

第6章 重 积 分

上一章我们讨论了多元函数以及多元函数的微分运算. 本章及下一章我们来讨论多元函数的积分运算. 在一元函数积分学中我们定义的定积分是某种确定形式的和的极限. 在本章及下一章中, 我们把和的极限的概念推广到平面有界闭区域、空间有界闭区域、曲线以及曲面上多元函数的情形, 从而得到二重积分、三重积分、曲线积分以及曲面积分的概念. 本章介绍二重积分和三重积分的概念、计算方法以及它们的一些应用. 本章中所涉及的平面有界闭区域 D 的边界为逐段光滑曲线*, 空间有界闭区域 Ω 的边界曲面为分片光滑曲面**, 以后不赘述.

6.1 二重积分的概念与性质

6.1.1 二重积分的概念

一、二重积分的概念

我们先看两个实例.

1. 曲顶柱体的体积

设有一立体, 以 xOy 平面上一个有界闭区域 D 为底, 以曲面 $z = f(x, y) (\geq 0)$ 为顶, 侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面. 这种立体称为曲顶柱体(见图 6.1).

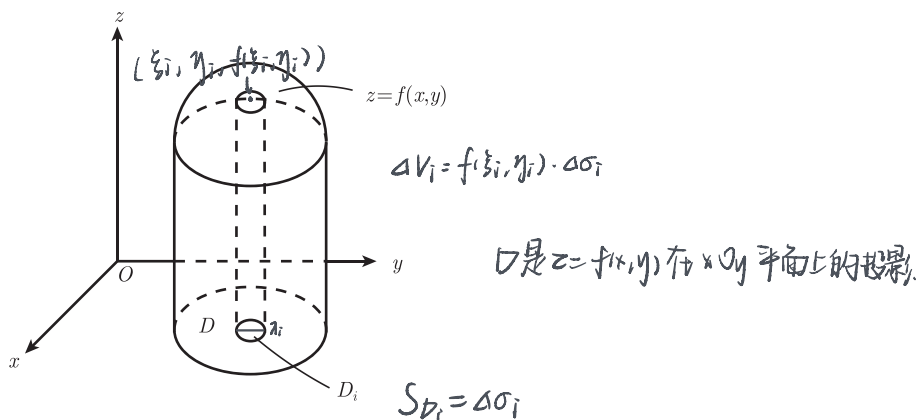


图 6.1

如何定义及计算曲顶柱体的体积 V 呢? 最特殊的情况是此柱体的顶是平行于 xOy 坐标面的平面, 此时柱体的体积等于底面积乘高. 一般情况下, 曲顶柱体每一点高度不同, 此时我们仍然用“分割取近似, 求和取极限”的方法来计算其体积.

* 逐段光滑曲线指由有限条光滑曲线组成的曲线.

** 光滑曲面指处处有切平面且法向量在曲面上连续变化的曲面.

将区域 D 任意地分割为 n 个子区域 $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$, D_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i$, 并记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{D_i \text{ 的直径}\}$. 以 D_i 的边界曲线为准线, 作母线平行于 z 轴的柱面, 这些柱面将曲顶柱体分割为 n 个小曲顶柱体.

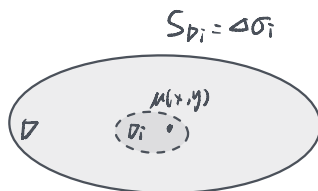
设 D_i 对应的小曲顶柱体的体积为 ΔV_i . 在每一个小区域 D_i 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 以 D_i 为底, 以 $f(\xi_i, \eta_i)$ 为高作平顶柱体. 则 $\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$, 那么和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

是曲顶柱体体积的近似值.

令 $\lambda \rightarrow 0$, 如果此和式极限存在 (此极限与区域 D 的分割无关, 与 (ξ_i, η_i) 的取法无关), 我们用此极限来定义曲顶柱体的体积, 即

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$



2. 平面薄片的质量

设有一质量分布不均匀的平面薄片 D , 各点 (x, y) 的质量面密度为 $\mu(x, y)$, 其中 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续且非负, 求 D 的质量 M .

将区域 D 任意地分割为 n 个小区域 $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 设 D_i 的质量为 M_i , D_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i$, 记

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{D_i \text{ 的直径}\}.$$

在每一个小区域 D_i 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 则 $M_i \approx \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$, 那么和式

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

是平面薄片质量的近似值. 令 $\lambda \rightarrow 0$, 如果此式极限存在 (此极限与区域 D 的分割无关, 与 (ξ_i, η_i) 的取法无关), 我们用此极限来定义平面薄片的质量, 即

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

现实生活中很多情况下都会出现上述形式的和的极限. 抽去上述实例的实际意义, 我们给出二重积分的定义:

定义 6.1.1 (二重积分) 设函数 $f(x, y)$ 在平面有界闭区域 D 上有定义. 将区域 D 任意地分割为 n 个小闭区域 $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$, D_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i$, 并记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{D_i \text{ 的直径}\}$. 在每一个小闭区域 D_i 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

若 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 此和式极限存在 (此极限值与 D 的分割无关, 与每个 D_i 上点 (ξ_i, η_i) 的取法无关), 则称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上黎曼可积, 简称为可积. 称此极限为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

并称 $f(x, y)$ 为被积函数, D 为积分区域, $d\sigma$ 为面积微元.

当函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积时, 由定义可以证明函数 $f(x, y)$ 在 D 上有界.

由二重积分的定义可知, 曲顶柱体的体积为

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

平面薄片的质量为

$$M = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

二、二重积分的几何意义

一般情况下, 设 V 表示以闭区域 D 为底, 以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积. 如果 $f(x, y) \geq 0$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V.$$

如果 $f(x, y) \leq 0$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = -V.$$

如果 $f(x, y)$ 在 D 上变号, 记 V_1 为位于 xOy 坐标面上方的曲顶柱体的体积, V_2 为位于 xOy 坐标面下方的曲顶柱体的体积, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V_1 - V_2.$$



三、二重积分的可积条件

与定积分的可积条件类似, 二重积分有如下结论 (证明从略):

定理 6.1.1 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

定理 6.1.2 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有界, $f(x, y)$ 的间断点分布在 D 内有限条光滑曲线上, 则函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

6.1.2 二重积分的性质

与定积分类似, 由二重积分的定义易知二重积分有如下性质:

定理 6.1.3 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界闭区域, 下列各式的被积函数在 D 上皆可积, 则有:

(1) $\iint_D d\sigma = \sigma(D)$, 这里 $\sigma(D)$ 表示 D 的面积;

$$(2) \iint_D k f(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma (k \in \mathbb{R}); \text{常数分离}$$

$$(3) \iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma;$$

(4) 对积分区域的可加性: 用逐段光滑的曲线将闭区域 D 分割为两个小闭区域 D_1 与 D_2 , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma;$$

(5) 保向性: 若 $f(x, y) \leq g(x, y), \forall (x, y) \in D$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma;$$

(6) 估值性质: 设函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值与最小值分别为 M 与 m , 则

$$m \leq \frac{1}{\sigma(D)} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M;$$

$$(7) \text{绝对值性质: } \left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma;$$

(8) 对称性质: 设 D 关于 $x = 0$ 对称, 如果函数 $f(x, y)$ 关于 x 为奇函数, 即 $f(-x, y) = -f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0;$$

关于 $y=x$ 对称, 有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

如果函数 $f(x, y)$ 关于 x 为偶函数, 即 $f(-x, y) = f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma,$$

其中 D_1 是 D 中 $x \geq 0$ 的部分. 对于变量 y 有类似的结论.

定理 6.1.4 (中值定理 1) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界闭区域, 函数 $f(x, y), g(x, y)$ 在 D 上连续, 且对任意的 $(x, y) \in D$, $g(x, y) \geq 0$ (或 ≤ 0), 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

特别地, 取 $g(x, y) \equiv 1$, 有

定理 6.1.5 (中值定理 2) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界闭区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot \sigma(D). \quad \square \text{ 闭面积}$$

习题 6.1

1. 试用二重积分表示下列空间区域的体积:

(1) 锥体 $\Omega: \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 - z, 0 \leq z \leq 2$;

(2) 由曲面 $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 所围的立体.

2. 试用二重积分的几何意义计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (1 - x - y) d\sigma$, 其中 D 是以 $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ 为顶点的三角形区域;

(2) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, 其中 D 是以原点为圆心, 半径为 a 的圆.

3. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$, 试求

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x+y} \cos(x^2 + y^2) d\sigma.$$

4. 设函数 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上非负连续函数, 且 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$, 证明: 当 $(x, y) \in D$ 时, $f(x, y) \equiv 0$.

6.2 二重积分的计算

6.2.1 累次积分法

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界闭区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积. 按定义, $f(x, y)$ 在 D 上二重积分的值

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i = \iint_D f(x, y) dx dy$$

与 D 的分割无关. 在直角坐标系中, 我们常用平行于 x 轴和 y 轴的直线将 D 分割为 n 个小闭区域, 这些小闭区域除部分可能是曲边梯形外皆为矩形, 其面积 $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$, 因而面积微元常记为 $d\sigma = dx dy$, 称为直角坐标下的面积微元. $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分常记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

为了研究二重积分的计算, 我们先介绍关于含参变量的定积分

$$\sigma_1(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{与} \quad \sigma_2(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

的性质而略去证明.

定理 6.2.1 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

上连续, 则含参定积分

$$\sigma_1(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

在区间 $[a, b]$ 上连续.

定理 6.2.2 设函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数 $f(x, y)$ 在闭区域

$$D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

上连续, 则含参定积分

$$\sigma_2(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

在区间 $[a, b]$ 上连续.

