

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$；(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}$

⑥ 求下列级数的和.

ⅰ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$；　ⅱ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$；

ⅲ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+3)}$；　ⅳ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n\cdot n!}$

例15. 求 a^x $(a>0, a\neq1)$ 的麦克劳林展开式.

解：$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，$x\in\mathbb{R}$　　$e^x-1=x$

$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}\cdot x^n$，$x\in\mathbb{R}$

例16. 求 arctanx 的麦克劳林展开式.　　arctanx

解：$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$|x|<1$　　$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots x^n$

从而
$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，$|x|<1$

故
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，$|x|<1$

$\therefore \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，

$x=\pm1$ 时，上述级数收敛.

$\therefore \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，$|x|\le1$

例17. 求 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的泰勒展开式.(在 $x=0$ 处).

解: $\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)x^n,\quad |x|<1$$

$$\therefore \ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\quad \left(\ln\frac{1+0}{1-0}=0\right)$$

$x=\pm1$ 时, 上述级数发散.

$$\therefore \ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad |x|<1.$$

练习: ⑦ 求下列函数的麦克劳林展式

(i) $\ln(2+x)$; (ii) $\frac{1}{x^2-5x+6}$;

(iii) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; (iv) $\ln(1+x-2x^2)$

⑧ 求下列幂级数的和函数.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

§3. 傅里叶级数

知识点：① 周期函数 $\sin(lx)$, $\cos(lx)$ 的最小正周期 $\frac{2\pi}{l}$, 从而

$\{1, \sin x, \cos x, \cdots, \sin(nx), \cos(nx) \cdots\}$ 为 $[-\pi,\pi]$, $[0,2\pi]$ 上的正交函数系；

$\{1, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{\pi}{l}x, \cdots, \sin\frac{n\pi}{l}x, \cos\frac{n\pi}{l}x \cdots\}$ 为 $[-l,l]$, $[0,2l]$ 上的正交函数系.

② 会求函数在 $[-l,l]$, $[-\pi,\pi]$, $[0,2l]$, $[0,2\pi]$ 上的傅里叶级数及其和函数.

③ 会用傅里叶级数求一些常数项级数的和.

例18. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=|x|$，求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的傅里叶级数.

偶

解: $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{-2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

从而

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \cos(nx) = |x|. \quad -\pi \le x \le \pi.$$

例19. 将 $\overset{=x}{f(x)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展成傅里叶级数.

解: $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

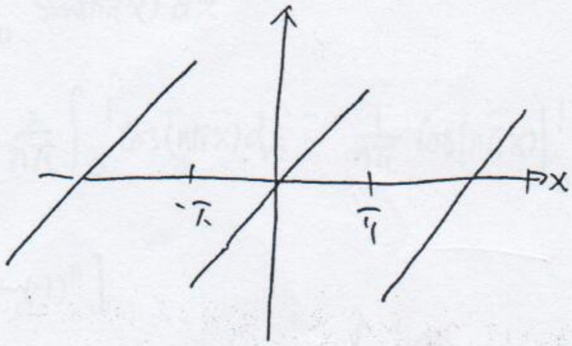
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\, x\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\therefore f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)$$



$$= \begin{cases} x, & x \in (-\pi,\pi) \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

例20. 将 $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x < 1, \\ x, & -1 \le x < 0 \end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上展成傅里叶级数.

解: $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\right]$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1}(x+1)\,dx\right] = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}\cos^2(n\pi x)\,dx}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx = 0$$

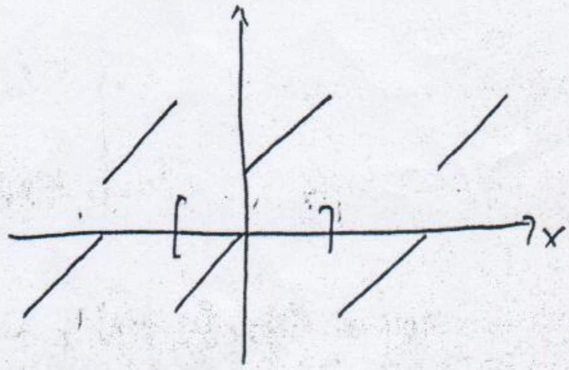
$$b_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}\sin^2(n\pi x)\,dx}\int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx + \int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}x\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos(n\pi x)\,dx - \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} + \frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}$$



$$\therefore f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = \pm 1, 0 \\ x, & -1 < x < 0, \\ x+1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

53

例21. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 内展开成余弦级数.

