微积分 I　Calculus I

第1章 极限与连续性

预备知识

和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

极限

夹逼定理(迫敛定理)

单调有界准则　单调、有界，极限存在。

两个基本极限　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

压缩映象原理　$\{x_n\}$不单调，$0<r<1$ 且 r 公共且固定

设 $0<r<1$ 和 A 是两个常数，$\{x_n\}$ 是一个给定的数列，若：

$|x_{n+1}-x_n|\le r|x_n-x_{n-1}|$ 或 $|x_{n+1}-A|\le r|x_n-A|$，则 $\{x_n\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

Hiene定理　$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=A \Leftrightarrow \forall x_n\to\Delta,\ \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

无穷小的主部　在某极限过程中，若 β 为基准无穷小，有 $\alpha\sim c\beta^k$，则称 $c\beta^k$ 为 α 的主部.

连续性

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$

连续函数的复合运算与极限运算可换序

间断点：第一类间断点　$f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 均存在

跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$

可去间断点：$f(x_0)$ 无定义 或 $f(x_0)\neq f(x_0^-)=f(x_0^+)$

第二类间断点：$f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 不同时存在

无穷间断点、振荡间断点

闭区间上连续函数

最值定理

介值定理：设 $f(x)\in C[a,b]$，M,m 分别为 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则对 $\forall\mu\in[m,M]$，存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\mu$.

第2章 导数与微分

可导性

函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

以直代曲：$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$

导数公式表

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $\quad(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Leibniz 公式：$[u(x)v(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$.

参数式二阶导数

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_\theta}{x_\theta}\right)=\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{y_\theta}{x_\theta}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}$ 即 $\frac{\text{一阶导对参数求导}}{x\text{ 对参数求导}}$.

微分学中值定理（一阶导证明）

* Darboux 定理（导函数的介值定理）：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$、

Rolle 定理：$f(x)\in C[a,b]$ 且在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

Lagrange 中值定理：$f(x)\in C[a,b]$ 且在 (a,b) 内可导 $\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Cauchy 中值定理：$f(x),\varphi(x)\in C[a,b]$ 且在 (a,b) 内可导，且 $\varphi'(x)\neq0\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$

Taylor 公式（高阶导证明）

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$ 或 $\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad \xi\in(x_0,x)}$

常用的 Maclaurin 公式：

$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$

$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{\sin(\theta x+\frac{2m+1}{2}\pi)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\quad(0<\theta<1)$

$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{\cos(\theta x+(m+1)\pi)}{[2(m+1)]!}x^{2(m+1)}$

$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+1}\quad(0<\theta<1)$

$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\quad(0<\theta<1)$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}\quad(0<\theta<1)$

证明技巧

A. 含二阶导数的证明题.（构造辅助函数）

A.1 设函数 $f(x)\in C[0,3]$，$f(x)\in D^2(0,3)$，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$.

证明：(1) $\exists\eta\in(0,2)$，使得 $f(\eta)=f(0)$；

(2) $\exists\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

证明：(1) 由积分中值定理，$\exists\eta\in(0,2)$ 使得 $\int_0^2 f(x)dx=2f(\eta)=2f(0)$，即 $f(\eta)=f(0)$.

(2) 令 $\boxed{g(x)=f(x)-\frac{f(2)+f(3)}{2}}$ $\quad g(2)\cdot g(3)=-\left(\frac{f(2)-f(3)}{2}\right)^2\leq0$、

若 $g(2)\cdot g(3)=0$，则 $g(2)=0$ 或 $g(3)=0$

若 $g(2)\cdot g(3)<0$，则由 $\boxed{\text{零点定理}}$，$\exists\zeta\in(2,3)$，使得 $g(\zeta)=0$. 即 $f(\zeta)=\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$

由于 $f(0)=f(\eta)=f(\zeta)$，且 $0<\eta<\zeta<3$，两次应用罗尔定理，有

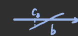
$\exists\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,\zeta)$ 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