下面, 我们将二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 看作是以 D 为底, 以曲面 $z = f(x, y) (\geq 0)$ 为顶

的曲顶柱体的体积, 从几何意义上来推导二重积分的计算公式. 分两种情况讨论:

X-型 (1) 设闭区域 D 可表示为

$$D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\},$$

这里 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续 (见图 6.2).

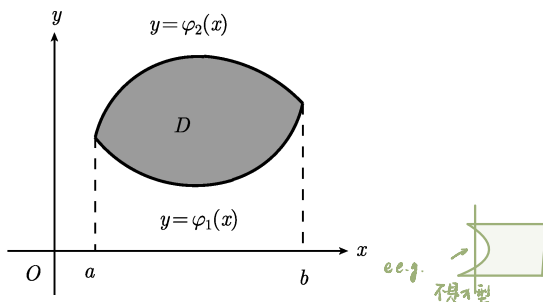
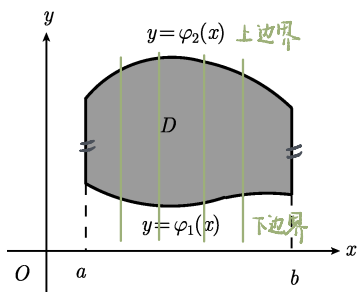


图 6.2 X-型: $x=a \sim x=b$ 任意做一条线都在 D 内, 如绿色.

任取 $x \in [a, b]$, 过点 $(x, 0, 0)$ 作平面 Π 垂直于 x 轴, 该平面截曲顶柱体 Ω 的截面是平面 Π 上的曲边梯形 (见图 6.3), 它可表示为

二重积分模型:

a. 细长杆型



b. 切片面型

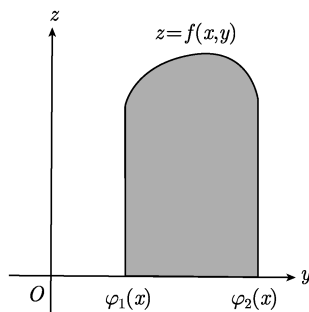
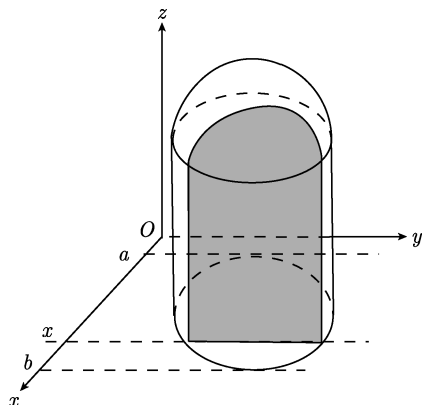
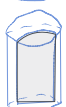


图 6.3

$$0 \leq z \leq f(x, y), \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x).$$

该曲边梯形的面积为含参定积分

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

由定理 6.2.2 知, $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 于是曲顶柱体 Ω 的体积为

$$V(\Omega) = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

由此即得二重积分的计算公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (6.2.1)$$

此公式表明二重积分可化为先对 y , 后对 x 的两次定积分. 上式右端称为先对 y , 后对 x 的累次积分 (二次积分).

例 (2) 设闭区域 D 可表示为

$$D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\},$$

这里 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上连续 (见图 6.4).

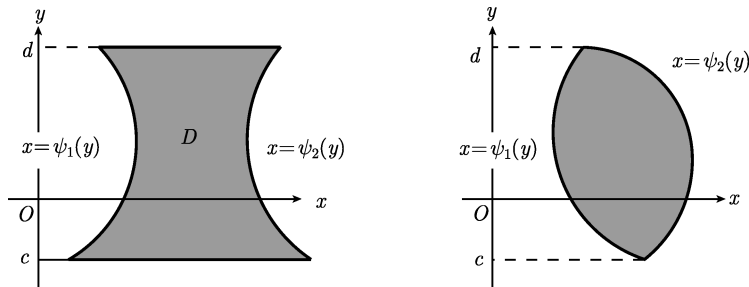


图 6.4

我们用垂直于 y 轴的平面截曲顶柱体 Ω , 所得横截面的面积为含参定积分

$$B(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,$$

它在区间 $[c, d]$ 上连续, 于是曲顶柱体 Ω 的体积为

$$V(\Omega) = \int_c^d B(y) dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

由此即得二重积分的另一计算公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (6.2.2)$$

X型二重积分步骤:

① 先在 xOy 平面上找投影区域

② 找 x 的最大值、最小值.

③ 找 y 的上下边界

$$\textcircled{4} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \Rightarrow \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

此公式表明二重积分可化为先对 x , 后对 y 的累次积分.

最后指出, 虽然在推导上述两个公式时, 我们假设被积函数 $f(x, y)$ 非负, 但对于一般的 $f(x, y)$, 公式 (6.2.1)、式 (6.2.2) 仍成立. 另外, 对于不满足公式 (6.2.1)、式 (6.2.2) 条件的积分区域 D , 我们可将 D 分割为若干子闭区域, 使得在每个子闭区域上满足公式 (6.2.1) 或式 (6.2.2) 的条件, 将二重积分化为累次积分, 然后应用二重积分对积分区域的可加性, 把它们相加即可.

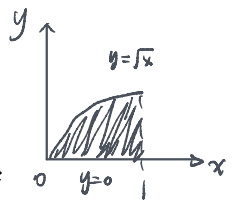
例 6.2.1 计算二重积分 $\iint_D x^2 y \, dx dy$, 其中 D 为 $y = \sqrt{x}, x = 1, y = 0$ 所围的平面区域 (见图 6.5).

解 方法 1: $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

方法 2: $D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 x^2 y \, dx = \int_0^1 y \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 y \left(\frac{1}{3} - \frac{y^6}{3} \right) dy = \left(\frac{y^2}{6} - \frac{y^8}{24} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 dx \\ &= \frac{1}{8} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$

例 6.2.2 计算二重积分 $\iint_D (x+y) \, dx dy$, 其中 D 为 $x = y^2$ 及 $x + y = 2$ 所围的平面区域 (见图 6.6).

解 $D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 2 - y, -2 \leq y \leq 1\}$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} (x+y) \, dx = \int_{-2}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 + xy \right) \Big|_{x=y^2}^{x=2-y} dy \\ &= \int_{-2}^1 \left(2 - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} y^4 - y^3 \right) dy = \frac{99}{20}. \end{aligned}$$

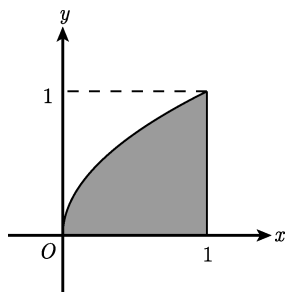
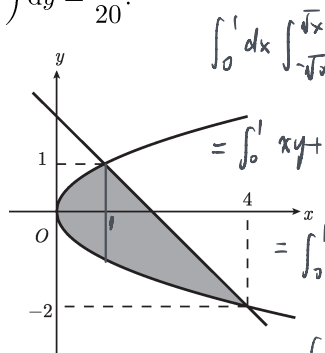


图 6.5

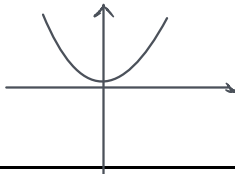


$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) \, dx dy &= \int_{-2}^1 dx \int_{-y^2}^{2-y} (x+y) \, dy + \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x+y) \, dy \\ &= \int_{-2}^1 \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{-y^2}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy \\ &= \int_{-2}^1 2x\sqrt{x} \, dx + \int_0^1 4x^2 + x\sqrt{x} - \frac{1}{2} x \, dx \\ &= \int_0^1 4x^2 + 3x\sqrt{x} - \frac{1}{2} x \, dx. \end{aligned}$$

图 6.6

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\} \\ D &= \{(x, y) \mid -\sqrt{x} \leq y \leq 2-x, 1 \leq x \leq 4\} \end{aligned}$$

$$y=x^2$$

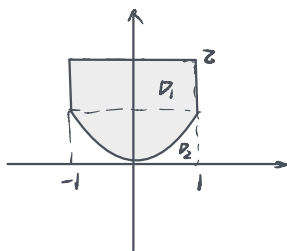


例 6.2.3 计算二重积分 $\iint_D |y - x^2| dx dy$, 其中 D 为 $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

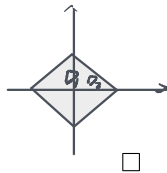
解 用曲线 $y = x^2$ 将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分 (见图 6.7), 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2, -1 \leq x \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x^2, -1 \leq x \leq 1\},$$



$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_1} (y - x^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 - y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 (y - x^2) dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} y^2 - x^2 y \right) \Big|_{y=x^2}^{y=2} dx + \int_{-1}^1 \left(x^2 y - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 2x^2 + x^4) dx = \frac{46}{15}. \end{aligned}$$



例 6.2.4 计算二重积分 $\iint_D (|x| + |y|) dx dy$, 其中 D 为 $|x| + |y| \leq 1$ (见图 6.8).