解: $$\hat{f}(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x\le\pi \\ -x+1, & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

从而

$$\hat{f}(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)dx=1+\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(x)\cos(nx)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\cos(nx)dx=\frac{2}{n\pi}x\sin(nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}=\frac{2[(-1)^n-1]}{\pi n^2}$$

$$\therefore\ \hat{f}(x)\sim 1+\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos(nx)$$

$$=\begin{cases} 1+x, & 0\le x\le\pi \\ 1-x, & -\pi\le x<0. \end{cases}$$

例22. 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,2\pi]$ 内展成傅里叶级数.

解: $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}x\cos(nx)\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}x^2\cos(nx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(nx)\,dx$$

$$= -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$= -\frac{4\pi}{n}$$

$$\therefore f(x) \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}\cos(nx) + (-1)\frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right]$$

$$= \begin{cases} 2\pi^2, & x = 0, 2\pi \\ x^2, & 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

-1

练习：⑨. 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $0\le x\le\pi$ 内展成正弦级数；

⑩. 将函数 $f(x)=3\ (0<x<\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 内展成正弦级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$；

⑪ 设 $f(x)=2+|x|,\ (-1\le x\le 1)$，

(i) 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 内的傅里叶级数；

(ii) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和；

(iii) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

§4. 广义积分.

知识点：了解两类广义积分收敛的定义（区域无限及函数无限），会广义积分的比较判别法及柯西判别法（及其极限形式）；会处理类似 $\ln x$ 的情形.

例23. 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+\sqrt{x}}dx$ 的敛散性

解：$x=+\infty$ 是唯一奇点，

$\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \quad (x\to+\infty)$.

$\frac{x^{-1}}{x^{\frac{1}{2}}}$

$x^{-\frac{3}{2}}$

由于 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx = \frac{1}{2}$

故 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+\sqrt{x}}dx$ 收敛.

例24. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}dx$ 的敛散性.

解：$x=+\infty$ 是唯一奇点，

$\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \quad (x\to+\infty)$

由于 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx = \frac{1}{2}$.

故 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}dx$ 收敛

例25. $\int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx$ $\int_0^{+\infty}$

解：$x=0$, $x=+\infty$ 为两个奇点、

$\int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{-1/2}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx$

由于 $x^{-1/2}e^{-x} / x^{-1/2} \to 1 \quad (x\to0^+)$

$\int_0^1 x^{-1/2}dx=2$

$\therefore \int_0^1 x^{-1/2}e^{-x}dx$ 收敛.

又 $|x^{-1/2}e^{-x}|\le e^{-x},\ x\ge 1$

$\therefore 0\le\int_1^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx \le \int_1^{+\infty} e^{-x}dx=e^{-1}$

$\therefore \int_1^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx$ 收敛

$\therefore \int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx$ 收敛

例26. $\int_0^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 的收敛性.

解: 令 $v=\frac{1}{x^2}$, 则 $dx=-\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}dv$

$\therefore \int_0^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}v^{-\frac{3}{2}}\sin v\,dv$

$v=0,+\infty$ 为两个奇点. 从而

$\int_0^{+\infty}v^{-\frac{3}{2}}\sin v\,dv=\int_0^1 v^{-\frac{3}{2}}\sin v\,dv+\int_1^{+\infty}v^{-\frac{3}{2}}\sin v\,dv.$

$\int_0^1|v^{-\frac{3}{2}}\sin v|dv\le\int_0^1 v^{-\frac{1}{2}}dv=2$

$\int_1^{+\infty}|v^{-\frac{3}{2}}\sin v|dv\le\int_1^{+\infty}v^{-\frac{3}{2}}dv=2$

$\therefore \int_0^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 收敛.

例27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx$ 的收敛性.