再由罗尔定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$. □

A.2 设函数 $f(x)\in D[a,b]$，$f(x)\in D^2(a,b)$，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$。

求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$

证明：不妨设 $f'(a)>0$，$f'(b)>0$，故在 $x=a$ 的右邻域中 $\exists c_1$ 使 $f(c_1)>f(a)=0$。 

$x=b$ 的左邻域中 $\exists c_2$ 使 $f(c_2)<f(b)=0$。 

且 $c_1<c_2$。则由零点定理，$\exists c\in(c_1,c_2)$ 使 $\boxed{f(c)=0}$。 构造零点 二阶导 ⇒ 三零点

$\boxed{令 F(x)=e^x\cdot f(x)}$。 $F(x)\in D[a,b]$，$F(a)=F(b)=F(c)=0$

在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上，由罗尔定理，$\exists\eta_1\in(a,c)$ 使 $F'(\eta_1)=0$，$\exists\eta_2\in(c,b)$ 使 $F'(\eta_2)=0$

由于 $F'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$、 有 $f(\eta_1)+f'(\eta_1)=0$ $f(\eta_2)+f'(\eta_2)=0$ 构造一阶导的两零点

⇓

$\boxed{令 G(x)=e^{-x}\cdot f(x)}$ $G(x)\in D(a,b)$。由 $G(\eta_1)=G(\eta_2)=0$，有

在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上由罗尔定理，$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使 $G'(\xi)=0$。 二阶导的一零点

由于 $G'(x)=e^{-x}[f''(x)+f'(x)-(f'(x)+f(x))]$ 故 $f''(\xi)+f'(\xi)=f'(\xi)+f(\xi)$。

即 $f''(\xi)=f(\xi)$ □

A.3 设函数 $f(x)\in D[a,b]$ $(a>0)$。求证存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi)$。 对称性

证明：令 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}=k$。 分离 a,b，有 $\boxed{\dfrac{f(a)}{a}+\dfrac{1}{a}k=\dfrac{f(b)}{b}+\dfrac{1}{b}k}$

构造 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{1}{x}k=\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}\cdot\dfrac{1}{x}$。

故 $F(a)=\dfrac{f(a)}{a}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $F(b)=\dfrac{f(b)}{b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

即 $F(a)=F(b)$。 由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$。

由于 $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}\cdot\dfrac{1}{x^2}$ 令 $x=\xi$，即证。 □

A.4 设函数 $f(x)\in D^3[a,b]$ $(a>0)$。

求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\frac{1}{2}(f'(a)+f'(b))(b-a)-\frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3$。

证明：记 $\dfrac{12}{(b-a)^3}\left[\frac{1}{2}(f'(a)+f'(b))(b-a)-(f(b)-f(a))\right]=k$

$\Longleftrightarrow f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(f'(a)+f(b))(b-a)+\frac{1}{12}k(b-a)^3\equiv 0$

$\boxed{将 b 替换为 x}$。 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(f'(a)+f(x))(x-a)+\frac{1}{12}k(x-a)^3$

则 $F(a)=F(b)=0$。 $F(x)\in D[a,b]$。

由罗尔定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使 $F'(\eta)=0$。

又 $F'(x)=\frac{1}{2}(f'(x)-f'(a))-\frac{1}{2}f''(x)(x-a)+\frac{k}{4}(x-a)^2$。

$F'(a)=F'(\eta)=0$。 且 $F'(x)\in D[a,b]$

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,\eta)$，使 $F''(\xi)=0$。

又 $F''(x)=-\frac{1}{2}f'''(x)(x-a)+\frac{k}{2}(x-a)$ 代入 $x=\xi$ 即有 $k=f'''(\xi)$ □

A.5 设 $f(x)\in D^2[0,1]$，$|f''(x)|\le M$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值。

求证 $|f'(0)|+|f'(1)|\le M$。

证明：设 $f(x)_{max}=f(c)$。 故 $f'(c)=0$，$c\in(0,1)$。

在 $[0,c]$，$[c,1]$ 上，由拉格朗日中值定理。

存在 $\xi_1\in[0,c]$，$\xi_2\in[c,1]$，使得 $f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c$　　$f'(1)-f'(c)=f''(\xi_2)(1-c)$

即 $f'(0)=-f''(\xi_1)c$　　$f'(1)=f''(\xi_2)(1-c)$

于是 $|f'(0)|+|f'(1)|=|f''(\xi_1)|c+|f''(\xi_2)|(1-c)\le Mc+M(1-c)=M$ □

B、高阶导/导数最值：Taylor 展开.