解 设 D_1 是区域 D 中 $y \geq 0$ 的部分, D_2 是区域 D 的第一象限的部分. 因为被积函数关于 y 是偶函数, 积分区域 D 关于 $y = 0$ 对称, 所以

$$\text{原式} = 2 \iint_{D_1} (|x| + |y|) dx dy, \quad = \iint_D \frac{\cos y}{y} dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\cos y}{y} dx$$

对于上面这个二重积分, 被积函数关于 x 是偶函数, 积分区域 D_1 关于 $x = 0$ 对称, 所以 $\int_{-y}^y \frac{\cos y}{y} x dy = \frac{\cos y}{y} x^2 \Big|_{-y}^y = \frac{2 \cos y}{y} y^2 = 2 \cos y$

$$\text{原式} = 4 \iint_{D_2} (|x| + |y|) dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y) dy = \frac{4}{3}.$$

例 6.2.5 计算累次积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\cos y}{y} dy$. $D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$ $D = \{(x, y) \mid x \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$

解 因为 $\frac{\cos y}{y}$ 的原函数非初等函数, 所以考虑把此累次积分还原为二重积分 (积分区域 D 见图 6.9), 然后把二重积分改写为先对 x 后对 y 的累次积分 (即交换积分次序), $\int_0^1 (1-y) \sin y dy$

$$D = \{(x, y) \mid x \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\} = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}, \quad = (1-y) \sin y \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin y dy$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_D \frac{\cos y}{y} dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\cos y}{y} dx \\ &= \int_0^1 (\cos y - y \cos y) dy = (\sin y - y \sin y - \cos y) \Big|_0^1 = 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

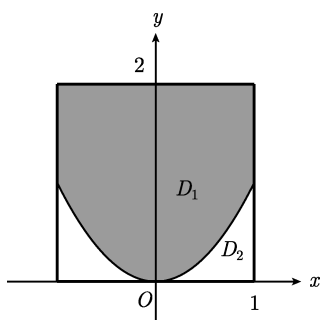


图 6.7

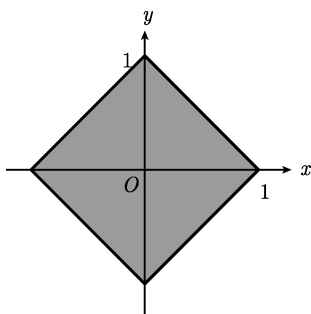


图 6.8

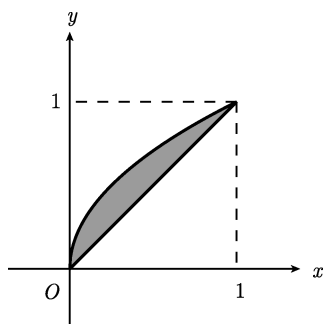


图 6.9

6.2.2 换元积分法

在定积分的计算中, 换元积分法是一种很有效、很常用的方法. 同样, 在二重积分的计算中, 换元积分法也是很重要的方法. 这一节, 我们先介绍二重积分的一般换元积分公式, 然后介绍一些常用的换元变换.

一、二重积分的换元积分公式

定理 6.2.3 (二重积分的换元积分公式) 设 D 为平面有界闭区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 函数组 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在 uv 平面的有界闭区域 D' 上连续可微, 使得 D' 与 D 的点一一对应, 并且雅可比行列式

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0, \quad (u, v) \in D',$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

则有换元积分公式:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv, \quad (6.2.3)$$

其中 $d\sigma = |J(u, v)| du dv$ 是曲线坐标下的面积微元.

注 如果 $J(u, v)$ 只在 D' 的个别点上或一条曲线上为零, 而在其他点上不为零, 那么换元公式 (6.2.3) 仍成立.

证明 在定理的假设下, 式 (6.2.3) 两端的二重积分都存在. 由于二重积分的值与积分区域的分割无关, 我们用平行于坐标轴的直线网来分割 D' , 使得除去包含边界点的小闭区域外, 其余的小闭区域都是长方形区域. 任取一个这样的长方形区域 D'_i , 设其顶点分别为 $M'_1(u_i, v_i), M'_2(u_i + \Delta u_i, v_i), M'_3(u_i + \Delta u_i, v_i + \Delta v_i), M'_4(u_i, v_i + \Delta v_i)$ (其面积记为 $\Delta\sigma' = \Delta u_i \Delta v_i$), 经变换 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 作用后, 上述正方形 D'_i 变成 xOy 平面上的曲边四边形 $D_i: M_1 M_2 M_3 M_4$, 其面积记为 $\Delta\sigma$ (见图 6.10).

M_1, M_2, M_3, M_4 的坐标分别为

$$\begin{aligned} M_1 & (x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)), \\ M_2 & (x(u_i + \Delta u_i, v_i), y(u_i + \Delta u_i, v_i)), \end{aligned}$$

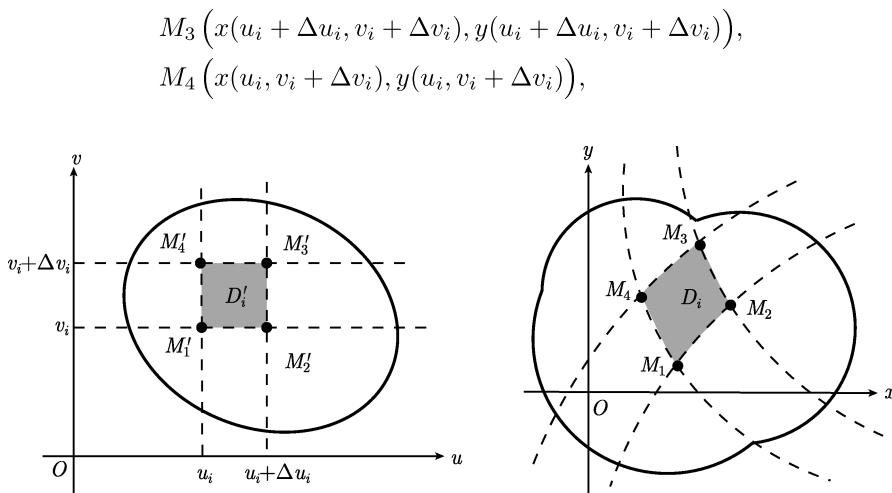


图 6.10

由于 $x(u, v), y(u, v)$ 连续可微, 当 $\Delta u_i, \Delta v_i$ 很小时, 若不计高阶无穷小, 则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1 M_2} &= (x(u_i + \Delta u_i, v_i) - x(u_i, v_i), y(u_i + \Delta u_i, v_i) - y(u_i, v_i)) \\ &= (x'_u(u_i + \theta_1 \Delta u_i, v_i), y'_u(u_i + \theta_2 \Delta u_i, v_i)) \Delta u_i \\ &\approx (x'_u(u_i, v_i), y'_u(u_i, v_i)) \Delta u_i \quad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_4 M_3} &= (x(u_i + \Delta u_i, v_i + \Delta v_i) - x(u_i, v_i + \Delta v_i), y(u_i + \Delta u_i, v_i + \Delta v_i) - y(u_i, v_i + \Delta v_i)) \\ &= (x'_u(u_i + \theta_3 \Delta u_i, v_i + \Delta v_i), y'_u(u_i + \theta_4 \Delta u_i, v_i + \Delta v_i)) \Delta u_i \\ &\approx (x'_u(u_i, v_i), y'_u(u_i, v_i)) \Delta u_i \quad (0 < \theta_3, \theta_4 < 1),\end{aligned}$$

所以 (为了方便利用向量的运算, 我们把二维坐标 (x, y) 写成三维坐标 $(x, y, 0)$)

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \approx \overrightarrow{M_4 M_3} \approx (x'_u(u_i, v_i), y'_u(u_i, v_i), 0) \Delta u_i,$$

同理可得

$$\overrightarrow{M_1 M_4} \approx \overrightarrow{M_2 M_3} \approx (x'_v(u_i, v_i), y'_v(u_i, v_i), 0) \Delta v_i,$$

因而曲边四边形 $M_1 M_2 M_3 M_4$ 可近似地看作平行四边形, 它的面积为

$$\Delta \sigma \approx \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_4} \right| = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|_{(u_i, v_i)} \Delta u_i \Delta v_i = |J(u_i, v_i)| \Delta u_i \Delta v_i,$$

所以 $\Delta \sigma$ 与 $\Delta \sigma'$ 之比为 $|J(u_i, v_i)|$. 由于 $J(u, v)$ 在 D' 上连续且不等于 0, 所以 $\lambda \rightarrow 0 \iff \lambda' \rightarrow 0$. 由二重积分的定义得

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) d\sigma &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i \\ &= \lim_{\lambda' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| \Delta u_i \Delta v_i\end{aligned}$$

$$= \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

□

二、极坐标变换

在二重积分中, 极坐标换元是最常用的换元变换. 我们知道, 直角坐标与极坐标的换元变换有公式

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

此时

$$J(\rho, \theta) = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho,$$

据定理 6.2.3 可得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta,$$

其中 D' 是在极坐标变换下原积分区域 D 所对应的区域, $d\sigma = \rho d\rho d\theta$ 是极坐标下的面积微元.

面积微元 $\rho d\rho d\theta$ 也可从几何上直接求出. 设中心在原点, 半径分别为 ρ 与 $\rho + d\rho$ 的同心圆, 以及极角分别为 θ 与 $\theta + d\theta$ 的射线所围的小区域为 D_i , 当 $d\rho$ 与 $d\theta$ 充分小时, 由于 D_i 的边界曲线互相垂直, 我们将此图形近似看作边长分别为 $\rho d\theta$ 与 $d\rho$ 的矩形, 其面积近似地等于 $d\sigma = \rho d\rho d\theta$ (见图 6.11).