解: 令 $u=\cos x$, 则 $dx=\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx = \int_0^1 \frac{\ln u}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$u=0,1$ 为两个奇点、

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{\sqrt{1-u^2}}\,du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln u}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

由于 $\frac{u^{1/2}\ln u}{\sqrt{1-u^2}} \to 0 \ (u\to 0^+)$, 从而 $\exists\, C>0$, s.t. $\left|\frac{u^{1/2}\ln u}{\sqrt{1-u^2}}\right| \le C \ (0\le u\le \frac{1}{2})$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\ln u}{\sqrt{1-u^2}}\right| du \le C\int_0^{\frac{1}{2}} u^{-1/2}\,du = \sqrt{2}\,C$$

又 $\frac{\ln u}{\sqrt{1-u^2}} \sim -\frac{\sqrt{1-u}}{2} \ (u\to 1^-)$ 且 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-u}\,du$ 收敛

$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln u}{\sqrt{1-u^2}}\,du$ 收敛

$\therefore \int_0^1 \frac{\ln u}{\sqrt{1-u^2}}\,du$ 收敛

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx$ 收敛

例28. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln^3 x}$ 的敛散性.

解: $x=1$ 是唯一奇点.

$\frac{1}{\ln^3 x} = \frac{1}{\ln^3(1+x-1)}$

$\frac{1}{\ln^3 x}$

$\therefore \frac{1}{\ln^3 x} \Big/ \frac{1}{(x-1)^3} \to 1 \quad (x \to 1^+)$

$x-1$

又 $\because \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$ 发散

$\frac{(x-1)^3}{\ln^3 x}$

$\therefore \int_1^2 \frac{dx}{\ln^3 x}$ 发散.

例29. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^2 x} dx$ 敛散性.

解: $x=+\infty$ 为唯一奇点.

$\alpha>1$ 时

$\int_e^{+\infty} \left|\frac{1}{x^\alpha \ln^2 x}\right| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ 收敛.

$\alpha=1$ 时.

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 x} d\ln x = \int_1^{+\infty} \frac{dv}{v^2} = 1$ 收敛.

$\alpha<1$ 时,

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha \ln^2 x}dx=\int_e^{+\infty}\frac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}\ln^2 x}dx$$

此时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln^2 x}=+\infty$，从而 $\exists C>0$. s.t. $\frac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln^2 x}\geq C\ (x\geq e)$

$\therefore \int_e^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\ln^2 x}dx\geq C\int_e^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}dx$ 发散.

综上，$\alpha\geq1$时，广义积分收敛；$\alpha<1$时，广义积分发散.

例30、讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 的收敛性

解：$x=0,+\infty$ 为两个奇点.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

$\int_0^1\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\leq\int_0^1 dx\leq1$ $\therefore\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

$$\int_1^A\frac{\sin x}{x}dx=-\int_1^A\frac{d\cos x}{x}=-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^A-\int_1^A\frac{\cos x}{x^2}dx$$
$$=\cos1-\frac{\cos A}{A}-\int_1^A\frac{\cos x}{x^2}dx$$

$$\int_1^A\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx\leq\int_1^A\frac{1}{x^2}dx=1-\frac{1}{A}$$

$\therefore\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\cos x}{x^2}dx$ 存在

$\therefore \lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\sin x}{x}dx$ 存在

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

$$\geq \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \int_1^{+\infty}\frac{1+\cos(2x)}{2x}dx$$

其中 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x}dx$ 收敛而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散

$\therefore \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛

注: 此题的前半部分可用阿贝尔判别法, 但一般常见的此题之类.

例31. 证明 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$ 条件收敛 ($\int_0^{+\infty}\cos x^2dx$ 也类似可证).

证: 令 $u=x^2$, 则 $dx=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du$, 从而

$\cancel{\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}}$ $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$, 利用例30而

本法或 P226 例8.7.4 而证明.

练习：⑫ 完成 P233-234/1, 2, 3 剩余部分.