B.1 $f(x)\in C^3$，于 $[-1,1]$，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$.

证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

证明：三阶连续导数、$f'(0)$ ⇒ 在 $x=0$ 处展开.

由 Maclaurin 公式，有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$.　$\eta\in(0,x)$，$x\in[-1,1]$

$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1)$，$-1<\eta_1<0$.

$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2)$，$0<\eta_2<1$.

故 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

由 $f'''(x)\in C[-1,1]$，有 $f'''(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上存在最大值 M，最小值 m.

故 $m\le\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\le M$.

再由连续函数介值定理，存在 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset[-1,1]$，使得 $f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3$. □

B.2 设 $f(x)\in D^2[0,1]$，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$.

求证：$\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\ge 8$

由题，$f(x)\in C, D[0,1]$.　由闭区间上连续函数最值定理，存在 $c\in(0,1)$，使 $f(x)_{min}=f(c)=-1$.

由 Fermat 引理，$f'(c)=0$.

$f(x)$ 在 $x=c$ 处的一阶 Taylor 展开：$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2$，$\xi\in(c,x)$.

$f(0)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2=0$ ①　　$f(1)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2=0$. ②

当 $c\in(0,\frac{1}{2}]$，由①，$f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2}\ge 8$.　当 $c\in[\frac{1}{2},1)$，由②，$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2}\ge 8$

故 $\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\ge 8$. □

Jensen不等式　定义在 I 上的 $f(x)$ 为凸函数 ⟺ 对 $\forall x_i\in I$，$\lambda_i\ge 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，有 $f(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\ge\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$

分析作图法　1. 分析一般性质：定义域、值域、奇偶性、周期性、与坐标轴交点、

2. 画出渐近线：斜率 $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$　　截距 $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$

铅直渐近线：$\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}f(x)=\infty$

3. 求一、二阶导数：确定不可导点、

4. 列表分析：单调、凹凸区间，极值点、拐点、

5. 描点作图

证明题　C.1 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且 $|f(x)|\le|\sin x|$，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$.

求证：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$.

<法一> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(a_1\frac{\sin x}{x}+2a_2\frac{\sin x}{x}+\cdots+na_n\frac{\sin x}{x})=a_1+2a_2+\cdots+na_n$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = |a_1+2a_2+\cdots+na_n|$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$　　由题 $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right|$

令 $x\to 0$，取极限，则 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n| \leq 1$

<法二> 由 $f(0)=0$. 拉格朗日中值定理，有

$|f(x)| = |f(x)-f(0)| = |f'(\xi)||x| = |a_1\cos\xi+2a_2\cos 2\xi+\cdots+na_n\cos n\xi||x|$　$\xi\in(0,x)$

由 $|f(x)| \leq |\sin x|$　当 $|x|\neq 0$ 时，有 $|a_1\cos\xi+2a_2\cos 2\xi+\cdots+na_n\cos n\xi| \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right|$

令 $x\to 0$，$\xi\to 0$，有 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n| \leq 1$　　□

第3章 一元函数积分学

积分表

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0)$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad (a\neq 0)$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a\neq 0)$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C \quad (a\neq 0)$

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

不定积分技巧

A、三种代换技巧：三角代换　根式代换　倒代换

A.1.1 对于形如 $\int \frac{a'\sin x + b'\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$ 的积分，其分子总可化为 $a_1(a\sin x + b\cos x) + b_1(a\sin x + b\cos x)'$

$$\int \frac{a'\sin x + b'\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx = \int \frac{a_1(a\sin x+b\cos x)+b_1(a\sin x+b\cos x)'}{a\sin x+b\cos x}dx = a_1 x + b_1\ln|a\sin x + b\cos x| + C \quad \square$$