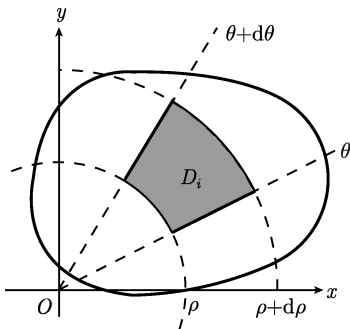


图 6.11

在具体计算时, 还需将极坐标下的二重积分化为累次积分. 下面分三种情况讨论:

(1) 原点 $O \notin D'$. 设 D 位于射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 之间 (见图 6.12), 这两条射线将 D 的边界曲线隔开, 内侧的边界曲线为 $\rho = \rho_1(\theta)$, 外侧的边界曲线为 $\rho = \rho_2(\theta)$. 此时区域 D' 可表示为

$$D' = \{(\rho, \theta) | \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\},$$

则有

$$\iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(2) 原点 $O \in \partial D'$, 即 O 是 D 的边界点. 设 D 位于射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 之间 (见图 6.13), D 的边界曲线的极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta)$. 这种情况可看作第一种情况当中 $\rho_1(\theta) = 0$ 的特例. 此时区域 D' 可表示为

$$D' = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\},$$

则有

$$\iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho.$$

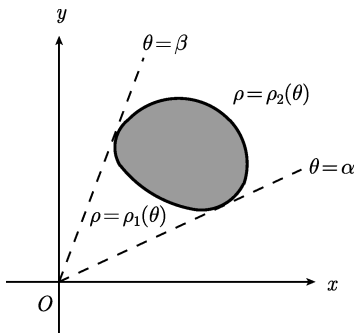


图 6.12

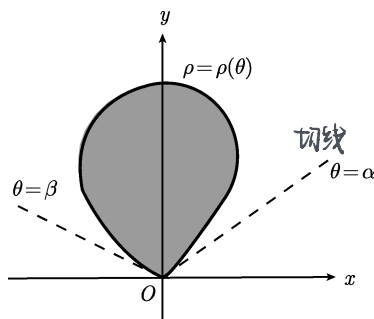


图 6.13

(3) 原点 $O \in D^\circ$, 即 O 是 D 的内点 (见图 6.14). 这种情况可看作第二种情况中 $\alpha = 0, \beta = 2\pi$ 的特例. 设 D 的边界曲线的极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta)$, 此时区域 D' 可表示为

$$D' = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq \rho(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

或者

$$D' = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq \rho(\theta), -\pi \leq \theta \leq \pi\},$$

则有

$$\iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho,$$

或

$$\iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho.$$

上述三种情况都是化为先对 ρ , 后对 θ 的累次积分, 有时也可化为先对 θ , 后对 ρ 的累次积分.

例 6.2.6 计算二重积分 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, 其中 D 为区域 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ (见图 6.15).

$\rho - \theta$ 做不出来 坐标变换 $\theta - \rho$

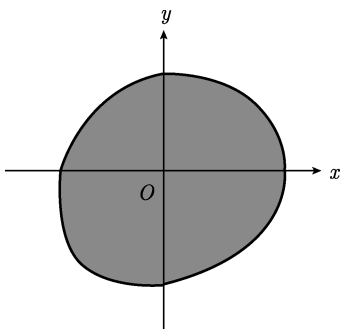


图 6.14

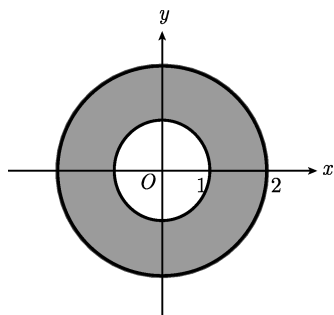


图 6.15

解 采用极坐标变换, 区域 D 化为 D' 表示为

$$D' = \{(\rho, \theta) | 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

于是

$$\text{原式} = \iint_{D'} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi(e^{-1} - e^{-4}). \quad \square$$

例 6.2.7 计算二重积分 $\iint_D (x+y)^2 dx dy$, 其中 D 是由 $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x$ 所确定的区域 (见图 6.16).

解 由于积分区域 D 关于 $y=0$ 对称, $2xy$ 关于 y 是奇函数, $x^2 + y^2$ 关于 y 是偶函数, 所以

$$\text{原式} = \iint_D (x^2 + 2xy + y^2) dx dy = 2 \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy.$$

其中 D_1 是 D 中 $y \geq 0$ 的部分.

采用极坐标变换, 区域 D_1 化为 D' 表示为

$$D' = \{(\rho, \theta) | 2 \cos \theta \leq \rho \leq 4 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

于是

$$\text{原式} = 2 \iint_{D'} \rho^3 d\rho d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} \rho^3 d\rho = \frac{45\pi}{2}. \quad \square$$

例 6.2.8 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 为区域 $x^2 + y^2 \leq 2y$ (见图 6.17).

解 方法 1: 由于积分区域 D 关于 $x=0$ 对称, x 关于 x 是奇函数, y 关于 x 是偶函数, 所以

$$\iint_D (x+y) dx dy = 2 \iint_{D_1} y dx dy.$$

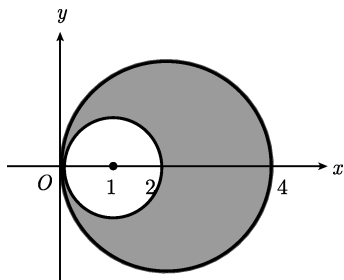


图 6.16

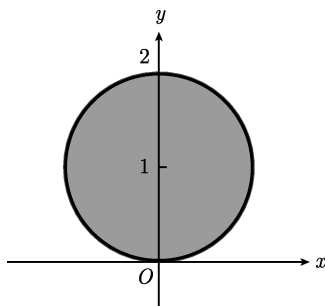


图 6.17

其中 D_1 是 D 中 $x \geq 0$ 的部分.

采用极坐标变换, 区域 D_1 化为 D' 表示为

$$D' = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

于是

$$\text{原式} = 2 \iint_{D'} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} \rho^2 \sin \theta \, d\rho = \pi.$$

△ 方法 2: 将 D' 表示为

$$D' = \{(\rho, \theta) \mid \arcsin \frac{\rho}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2\},$$

于是原式化为先 θ 后 ρ 的累次积分为

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \iint_{D'} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta = 2 \int_0^2 d\rho \int_{\arcsin \frac{\rho}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin \theta \, d\theta \\ &= 2 \int_0^2 \rho^2 (-\cos \theta) \Big|_{\theta=\arcsin \frac{\rho}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_0^2 \rho^2 \sqrt{4 - \rho^2} \, d\rho = \pi. \end{aligned}$$

□

三、其他的换元变换

除了极坐标变换, 还有其他的换元变换, 如广义极坐标变换等. 下面我们用例题来介绍几种换元变换.

例 6.2.9 计算二重积分 $\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy$, 其中 D 为区域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($a, b > 0$).

解 采用广义极坐标变换, 令

$$x = a\rho \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \theta,$$

则雅可比行列式为

$$J(\rho, \theta) = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho,$$

区域 D 化为 D' 表示为

$$D' = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

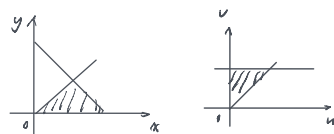
于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D'} ab\rho(1-\rho^2)d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 ab\rho(1-\rho^2)d\rho = \frac{ab}{2}\pi. \end{aligned} \quad \square$$

例 6.2.10 计算二重积分 $\iint_D \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy$, 其中 D 为 $y=x, y=0, y+x=1$ 所围区域 (见图 6.18).

解 令 $u=y-x, v=y+x$, 即

$$x = \frac{v-u}{2}, y = \frac{v+u}{2},$$



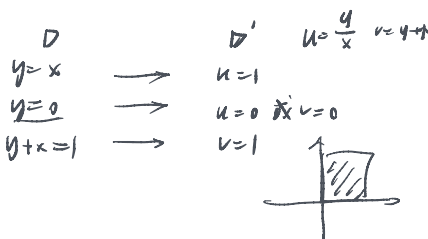
雅可比行列式为

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

$$J(u, v) \cdot J(x, y) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1$$

区域 D 化为 D' 表示为

$$D' = \{(u, v) | -v \leq u \leq 0, 0 \leq v \leq 1\},$$



于是

$$\text{原式} = \iint_{D'} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{u}{v}\right) du dv = \int_0^1 dv \int_{-v}^0 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{u}{v}\right) du = \frac{1}{4}(1 - e^{-1}). \quad \square$$

例 6.2.11 计算由抛物线 $y^2 = x, y^2 = 2x$ 及双曲线 $xy = 1, xy = 2$ 所围平面区域 D 的面积 $\sigma(D)$ (见图 6.19).

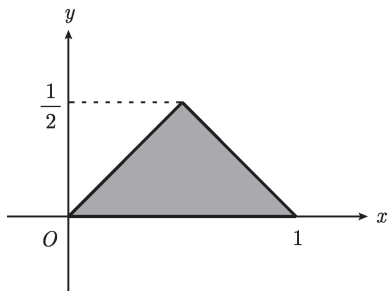


图 6.18

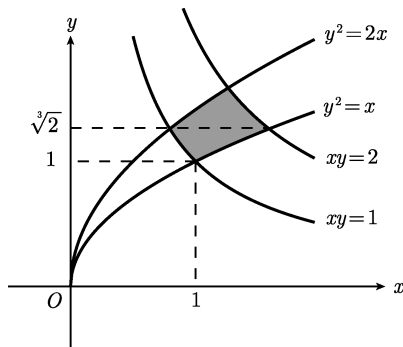


图 6.19

解 令 $u = \frac{y^2}{x}$, $v = xy$, 即 $x = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$, 雅可比行列式为

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u^4}} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{uv}} \\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v^2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u},$$

区域 D 化为 D' 表示为

$$D' = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\},$$

于是

$$\sigma(D) = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{3u} du dv = \int_1^2 dv \int_1^2 \frac{1}{3u} du = \frac{1}{3} \ln 2.$$

□

习题 6.2

1. 画出下列二重积分的积分区域, 并计算二重积分:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$, 其中 D 为 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

(2) $\iint_D \frac{1}{x+y} dx dy$, 其中 D 为直线 $y = x, y = 1, x = 2$ 所围的区域;

(3) $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$, 其中 D 为曲线 $y = x, y = x^2$ 所围的区域;

(4) $\iint_D x^2 dx dy$, 其中 D 为直线 $y = x, y = 2x, y = 2$ 所围的区域;

(5) $\iint_D (y^2 + x) dx dy$, 其中 D 为曲线 $x = y^2, x = 2 - y^2$ 所围的区域;

(6) $\iint_D (x + y + 1) dx dy$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 4$;

(7) $\iint_D (x + xy^2 + y) dx dy$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 2y$;

(8) $\iint_D x^2 e^{y^2} dx dy$, 其中 D 为直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围的区域;

(9) $\iint_D xy^2 dx dy$, 其中 D 是 $x = 1, y^2 = 4x$ 所围闭区域;

(10) $\iint_D \sqrt{1-x^2} dx dy$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 = 1, y = 0, y = x$ 所围第一象限区域.