IV 常微分方程

知识点：会解一阶、二阶常系数线性方程；会解一阶线性方程；会解可化为可分离变量形式的一阶方程；会结合Wronski行列式，利用降阶法求一些二阶方程的通解；会用常数变易法求解非齐次方程；会确定函数组线性相关与无关。

§1. 一阶微分方程

可解类型：

(1) $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$;

(2) $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$

(3) $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

(4) $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

(5) $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$

(6) $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ — 伯努利方程.

例1. 求一曲线，使曲线上任意一点、到该点的法线与x轴的交点之间的距离为常数a.

$y' \cdot -\frac{1}{y'} = -1$

$Y - y = -\frac{1}{y'}$

解：设曲线 $y=y(x)$，则其上任一点 (x,y) 处法线方程．

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \quad (y' \neq 0) \text{ 法线}$$

令 $Y=0$，得 $X = x + yy'$．于是 交点方程

$$\sqrt{(yy')^2 + y^2} = a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\therefore \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy = \pm dx$$

$$\therefore -\sqrt{a^2-y^2} = C_1 \pm x$$

$$\therefore (x+C)^2 + y^2 = a^2 \quad (y \neq 0,\ C = \pm C_1)$$

若 $y' = 0$ 时，$X = x$，$y = \pm a$ 在上述曲线上．

例2. 求解微分方程 $dy/dx=y/x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$

解: ① $\frac{1}{y}dy=\frac{1}{x}dx$ $\frac{1}{y}dy=\frac{1}{x}dx$

$\therefore \ln|y|=\ln|x|+C$

$\therefore y=C'x$, 其中 C' 为任意常数. y

② 令 $u=y/x$, 则 $dy=xdu+udx$

$\therefore xdu+udx=udx$

$\therefore du=0$

$\therefore y/x=C$

$\therefore y=Cx$, 其中 C 为任意常数.

例3. 求解微分方程

$u=x+2y+1$

$du=dx+2dy$

$$\frac{dy}{dx}=(x+2y+1)^2 \quad \therefore \frac{du}{dx}=1+2\frac{dy}{dx}=1+2u^2$$

解: 令 $u=x+2y+1$, 则 $du=dx+2dy$, 从而 $\therefore x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u)+C$

$$\frac{du}{dx}=1+2\frac{dy}{dx}=1+2u^2$$

从而通解 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u)+C$ $\frac{du}{dx}=\cancel{1+2u^2}\frac{1}{1+(\sqrt{2}u)^2}.$

故原方程通积分

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}(x+2y+1))+C$$

例4. 证明函数组 $x, \sin x, \ln x$ 线性无关.

证明：假设 $x, \sin x, \ln x$ 线性相关，则存在不全为0的常数 c_1, c_2, c_3，

使得 ① $\frac{1}{\sin 1}$ $\frac{\pi}{\ln\pi}$

$$c_1 x + c_2 \sin x + c_3 \ln x = 0$$

$x=1$ 代入：$c_1 + \sin 1\, c_2 = 0$

$x=\pi$ 代入：$c_1 + \frac{\ln\pi}{\pi} c_3 = 0$

由于 c_1, c_2, c_3 不全为0，故由上述两等式 c_1, c_2, c_3 都不为0，且

$$x - \frac{1}{\sin 1}\sin x - \frac{\pi}{\ln\pi}\ln x = 0$$

令 $x=2\pi$ 代入得

$$2\pi - \frac{\pi}{\ln\pi}\ln(2\pi) = 0$$

此式不成立，故假设不成立，即 $x, \sin x, \ln x$ 线性相关.

例5 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 2xe^x$ 的通解.

解：$\left(\frac{1}{x}y\right)' = 2e^x$

$\therefore \frac{y}{x} = 2e^x + c$

$\therefore y = 2xe^x + Cx$，其中C为任意常数.

$$(x+2)\frac{dy}{dx}-2y=e^x(x+2)^3$$

例6. 求 $(x+2)\frac{dy}{dx}-2y=e^x(x+2)^3$ 的通解.