A.1.2 形如 $\int e^{ax}(b\sin x + c\cos x)dx = e^{ax}(b'\sin x + c'\cos x) + C$ （待定系数法）

A.1.3 形如 $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$.

m,n 中有奇数，凑微分；m,n 为偶数，倍角公式降幂. $\square$

A.2.1 求 $I_k = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^k}$. $(a\neq 0, k\in N^*)$

$$I_k = \int\frac{dx}{(a^2+x^2)^k} = \frac{x}{(a^2+x^2)^k} - \int x\cdot d\frac{1}{(a^2+x^2)^k} = \frac{x}{(a^2+x^2)^k} + 2k\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^k} - 2ka^2\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{k+1}}$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}$$

故 $I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^k} + (2k-1)I_k\right]$, $k\in N^*$. $\square$

A.2.2 根式型

① $\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})dx \xlongequal{x=a\sin\theta} \cdots$　$\int f(x,\sqrt{x^2+a^2})dx \xlongequal{x=a\tan\theta} \cdots$　$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 先配方，再换元.

② $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx \xlongequal{t=\sqrt[n]{ax+b}} \cdots$　$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b}) \xlongequal{t=\sqrt[p]{ax+b}}$ p 是 m,n 最小公倍数

$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \xlongequal{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}} \cdots$

B. 有理函数积分

任意有理分式 $=$ $k+$ 有理真分式，$k\in \mathbb{R}$

分母中含有因式	最简分式中对应项
$(x-\alpha)$	$\frac{A}{x-\alpha}$
$(x-\alpha)^k$	$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$
x^2+px+q	$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$
$(x^2+px+q)^k$	$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$

有理真分式 $=$ (I) $\int\frac{1}{(x-a)^k}dx = \begin{cases}\ln|x-a| + C, & k=1\\ \frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, & k>1\end{cases}$

(II) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + (N-\frac{M}{2}p)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M}{2}I_k^1 + (N-\frac{M}{2}p)I_k^2$

$I_k^1 = \begin{cases}\ln(x^2+px+q) + C, & k=1\\ \frac{-1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + C, & k>1\end{cases}$　　$I_k^2 = \int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = A.2.1$

B.1 求不定积分 $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2}{x^4+1} - \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(x-\frac{1}{x}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C$$

可推广至 x^4+ax^2+1 形. □

定积分的定义 $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$

C.1 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}]$

原式 $= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sin x_k\Delta x_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}$ □

C.2 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}$.

原式 $= \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}$ □

C.3 求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

原式 $= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$ □

C.4 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{1+p}}$.

原式 $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\cdots+(\frac{n}{n})^p] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$ □

C.5 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$.

原式 $= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+i^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ □

C.6 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(a+\frac{(i-1)b}{n})}{n}$.

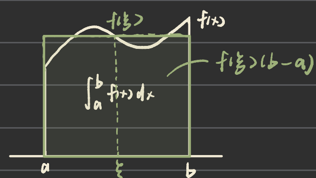
原式 $= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sin(a+b\cdot\frac{i}{n}) = \int_0^1\sin(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}[\cos a-\cos(a+b)]$ □

C.7 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.

原式 $\to \lim_{n\to\infty}(-\ln n+\frac{\ln n+\ln(n+1)+\cdots+\ln(2n-1)}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{-n\ln n}+(\ln n+\ln(n+1)+\cdots+\ln(2n+1))}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1)+\ln(\frac{1}{n}+1)+\cdots+\ln(\frac{n-1}{n}+1)}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{k}{n}) = \int_0^1\ln(1+x)\,dx = 2\ln 2-1$ 原式 $= e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$ □

积分估值 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $m\le f(x)\le M$, 则 $\boxed{m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)}$



中值定理 若 $f(x)\in C[a,b]$, 则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

两函数版: $f(x), g(x)\in C[a,b]$, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则在 (a,b) 上存在一点 ξ, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

D. 积分(不)等式证明

D.1 (二阶导数等式) $f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\in D[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$.