2. 改变下列累次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$;

(2) $\int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$;

$$(3) \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x, y) dx; \quad (4) \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

3. 计算下列累次积分:

$$(1) \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1-x^4} dx;$$

$$(2) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \sin^3 x dx.$$

4. 利用极坐标变换计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + xy + y^2) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } x^2 + y^2 \leq 1;$$

$$(2) \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2;$$

$$(3) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } x^2 + y^2 \leq 2y;$$

$$(4) \iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由 } x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1 \text{ 以及 } y = x, y = 0 \text{ 所围的第一象限的区域};$$

$$(5) \iint_D \frac{1}{(a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy, \text{ 其中 } D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a;$$

$$(6) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq x^2.$$

5. 把下列直角坐标下的累次积分化为极坐标下的累次积分:

$$(1) \int_1^2 dx \int_0^x f(x, y) dy; \quad (2) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

6. 选择合适的坐标变换计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (a > 0, b > 0);$$

$$(2) \iint_D (x + y) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } x^2 + y^2 \leq x + y;$$

$$(3) \iint_D \frac{1}{xy} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由 } x + y = 1, x + y = 2, y = x, y = 2x \text{ 所围的区域};$$

$$(4) \iint_D e^{\frac{y}{y+x}} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为由 } y = 0, x = 0, x + y = 1 \text{ 所围的区域}.$$

7. 利用二重积分计算下列闭区域的面积:

(1) 设 $D: x \leq y^2 \leq 2x, y \leq x^2 \leq 2y$, 求 D 的面积;

(2) 设 D 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ 和圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 所围的区域, 求 D 的面积.

8. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D |\sin(x+y)| dx dy$, 其中 D 为 $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$;

(2) $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 D 为 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

(3) $\iint_D xy[x+y] dx dy$, 其中 D 为 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, $[x+y]$ 表示不超过 $x+y$ 的最大整数;

(4) $\iint_D |y - x^2| dx dy$, 其中 $D: -x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$;

(5) $\iint_D ||x+y| - 2| dx dy$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$;

(6) $\iint_D |y + \sqrt{3}x| dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$;

(7) $\iint_D |\sin(y-x)| dx dy$, 其中 D 为 $x+y = \frac{\pi}{2}, x=0, y=0$ 所围区域.

9. 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 0 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中积分区域 $D = \{(x, y) | \sqrt{2x-x^2} \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2\}$.

10. 求曲线 $(x-y+3)^2 + (3x+2y-1)^2 = 81$ 所围区域的面积.

11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\iint_D e^{f(x)-f(y)} dx dy \geq (b-a)^2,$$

其中积分区域为 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$.

6.3 三重积分

6.3.1 三重积分的概念与性质

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域, Ω 上质量分布非均匀, 密度函数为 $\mu(x, y, z)$, 试求空间区域 Ω 的质量.

如果 Ω 的密度是常数, 则其质量等于体积乘密度. 当 Ω 上每一点密度不同时, 我们仍用“分割取近似, 求和取极限”的方法来解决. 将区域 Ω 任意地分割为 n 个小闭区域 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$, Ω_i 的体积记为 ΔV_i , 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Omega_i \text{ 的直径}\}$. 在每一个小闭区域 Ω_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 小区域 Ω_i 的质量为 $m(\Omega_i) \approx \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$, n 个小闭区域的质量之和

$$\sum_{i=1}^n m(\Omega_i) \approx \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

是立体 Ω 的质量的近似值. 令 $\lambda \rightarrow 0$, 我们用此和式的极限来定义立体 Ω 的质量, 即

$$m(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

抽去上述实例的物理意义, 我们有

定义 6.3.1 (三重积分) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上有定义. 将 Ω 任意地分割为 n 个小闭区域 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$, Ω_i 的体积记为 ΔV_i , 又记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Omega_i \text{ 的直径}\}$. 在每一个小闭区域 Ω_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

若 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 此和式有极限 (此极限值与 Ω 的分割无关, 与每个 Ω_i 上点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关), 则称函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上黎曼可积, 简称为可积. 称此极限值为函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上的三重积分, 记为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

称 $f(x, y, z)$ 为被积函数, Ω 为积分区域, dV 为体积微元.

函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积时, 由定义可以证明函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上有界.

与二重积分可积性条件相对应, 我们可以证明:

(1) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 则函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积.

(2) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上有界, 且 $f(x, y, z)$ 的间断点分布在 Ω 中有限个光滑曲面上, 则函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上可积.

三重积分与二重积分有完全类似的性质, 在此不赘述.

6.3.2 累次积分法

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 按定义, $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上的三重积分的值与 Ω 的分割无关. 在直角坐标系中, 我们常用平行于坐标面的平面将 Ω 分割为 n 个小闭区域 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 这些小闭区域除部分可能是曲顶柱体外, 皆为长方体, 其体积 $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, 因而体积微元常记为 $dV = dx dy dz$, 称为直角坐标下的体积微元.

函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上的三重积分常记为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

下面研究三重积分的计算.

我们仅从物理意义上推出计算公式, 即将三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

看作是体密度为 $f(x, y, z) (\geq 0)$ 的空间区域 Ω 的质量.

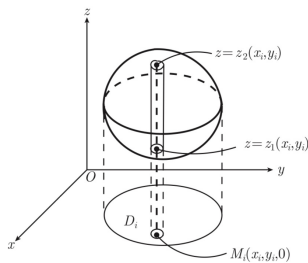


图 6.20

细长条 (1) 设闭区域 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\},$$

这里 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界闭区域, 函数 $z_1(x, y), z_2(x, y)$ 在区域 D 上连续.

将区域 D 任意地分割为 n 个小闭区域 $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$, D_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i$, 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{D_i \text{ 的直径}\}$, λ 充分小. 以 D_i 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面, 这些柱面将区域 Ω 分割为 n 个**细长条** $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 在 D_i 内任取一点 $M_i(x_i, y_i, 0)$, 过 M_i 作平行于 z 轴的直线, 此直线交 Ω_i 的边界于两点 $(x_i, y_i, z_1(x_i, y_i)), (x_i, y_i, z_2(x_i, y_i))$ (见图 6.20). λ 充分小时, 细长条上任一点 (x, y, z) 的密度约等于 $f(x_i, y_i, z)$, $z_1(x_i, y_i) \leq z \leq z_2(x_i, y_i)$. 应用微元法得细长条的质量

$$m(\Omega_i) \approx \left(\int_{z_1(x_i, y_i)}^{z_2(x_i, y_i)} f(x_i, y_i, z) dz \right) \Delta\sigma_i,$$

记

$$\text{面密度} \quad \mu(x_i, y_i) = \int_{z_1(x_i, y_i)}^{z_2(x_i, y_i)} f(x_i, y_i, z) dz,$$

则

$$m(\Omega_i) \approx \mu(x_i, y_i) \Delta\sigma_i,$$

n 个细长条的质量之和

$$\sum_{i=1}^n m(\Omega_i) \approx \sum_{i=1}^n \mu(x_i, y_i) \Delta\sigma_i$$

是区域 Ω 质量的近似值. 令 $\lambda \rightarrow 0$, 由二重积分的定义即得区域 Ω 的质量为

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m(\Omega_i) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(x_i, y_i) \Delta\sigma_i \\ &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d\sigma \end{aligned}$$

$$= \iint_D d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz.$$

由此即得三重积分的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz. \quad (6.3.1)$$

此公式表明三重积分可化为先计算一个定积分, 再计算一个二重积分, 简称**先一后二**.

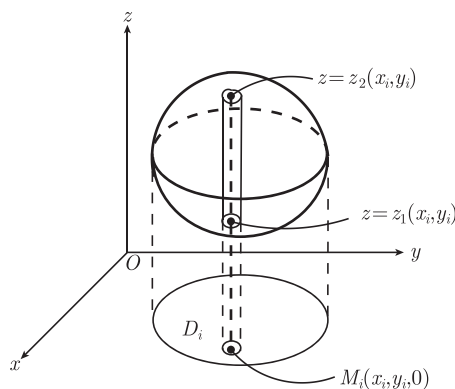


图 6.20

1. 找到几何体上下表面的方程.
上: $z_2(x,y)$ 下: $z_1(x,y)$
2. 先对 z 积分
 $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$
3. 再做二重积分
 $\iint_D d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$
 D 是几何体在 xy 平面上的投影.