~~$(x+2)\frac{dy}{dx}-2y=e^x(x+2)^3$ 的通解~~

~~$\frac{1}{(x+2)^2}\frac{dy}{dy}-2\frac{y}{(x+2)^2}$~~

解: $\left(\frac{y}{(x+2)^2}\right)'=e^x$

$\therefore \frac{y}{(x+2)^2}=e^x+c$

$\therefore y=(x+2)^2(e^x+c)$, 其中c为任意常数.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

例7. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-y^2}$.

$$\frac{dx}{dy}+P(y)x=Qy$$

解: $\frac{dx}{dy}=\frac{x-y^2}{y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=-y$

$\therefore x=e^{-\int p(y)dx}\left(c+\int(-y)e^{\int p(y)dy}dy\right)$

$\therefore \left(\frac{x}{y}\right)'=-1$

$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(c+\int(-y)e^{\int-\frac{1}{y}dy}dy\right)$

$\therefore x=-y^2+cy$, 其中c为任意常数.

$=e^{\ln y}\left(c+\int(-y)e^{-\ln y}dy\right)$

$=y(c-\int y^2dy)$.

例8. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-xy^2$ =

解: 令 $v=y^{-1}$ $(y\neq0)$, 则

$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}+x$

$\therefore \frac{dv}{dx}+\frac{v}{x}=x$

$\therefore (xv)'=x^2$

$\therefore xv=\frac{x^3}{3}+c$ $\therefore v=\frac{x^2}{3}+\frac{c}{x}$

从而

$y=\frac{1}{\frac{x^2}{3}+\frac{c}{x}}$, c为任意常数.

$y=0$ 也为解.

一. 刘维尔公式变形

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}=W(x_0)e^{-\int p(x)dx+c}=W(x_0)e^{-\int p dx dx}\cdot e^{c}$$

$$\triangleq C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

二. 二阶齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 如何求解? 用Th 10.6.3

即可, 先找其两个线性无关的解, 则可得到它的通解. 形式为

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

例10.6.5就是这样方法. ①先用观察法找到一个形如 e^{kx}. $\sin kx$. $\cos kx$

$ax+b$, ax^2+bx+c 等等这类简单函数的解. ②再用刘维尔公式的变形形式找到

另外一个~~解~~特. ③用刘维尔公式时, 会得到一个通解. 而这种方法只需找一个

一个特解即可. 因此可令其中一个 C_i 为0. 即可得到所需特解.

三. 非齐次二阶微分方程求解方法. $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$.

运用Th10.6.7.即可. ①先求出该方程对应的齐次方程的通解, 即 $y''+p(x)y'$

$+q(x)y=0$ 的通解. ②再用常数变易法求到该二阶非齐次微分方程的

特解 即可得到其通解. 形式为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$.

四. 常数变易法. 令 $y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$, 得到

$$\cancel{C_1'(x)e^x+C_2'(x)}=\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0\\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)\end{cases}$$

解出 $C_1'(x)$. $C_2'(x)$, 再积分即可求出一组 $C_1(x)$. $C_2(x)$ 再代入

$y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ 即可得到二阶非齐次微分方程

的一个特解.

五、二阶齐次常系数微分方程求解方法. $y''+py'+qy=0$

方法：1. 求出其特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的解.

2. 根据P280页的表格写出相应的特解.(背熟该表格)

3. 再写出通解.

六. 待定系数法用于求出非齐次线性常系数微分方程的特解.

要求：熟记Th10.6.17.并会熟练应用. | $y''+py'+qy=f(x)$

① 从 $f(x)=[A_s(x)\cos\beta x+B_t(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$ 找到几个量. s. t. α. β.

② 判断 $\alpha+i\beta$ 是否为其特征方程的解.

若不是，则 $k=0$.

③ 否则，计算 $\alpha+i\beta$ 为几重根，并记之为 k.

例如 $\pm i$ 为特征方程 $(\lambda^2+1)^2=0$ 的二重根.

(因为 $(\lambda^2+1)^2=(\lambda+i)^2(\lambda-i)^2=0$ 其中 $(x+i)^2=(x+i)(x+i)$

两个因式)

④ ~~故~~ 再令 $m=\max\{s,t\}$.

⑤ ~~令~~ 故令 $y^*=x^k[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$. 再将之

代入 $y''+py'+qy=f(x)$. 比较同类项系数, 即可得到

一个方程组. 解之即可.