证明: (1) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,dx$.

(2) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

(1) 右 $= \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\boxed{d f'(x)} = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,dx = -\frac{1}{2}\int_a^b(2x-a-b)\boxed{d f(x)}$

$= -\frac{1}{2}[(2x-a-b)f(x)\Big|_b^a - 2\int_a^b f(x)dx] = \int_a^b f(x)\,dx$.

(2) 由 (1). 左 $= \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\,dx\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b|(x-a)(x-b)||f''(x)|\,dx = \boxed{\frac{1}{2}|f''(\xi)|}\int_a^b|(x-a)(x-b)|\,dx$, $\xi\in(a,b)$

$= \frac{(b-a)^3}{12}|f''(\xi)| \le \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$ □

积分形式的Cauchy不等式：

由 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$，有 $\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i) \sum_{i=1}^{n} g^2(\xi_i) \le \left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(\xi_i)\right]^2$

故 $\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} g^2(\xi_i)\Delta x_i \le \left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(\xi_i)\Delta x_i\right]^2$

$$\int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx \geq \left[\int_a^b f^2 g^2 dx\right]^2$$

D.2（利用Cauchy不等式的证明）设 $f(x) \in C, D[a,b]$，$f(a)=0$.

(1) 证明：$\int_a^b f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(x)\,dx$.

(2) $f(a)=f(b)=0$，证明 $\int_a^b f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b f'^2(x)\,dx$.

(1) $f(x)-f(a)=\boxed{\int_a^x f'(t)\,dt}$，$f(a)=0$　故 $f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$.

$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)\,dt\right)^2 \le \int_a^x 1^2 dx \cdot \int_a^x f'^2(t)\,dt = (x-a)\int_a^x f'^2(t)\,dt \le (x-a)\int_a^{\boxed{b}} f'^2(t)\,dt$

故 $f^2(x) \le (x-a)\int_a^b f'^2(t)\,dt$.

$\boxed{\int_a^b} f^2(x)\,dx \le \int_a^b f'^2(x)\,dx \cdot \boxed{\int_a^b}(x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\,dx$.

(2) 由(1)，$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'^2(x)\,dx$　①

$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{8}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'^2(x)\,dx$　②

①+②，有　$\int_a^b f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b f'^2(x)\,dx$.　□

D.3（误差估计）设函数 $f(x) \in C[0,1]$，$f(x) \in D(0,1)$，并且存在 $M>0$ 使得 $|f'(x)| \le M$. 设 $n \in N^*$.

证明 $\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(\frac{k}{n})}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \frac{M}{2n}$

$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(\frac{k}{n})}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\tfrac{k}{n})\,dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\tfrac{k}{n})-f(x)\,dx\right|$　由中值定理，存在 $\xi \in (\frac{k}{n}, x)$，使得 $f'(\xi)=M$

$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f'(\xi)(\tfrac{k}{n}-x)\,dx\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |f'(\xi)||\tfrac{k}{n}-x|\,dx = M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |\tfrac{k}{n}-x|\,dx = \frac{M}{2n} \le \frac{M}{2n}$　□

D.4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，$f(0)=f(1)=0$

求证：$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \frac{1}{4}\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|$

<法一> 因为 $f'(x) \in C[0,1]$，所以存在 $M>0$，使 $M=\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|$.

任取 $x \in (0,1)$，由$\boxed{\text{拉格朗日中值定理}}$，$f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，$0<\xi<x$

$f(x)-f(1)=f'(\eta)(x-1)$，$x<\eta<1$

故 $|f(x)|=|f'(\xi)||x| \le Mx$　$|f(x)|=|f'(\eta)||x-1| \le M(1-x)$　$x\in(0,1)$.