如果平面区域 D 可以表示为

$$D = \{(x,y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\},$$

则公式 (6.3.1) 中的二重积分可进一步化为先对 y 后对 x 的累次积分, 这样便将三重积分化成了如下累次积分:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz. \quad (6.3.2)$$

类似地, 如果平面区域 D 可以表示为

$$D = \{(x,y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\},$$

则公式 (6.3.1) 中的二重积分可进一步化为先对 x 后对 y 的累次积分, 这样便将三重积分化成了如下累次积分:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz. \quad (6.3.3)$$

“切片法” (2) 设闭区域 Ω 在 z 轴上的投影为区间 $[h,k]$, 用 $h = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = k$ 将 $[h,k]$ 分割为 n 个子区间, 记

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}, \quad \lambda = \max\{\Delta z_i | i = 1, \cdots, n\},$$

λ 充分小. 过点 $(0, 0, z_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 作垂直于 z 轴的平面截区域 Ω , 截面记为 $D(z_i)$ (见图 6.21). Ω 介于两截面 $D(z_{i-1})$ 与 $D(z_i)$ 之间的部分记为 Ω_i , 因而立体 Ω 被分为 n 个薄片 Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$). λ 充分小时, 薄片 Ω_i 上任一点 (x, y, z) 的密度约等于 $f(x, y, z_i)$, $(x, y) \in D(z_i)$, 应用微元法得平面薄片 Ω_i 的质量

$$m(\Omega_i) \approx \left(\iint_{D(z_i)} f(x, y, z_i) d\sigma \right) \Delta z_i,$$

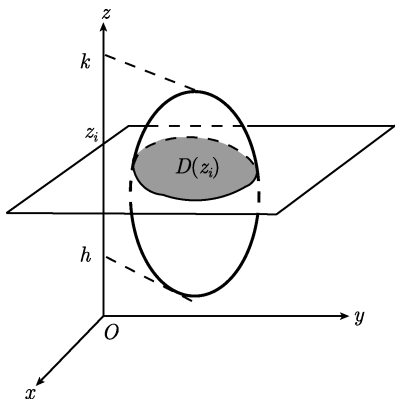


图 6.21

记

$$\mu(z_i) = \iint_{D(z_i)} f(x, y, z_i) d\sigma,$$

则 $m(\Omega_i) \approx \mu(z_i) \Delta z_i$, n 个薄片的质量之和

$$\sum_{i=1}^n m(\Omega_i) \approx \sum_{i=1}^n \mu(z_i) \Delta z_i$$

是区域 Ω 质量的近似值. 令 $\lambda \rightarrow 0$, 由定积分的定义即得区域 Ω 的质量为

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \sum_{i=1}^n m(\Omega_i) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(z_i) \Delta z_i \\ &= \int_h^k \mu(z) dz = \int_h^k \left(\iint_{D(z)} f(x, y, z) d\sigma \right) dz \\ &= \int_h^k dz \iint_{D(z)} f(x, y, z) d\sigma, \end{aligned}$$

由此即得三重积分的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_h^k dz \iint_{D(z)} f(x, y, z) d\sigma. \quad (6.3.4)$$

此公式表明三重积分可化为先计算一个二重积分, 再计算一个定积分, 简称**先二后一**. 对于公式 (6.3.4) 中的二重积分, 可进一步化为对 x, y 的累次积分. 这样便将三重积分化成了直角坐标下的累次积分.

最后指出, 当 Ω 不满足上述公式推导中所要求的条件时, 我们可将 Ω 分割为若干小区域, 使得在每个小区域上可以按上述公式进行计算, 然后应用三重积分对积分区域的可加性, 把它们相加即可.

*** 例 6.3.1** 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz$, Ω 是由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 包围的立体.

解 方法 1: 先一后二 (最先对 z 积分, 见图 6.22).

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz &= \iint_D dy \int_0^{1-x-y} y \, dz \\
 &= \iint_D y(1-x-y) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y(1-x-y) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 y(1-y)^2 \, dy = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

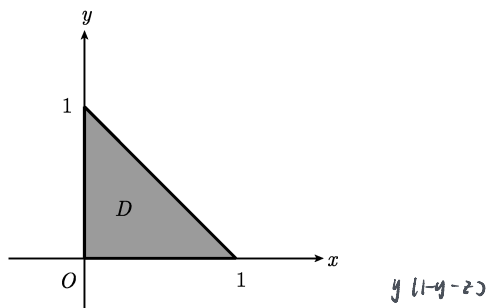
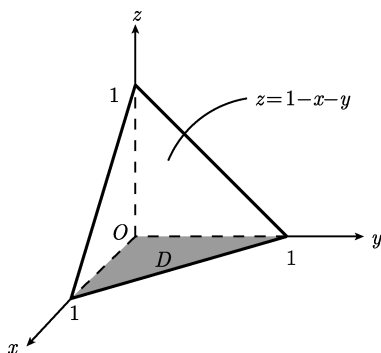


图 6.22

方法 2: 先二后一 (最后对 z 积分). 过 $(0,0,z) (0 \leq z \leq 1)$ 作一垂直于 z 轴的平面, 此平面截 Ω 所得截面记为 $D(z)$ (见图 6.23), 则

$$D(z) = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1-y-z, 0 \leq y \leq 1-z\},$$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^1 dz \iint_{D(z)} y \, dx \, dy = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} y \, dx \\
 &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} y(1-y-z) \, dy = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

方法 3: 先二后一 (最后对 y 积分). 过 $(0,0,y) (0 \leq y \leq 1)$ 作一垂直于 y 轴的平面, 此平

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \iint_{D(z)} y \, dx \, dy = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} y \, dx \\
 &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} y(1-y-z) \, dy \\
 &= \int_0^1 dz \left[\frac{1}{2}(1-z)^2 - \frac{1}{3}(1-z)^3 - \frac{z}{2}(1-z)^2 \right] \\
 &= \int_0^1 dz \left[\frac{1}{6}(1-z)^2 (3 - 2(1-z) - 3z) \right] \\
 &= \int_0^1 dz \left[\frac{1}{6}(1-z)^2 (3 - 2 + 2z - 3z) \right] \\
 &= \int_0^1 dz \left[\frac{1}{6}(1-z)^2 (1 - z) \right] \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-z)^3 \, dz \\
 &= -\frac{1}{24} (1-z)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

面截 Ω 所得截面记为 $D(y)$ (见图 6.24), 则

$$D(y) = \{(z, x) | 0 \leq x \leq 1 - y - z, 0 \leq z \leq 1 - y\},$$

$$\sigma(D(y)) = \frac{1}{2}(1 - y)^2,$$

$$\text{原式} = \int_0^1 y dy \iint_{D(y)} dz dx = \int_0^1 y \sigma(D(y)) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y (1 - y)^2 dy = \frac{1}{24}.$$

□

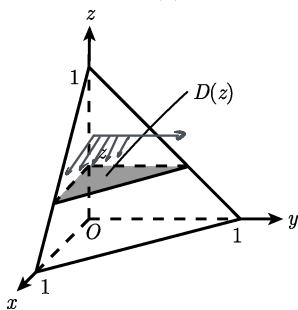


图 6.23

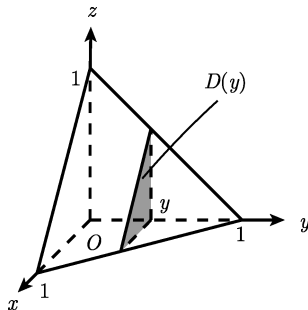


图 6.24

例 6.3.2 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$, 其中 Ω 为锥面 $z = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$ 与 $z = 2$ 所围立体 (见图 6.25).

解 $\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{4x^2 + 4y^2} \leq z \leq 2, (x, y) \in D\}, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1,$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D dx dy \int_{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}^2 y^2 dz = \iint_D y^2 (2 - \sqrt{4x^2 + 4y^2}) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin^2 \theta (2 - 2\rho) \rho d\rho = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

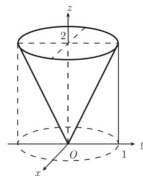


图 6.25

□

例 6.3.3 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (ax + by + cz) dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ (见图 6.26).

解 Ω 关于 $x = 0$ 对称, ax 关于 x 是奇函数, 所以 $\iiint_{\Omega} ax dx dy dz = 0$; Ω 关于 $y = 0$

对称, by 关于 y 是奇函数, 所以 $\iiint_{\Omega} by dx dy dz = 0$;

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (ax + by + cz) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} cz dx dy dz \\ &= \int_0^2 cz dz \iint_{D(z)} dx dy \end{aligned}$$

$$D(z): x^2 + y^2 \leq 2z - z^2,$$

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} cz dx dy dz = \int_0^2 cz dz \iint_{D(z)} dx dy$$

$$= \int_0^2 cz \sigma(D(z)) dz = \int_0^2 \pi cz (2z - z^2) dz = \frac{4}{3} c\pi.$$

□

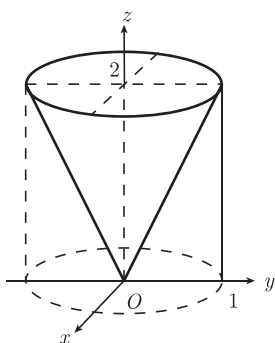


图 6.25

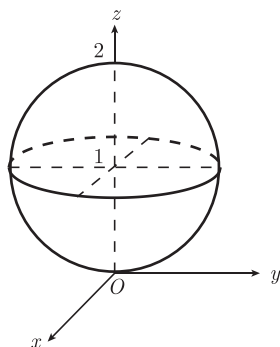


图 6.26

★例 6.3.4 计算累次积分 $\int_0^1 dy \int_0^y dx \int_0^x \frac{e^z}{1-z} dz$.

解 由于对 z 的积分不出来, 所以考虑交换累次积分的次序. 先交换 x 与 z 的次序, 再交换 y 与 z 的次序 (见图 6.27),

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_z^y \frac{e^z}{1-z} dx \\
 &= \int_0^1 dy \int_0^y \frac{e^z}{1-z} (y-z) dz \\
 &= \int_0^1 dz \int_z^1 \frac{e^z}{1-z} (y-z) dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} e^z (1-z) dz = \frac{e}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

□

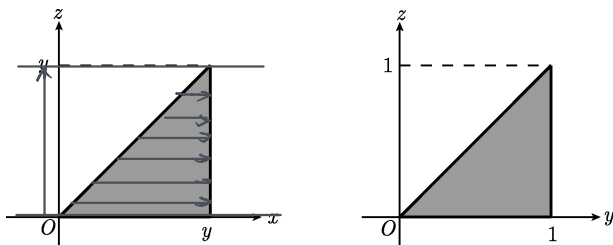


图 6.27

6.3.3 换元积分法

本节介绍三重积分的换元积分法, 先介绍一般的三重积分换元积分公式, 再介绍常用的三重积分换元变换.

一、三重积分的换元积分公式

定理 6.3.1 (三重积分的换元积分公式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 函数组 $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ 在有界闭区域 Ω' 上连续可微, 使

得 Ω 与 Ω' 的点一一对应, 并且雅可比行列式

$$J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v, w) \in \Omega',$$

则有三重积分换元积分公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw.$$

其中 $dV = |J(u, v, w)| du dv dw$ 是曲线坐标下的体积微元.

三重积分的坐标变换, 主要有柱坐标变换与球坐标变换. 下面我们分别介绍它们.

二、柱坐标变换

我们先介绍柱坐标系. 取空间直角坐标系 $O-xyz$, 设点 M 的直角坐标为 (x, y, z) , 柱坐标系是将点 M 的位置用三个有序的实数 (ρ, θ, z) 表示, 其中 (ρ, θ) 是点 M 在 xOy 平面上的投影 P 的极坐标, z 是点 M 的直角坐标的第三个分量. 在柱坐标系中,

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (\text{或} \quad -\pi \leq \theta < \pi), \quad -\infty < z < +\infty.$$

假设 ρ_0, θ_0, z_0 分别满足上述不等式, 则

$\rho = \rho_0$ 是以 z 轴为对称轴, ρ_0 为半径的圆柱面;

$\theta = \theta_0$ 是以 z 轴为边界的半平面, 且 x 轴绕 z 轴右旋 θ_0 后位于该平面内;

$z = z_0$ 是垂直于 z 轴的平面, 它在 z 轴上的截距为 z_0 .

点 M 的直角坐标 (x, y, z) 与其柱坐标 (ρ, θ, z) 之间有关系式

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z,$$

此式称为柱坐标变换.

采用柱坐标计算三重积分时, 雅可比行列式

$$J(\rho, \theta, z) = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

据定理 6.3.1 可得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz,$$

其中 $dV = \rho d\rho d\theta dz$ 是柱坐标下的体积微元.

将三重积分化为柱坐标下的三重积分后, 还要将它化为柱坐标下的累次积分, 这时, 可以先对 z 积分, 也可以最后对 z 积分. 下面我们用几个例子来说明.

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iint_{\square} dx dy \int_0^4 z dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho d\rho \int_0^4 z dz \quad \text{微 积 分 II}$$



例 6.3.5 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 = z^2$ 与 $z = 4$ 所围的区域 (见图 6.28).

解 方法 1: 采用柱坐标变换, 最先对 z 积分. 将 Ω 变为 Ω' , 则

$$\Omega' = \{(\rho, \theta, z) | \rho \leq z \leq 4, 0 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega'} \rho z d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 d\rho \int_{\rho}^4 \rho z dz = 64\pi.$$

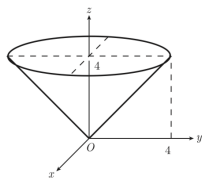


图 6.28

方法 2: 采用柱坐标变换, 最后对 z 积分. 则

$$\Omega' = \{(\rho, \theta, z) | 0 \leq \rho \leq z, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4\},$$

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega'} \rho z d\rho d\theta dz = \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \rho z d\rho = 64\pi.$$

□

例 6.3.6 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 为 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围的区域 (见图 6.29).

解 采用柱坐标变换, 将 Ω 变为 Ω' , 则

$$\Omega' = \{(\rho, \theta, z) | \rho^2 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega'} \rho z^2 d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho z^2 dz = \left(\frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{13}{60} \right) \pi.$$

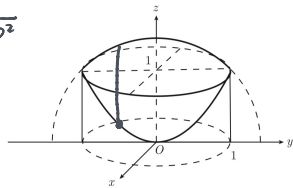


图 6.29

如果要最后对 z 积分, 则需要把 Ω' 分成两部分. 易知两曲面 $x^2 + y^2 = z$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 交线的 z 坐标为 1, 用平面 $z = 1$ 把 Ω' 分为上下两部分, 平面上方的部分记为 Ω'_1 , 下方的部分记为 Ω'_2 , 则

$$\Omega'_1 = \{(\rho, \theta, z) | 0 \leq \rho \leq \sqrt{2 - z^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq z \leq \sqrt{2}\},$$

$$\Omega'_2 = \{(\rho, \theta, z) | 0 \leq \rho \leq \sqrt{z}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega'} \rho z^2 d\rho d\theta dz \\ &= \iiint_{\Omega'_1} \rho z^2 d\rho d\theta dz + \iiint_{\Omega'_2} \rho z^2 d\rho d\theta dz \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho z^2 d\rho + \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} \rho z^2 d\rho \\ &= \left(\frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{13}{60} \right) \pi. \end{aligned}$$

□

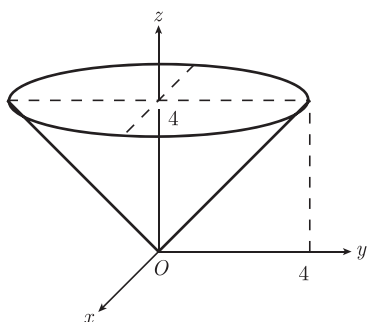


图 6.28

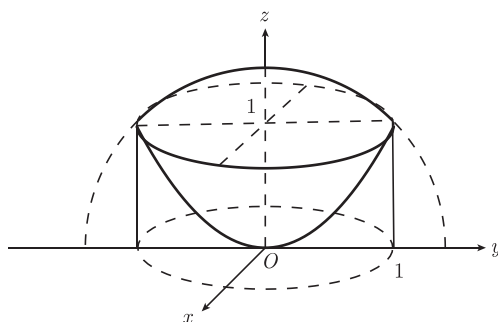


图 6.29

三、球坐标变换

我们先介绍球坐标系. 取空间直角坐标系 $O-xyz$, 设点 M 的坐标为 (x, y, z) , 球坐标系是将点 M 的位置用三个有序的实数 (r, φ, θ) 表示, 其中 r 是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模, φ 是向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向的夹角, θ 是点 M 在 xOy 平面上的投影 P 的极角. 在球坐标系中,

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (\text{或 } -\pi \leq \theta < \pi).$$

假设 r_0, φ_0, θ_0 分别满足上述不等式, 则

$r = r_0$ 是中心在原点, 半径为 r_0 的球面;

$\varphi = \varphi_0$ 是以原点为顶点, z 轴为对称轴, 半顶角为 φ_0 的圆锥面;

$\theta = \theta_0$ 是以 z 轴为边界的半平面, 且 x 轴绕 z 轴右旋 θ_0 后位于该平面内.

点 M 的直角坐标 (x, y, z) 与其球坐标 (r, φ, θ) 之间有关系式

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi,$$

此式称为球坐标变换.

采用球坐标计算三重积分时, 雅可比行列式

$$J(r, \varphi, \theta) = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi,$$

据定理 6.3.1 可得

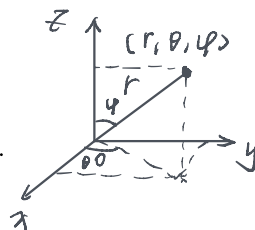
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta,$$

其中 $dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ 是球坐标下的体积微元.

一般情况下, 如果积分区域中含有球面、锥面或过 z 轴的半平面, 采用球坐标会比较简单. 将三重积分化为球坐标下的三重积分后, 还要将它化为球坐标下的累次积分, 这时, 一般情况下最先对 r 积分, 然后对 φ 积分, 最后对 θ 积分. 下面我们用几个例子来说明.

例 6.3.7 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z$ (见图 6.30).

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \\ & \Rightarrow r \leq 4 \cos \varphi \end{aligned}$$



解 采用球坐标变换, 将 Ω 变为 Ω' ,

$$\Omega': 0 \leq r \leq 4 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega'} r^2 \sin \varphi \cdot r \cos \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} r^3 \sin \varphi \cos \varphi \, dr \\ &= \frac{56}{3} \pi. \end{aligned}$$

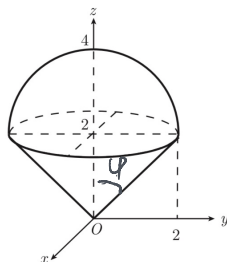


图 6.30

例 6.3.8 设 Ω 是锥体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$, 计算 $\iiint_{\Omega} |\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1| \, dx \, dy \, dz$.