故 $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^x |f(x)|\,dx + \int_x^1 |f(x)|\,dx$

$\le M\left(\int_0^x x\,dx + \int_x^1 (1-x)\,dx\right) = M(x^2-x+\tfrac{1}{2}) \le \frac{M}{4}$

<法二> 由于 $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,d(x-\tfrac{1}{2}) = f(x)(x-\tfrac{1}{2})\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx = -\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx$.　分部积分

所以 $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \boxed{\int_0^1 |x-\tfrac{1}{2}||f'(x)|\,dx \le \max_{0\le x\le 1}|f'(x)| \cdot \int_0^1 |x-\tfrac{1}{2}|\,dx} = \frac{1}{4}\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|$　□

D.5（Taylor公式）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导.

求证：$\int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}(b-a)^3 \max_{a\le x\le b} f''(x)$.

将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处展为一阶 Taylor 展式 有

$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$　$\xi \in (\frac{a+b}{2}, x)$.

两边积分，有 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a)+0+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\,dx$

$$\leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}\max_{a\leq x\leq b}f''(x)\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b$$

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}\max_{a\leq x\leq b}f''(x)\cdot(b-a)^3.$$

□

变限积分

若含 x，需先换元至不含 x，同时要变 $\boxed{\text{上下限}}$、

$$\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\boxed{f(t)\,dt}\right]_x' = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x)]$$

Wallis积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

（其中 $n!!=n(n-2)(n-4)\cdots$）

特殊定积分

1. 周期函数：$\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$

2. 正、余弦转换：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\,dx$

F.1 计算 $\mathcal{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

$$\mathcal{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$2\mathcal{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{J}=\frac{\pi}{4}$$

□

3. 夹逼准则的应用

G.1 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

一方面，$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$.

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$

另一方面，$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}>\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$.

且 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$.

因此，由夹逼准则，$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}$.

□

G.2 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$.

当 $0\leq x\leq 1$ 时，有 $\frac{x^n}{2}\leq\frac{x^n}{1+x^2}\leq x^n$. 故 $\int_0^1\frac{x^2}{2}dx\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx\leq\int_0^1 x^n dx$

$\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{1+n}$ $\quad\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n}=0$

故由夹逼准则，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx=0$.

□

G.3 证明 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=0$.

对 $\forall\ 0<\varepsilon<\pi$. $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,dx\right|\leq\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. $\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0$

所以 $\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，$0<\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$ 保号性.

又 $\left|\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right|\leq\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\varepsilon}{2}$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时有 $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right|\leq\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 nx\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

故 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=0$.

□

4、积分和求导

4.1 试求 $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$.

令 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$.

两边积分得 $\int_0^x f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\int_0^x\tan\frac{x}{2^k}dx=-\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{x}{2^k}=-\ln(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n})=-\ln\left(\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right)$

两边求导得 $f(x)=-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$ □

定积分的应用

1. 求平面图形面积

a. 直角坐标系 $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$

b. 极坐标系 $S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta$ $\quad S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}(\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta))d\theta$

c. 参数方程形式 $S=\int_0^a y\,dx$ 再代入 $\begin{cases}x=\cdots\\y=\cdots\end{cases}$ 变上下限！

2. 已知横截面面积的体积

a. $V=\int_a^b S(x)dx$

b. 旋转体的体积：$V_x=\int_a^b\pi f^2(x)dx$ $\quad V_y=\int_a^b\pi f^2(y)dy$

c. 柱壳法求旋转体体积：$V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$

3. 平面曲线的弧长

a. 直角坐标系 $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

b. 极坐标系 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

c. 参数方程形式 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$，其中 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ (t 为参数，$t\in[\alpha,\beta]$)

3.1 函数 $f(x)\in[0,1]$，$x\in[0,1]$，具有连续的一阶导数且 $f(x)$ 单减，$f(0)=f(1)=0$.

证明：由方程 $y=f(x)$，$x\in[0,1]$ 确定的曲线弧的长度不超过3.

取 $x_0\in(0,1)$. $S_{[0,x_0]}=\int_0^{x_0}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}$ $\quad \xi_k\in(\frac{kx_0}{n},\frac{(k+1)x_0}{n})$. $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(\frac{x_0}{n})^2+\frac{[f(\frac{k+1}{n}x_0)-f(\frac{k}{n}x_0)]^2}{(\frac{x_0}{n})^2}\cdot(\frac{x_0}{n})^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(\frac{x_0}{n})^2+[f(\frac{k+1}{n}x_0)-f(\frac{k}{n}x_0)]^2}\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_0}{n}+[f(\frac{k+1}{n}x_0)-f(\frac{k}{n}x_0)]=x_0+f(x_0)$ ①

同理，$S_{[x_0,1]}\le 1-x_0+f(x_0)$ ② $\quad$ 故 $S=S_{[0,x_0]}+S_{[x_0,1]}=1+2f(x_0)\le 3$ □

4. 旋转曲线的面积

a. 直角坐标系 $S_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ $\quad S_y=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

b. 极坐标系 $S_x=2\pi\int_\alpha^\beta\rho(\theta)\sin\theta\cdot\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$ $\quad S_y=2\pi\int_\alpha^\beta\rho(\theta)\cos\theta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

c. 参数方程形式 $S_x=2\pi\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$ $\quad S_y=2\pi\int_\alpha^\beta\varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

5. 曲率

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}\right|=\left|\frac{\frac{f''(x_0)}{1+f'^2(x_0)}}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}\right|=\frac{|f''(x)|}{[1+f'^2(x)]^{3/2}}$$

曲率半径 $R=\frac{1}{K}$.

参数方程形式：$K=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}$

第4章 向量代数与空间解析几何

方向角和方向余弦

给定 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，称 $\vec{r}$ 与三个坐标轴的夹角 α,β,γ 为方向角。方向角的余弦为方向余弦、

$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

向量的投影

$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影记作 $Prj_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

数量积的应用：

1、$\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

2、$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

3、$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影 $Prj_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

4. $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

向量积

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ $\quad\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ $\quad\vec{a}\times\vec{b}=0\iff\vec{a}\parallel\vec{b}$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 几何意义：以 a,b 为邻边的平行四边形的面积

向量积的应用：

1、同时垂直于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的向量 $k(\vec{a}\times\vec{b})$

2. 以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积 $|\vec{a}\times\vec{b}|$

3、$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\iff\vec{b}=\lambda\vec{a}$

混合积

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

几何意义：以 a,b,c 为邻边的平行六面体的体积

混合积的应用：

1. 求 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 构成的平行六面体的体积 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

2. 判断 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是否共面 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面 $\iff(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

平面

平面 π 通过一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

点法式方程 $\pi: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

一般式方程 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$

点面距 平面外一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 π 距离 $d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

两平面夹角 $\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$

直线

直线 l 通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量 $\vec{s}=(l,m,n)$。

点向式方程 $l: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 参数式方程 令 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$ 即得。

一般式方程 $l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

两直线的夹角 $\cos\theta = \dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}$

点线距　直线外一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 l 距离（M为 l 上一点）$d = \dfrac{|\overrightarrow{MP}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$

直线与平面夹角 $\sin\theta = \dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$

两直线距离　公垂线方向向量 $\vec{s} = \vec{s_1}\times\vec{s_2}$.　$M_1\ M_2$ 分别是两条直线上的两点.

$$d = |Prj_{\vec{s}}\overrightarrow{M_1M_2}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

判断两直线是否相交？l_1 参数方程代入 l_2，是否有解.

平面束

过直线 $l: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的平面束方程：$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

注：缺少平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

A. 平面束的应用

A.1 求过点 $A(1,2,1)$，且与直线 $L_1: \begin{cases} x-2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$，$L_2: \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 都相交的直线方程.

过 L_1 的平面束：$(x-2y-z+1)+\lambda(x-y+z-1)=0$　代入 $A(1,2,1)$，得 $\pi_1: 2x-y+4z-4=0$

过 L_2 的平面束：$(2x-y+z)+\mu(x-y-z)=0$　代入 $A(1,2,1)$，得 $\pi_2: 5x-3y+z=0$

故 $L: \begin{cases} 2x-y+4z-4=0 \\ 5x-3y+z=0 \end{cases}$ □

A.2 求过直线 $L: \begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+2y+3z=6 \end{cases}$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

过直线 L 的平面束：$4x+2y+3z-6+\lambda(2x+y)=0$

原点到平面距离 $d = \dfrac{|0+0+0-6|}{\sqrt{(4+2\lambda)^2+(2+\lambda)^2+3^2}} = 2 \Rightarrow \lambda^2+4\lambda+4=0$　$\lambda=-2$

故 $\pi: z=2$ □

旋转曲面

xOy 平面上的曲线 $C: \begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴一周生成的曲面：$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

利用距离不变求方程.

抛物线 $\begin{cases} y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转 $\Rightarrow y^2+z^2=2x$　旋转抛物面

椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转 $\Rightarrow \frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　旋转椭球面

双曲线 $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转 $\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$　旋转单叶双曲面

绕 y 轴旋转 $\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$　旋转双叶双曲面

E.1 将直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$ 绕 z 轴旋转一周，求该旋转曲面的方程.

并求此曲面与 $z=0$，$z=3$ 所围立体的体积.

在空间任取点 $P(x,y,z)$. 过点 P 作平面 π 垂直于 z 轴，交 z 轴于 $M(0,0,z)$.

设平面 π 与已知直线交点为 $Q(x_0,y_0,z)$. 有 $\frac{x_0-1}{2}=\frac{y_0-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$. $(*)$

到轴线距离相等

$\boxed{P\text{位于曲面上，有 } |PM|=|QM|.}$ 即 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$　代入 $(*)$，有 $P: x^2+y^2-5z^2+38z=74$

P 到 z 轴距离 $d=|PM|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{74-38z+5z^2}$

截面面积　$S=\pi d^2=\pi(74-38z+5z^2)$

故 $V=\int_0^3 S\,dz=\pi\int_0^3 d^2\,dz=\pi\int_0^3(74-38z+5z^2)\,dz=96\pi$ □

柱面

一条动直线 L 保持与一条定直线 l 平行，沿一条空间曲线 C 平行移动所得的曲面.

曲线 C 是柱面的准线，直线 L 是柱面的母线.

柱面上的点到轴线的距离相等.

C.1 求空间曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & ① \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 & ② \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程.

消去 z：①-②：$y+z=1$　代入①：$x^2+y^2+(1-y)^2=1$（柱面）

故 $l:\begin{cases} x^2+2(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$. $\square$

曲线在 xOy 平面上的投影 = 变量 x,y 满足的柱面方程与 xOy 平面的交线.

锥面

设一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和一条与其不共面的空间曲线 C，由点 M_0 与曲线 C 上所有点连线 L 生成的曲面称为锥面.

M_0 称为锥面的顶点，C 称为锥面的准线，L 称为锥面的母线.

D.1 求以三条坐标轴为母线的圆锥面的方程.

母线与轴线的夹角固定，故轴线方向 $\vec{l}=(1,1,1)$

$\cos\alpha=\dfrac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　若 $(x,y,z)\in S$，则 $\dfrac{|(x,y,z)\cdot(1,1,1)|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

有 $|x+y+z|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$　故 $S: xy+yz+xz=0$ $\square$

求锥面方程一般步骤：

准线：$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=h \end{cases}$　过原点和准线上一点 (x_0,y_0,z_0) 的直线 $\begin{cases} x=tx_0 \\ y=ty_0 \\ z=tz_0 \end{cases}$（$t$ 为参数）.

顶点为原点的锥面方程 $\begin{cases} f(tx,ty)=0 \\ tz=h \end{cases}$ 化简可得 $f(\frac{hx}{z},\frac{hy}{z})=0$