解 用曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 将 Ω 分为两部分, 分别记为 Ω_1 与 Ω_2 (见图 6.31). 采用球坐标变换, 将 Ω_1 与 Ω_2 分别变为 Ω'_1 与 Ω'_2 ,

$$\Omega'_1: 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\Omega'_2: 1 \leq r \leq \frac{2}{\cos \varphi}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega_1} (1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{\Omega_2} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1) \, dx \, dy \, dz$$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega'_1} r^2 \sin \varphi \cdot (1 - r) \, dr \, d\varphi \, d\theta + \iiint_{\Omega'_2} r^2 \sin \varphi \cdot (r - 1) \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin \varphi \cdot (1 - r) \, dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\frac{2}{\cos \varphi}} r^2 \sin \varphi \cdot (r - 1) \, dr \\ &= \frac{31\sqrt{2} - 30}{6} \pi. \end{aligned}$$

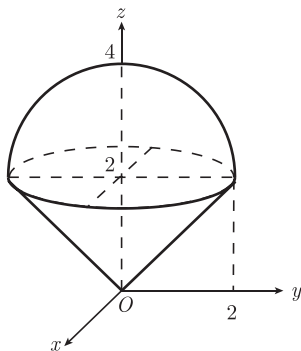


图 6.30

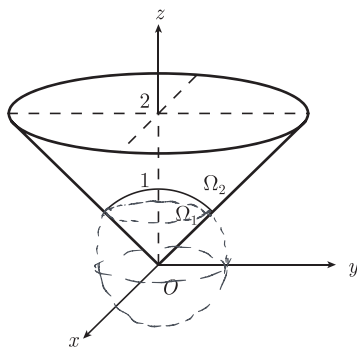


图 6.31

除了球坐标变换, 还有广义球坐标变换.

例 6.3.9 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

解 采用广义球坐标变换, 令

$$x = ar \sin \varphi \cos \theta, \quad y = br \sin \varphi \sin \theta, \quad z = cr \cos \varphi,$$

雅可比行列式

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} a \sin \varphi \cos \theta & ar \cos \varphi \cos \theta & -ar \sin \varphi \sin \theta \\ b \sin \varphi \sin \theta & br \cos \varphi \sin \theta & br \sin \varphi \cos \theta \\ c \cos \varphi & -cr \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = abcr^2 \sin \varphi,$$

在球坐标下将 Ω 变为 Ω' , 其中

$$\Omega': 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega'} a^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \cdot abcr^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 a^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \cdot abcr^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{4}{15} a^3 bc \pi. \end{aligned}$$

□

习题 6.3

1. 将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为直角坐标下适当次序的累次积分, 其中 Ω 分

别为:

- (1) 圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 10$ 以及 $z = 0$ 所围的立体;
- (2) 抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 0$ 所围的立体;
- (3) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > 0, b > 0, c > 0)$ 所围的立体;
- (4) 圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围的立体.

2. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $x + y + 2z = 1$ 与坐标面所围立体;

(2) $\iiint_{\Omega} y dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $z = xy, x + y = 1$ 与 $z = 0$ 所围立体;

(3) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 1$ 所围立体;

(4) $\iiint_{\Omega} y \sin(x + z) dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0$ 以及 $x + z = \frac{\pi}{2}$ 所围立体;

(5) $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 为 $z = 0$ 与 $y + z = 1, y = x^2$ 所围的空间区域.

3. 用适当的方法计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z \, dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 4$ 所围立体;

(2) $\iiint_{\Omega} (x + y + z) \, dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与 $3z = x^2 + y^2$ 所围立体;

(3) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dx dy dz$, 其中 Ω 是由圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 1$ 所围立体;

(4) $\iiint_{\Omega} z \, dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

(5) $\iiint_{\Omega} x^2 \, dx dy dz$, 其中 Ω 为 $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$;

(6) $\iiint_{\Omega} (x + z) \, dx dy dz$, 其中 Ω 为 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

(7) $\iiint_{\Omega} e^{|z|} \, dx dy dz$, 其中 Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;

(8) $\iiint_{\Omega} z \ln(x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz$, 其中 Ω 为 $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;

(9) $\iiint_{\Omega} y^2 \, dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 \leq 1$;

(10) $\iiint_{\Omega} e^{z^2} \, dx dy dz$, 其中 Ω 为 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = a$ ($a > 0$) 围成的空间区域;

(11) $\iiint_{\Omega} z^2 \, dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq Rx$ 所围成的空间区域 (其中 $R > 0$).

4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 \, dx dy dz$, 其中 Ω 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

5. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} |z - \sqrt{x^2 + y^2}| \, dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ 所围成的空间区域 ($R > 0$).

6. 设 Ω 是由 $\begin{cases} x^2 = z, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面与 $z = 1, z = 2$ 所围成的区域, 计算

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dV.$$

7. 设 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2 (t > 0)$, 计算

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz,$$

其中 $f(u)$ 连续可微, $f(0) = 0$.

8. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明

$$\int_0^a dy \int_0^y dz \int_0^z f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^a f(x)(a-x)^2 dx.$$

9. 设函数 $f(u)$ 连续, $\Omega_t: 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq t^2 (t > 0)$, 而

$$F(t) = \iiint_{\Omega_t} (z^2 + f(x^2 + y^2) + \sin x + \sin y) dV,$$

$$\text{求 } \frac{dF}{dt} \text{ 及 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^1 F(xt) dx}{t^2}.$$

6.4 重积分的应用

6.4.1 重积分在几何上的应用

一、立体的体积

设 Ω 为空间的有界闭区域, 若 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\},$$

这里 D 为 xOy 平面上的有界闭区域, 函数 $z_1(x, y), z_2(x, y)$ 在 D 上连续, 则 Ω 的体积为

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz = \iint_D (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy. \quad (6.4.1)$$

立体的体积还可用柱坐标或球坐标下的三重积分进行计算, 分别有公式:

$$V = \iiint_{\Omega'} \rho d\rho d\theta dz, \quad (6.4.2)$$

$$V = \iiint_{\Omega'} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta. \quad (6.4.3)$$

上述公式中的 Ω' 分别为区域 Ω 在柱坐标及球坐标变换下所对应的区域.

例 6.4.1 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体 Ω 的体积 (见图 6.32).

解

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

则

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (2 - \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 - \rho - \rho^2) \rho d\rho = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

□

例 6.4.2 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1, z = 4$ 所围立体 Ω 的体积 (见图 6.33).

解 采用柱坐标, 最后对 z 积分. 则

$$\Omega' = \{(\rho, \theta, z) | 0 \leq \rho \leq \sqrt{z}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq z \leq 4\},$$

$$V = \iiint_{\Omega'} \rho d\rho d\theta dz = \int_1^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} \rho d\rho = \frac{15}{2}\pi.$$

□

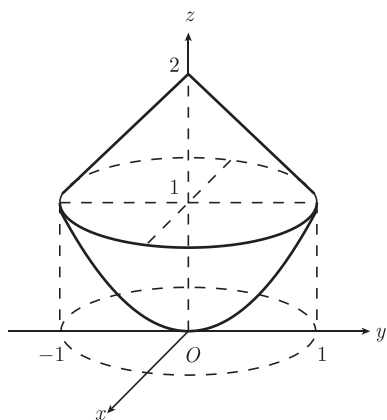


图 6.32

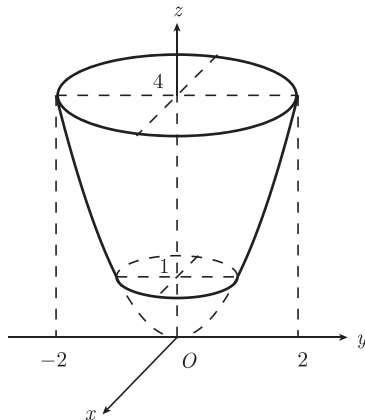


图 6.33

二、曲面的面积

定义 6.4.1 (曲面面积) 设 S 为有界光滑曲面, 曲面 S 在某个坐标面 (如 xOy 平面) 上的投影为有界闭区域 D , S 与 D 的点一一对应. 将区域 D 任意地分割为 n 个小区域 $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{D_i \text{ 的直径}\}$, λ 充分小. 以 D_i 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面 $S'_i (i = 1, \dots, n)$, 这些柱面将曲面 S 分割为 n 个小曲面 $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 在 S_i 上任取点 P_i , 过 P_i 作曲面 S 的切平面, 设此切平面被柱面 S'_i 截得的平面区域为 Π_i , 记 Π_i 的面积为 $\sigma(\Pi_i)$. 若

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma(\Pi_i)$$

存在, 则称此极限值为曲面 S 的面积.

下面推导曲面面积的计算公式.

定理 6.4.1 (参数方程下曲面的面积公式) 设 S 为光滑曲面 (我们也用 S 表示其面积), 其参数方程为

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D',$$

D' 为 uv 平面上的有界闭区域, 函数 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 在 D' 上连续可微, 记

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)},$$

则曲面 S 的面积为

$$S = \iint_{D'} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du dv.$$

这里 $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du dv$ 称为曲线坐标下的曲面面积微元, 简称曲面微元.

证明 不妨设曲面 S 满足定义 6.4.1 的条件, 它在 xOy 平面上的投影为有界闭域 D , S 与 D 的点一一对应 (否则将 S 分割为有限块, 分别投影到有关坐标平面上, 对证明没有影响). 用 u 曲线与 v 曲线将 D 分割为 n 个子闭区域 D_i , D_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i$, 则由定理 6.2.3 的证明可知

$$\Delta\sigma_i \approx |J(u_i, v_i)| \Delta u_i \Delta v_i = |C(u_i, v_i)| \Delta u_i \Delta v_i.$$

设曲面 S 上点 P_i 的曲线坐标为 (u_i, v_i) , 由于曲面 S 在点 P_i 的法向量为

$$\mathbf{n}_i = (A(u_i, v_i), B(u_i, v_i), C(u_i, v_i)),$$

设向量 $\mathbf{n}_i$ 的方向余弦为 $\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i$, 则

$$\cos \gamma_i = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Big|_{(u_i, v_i)},$$

所以

$$\sigma(\Pi_i) = \frac{\Delta\sigma_i}{|\cos \gamma_i|} \approx \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \Big|_{(u_i, v_i)} \Delta u_i \Delta v_i,$$

据定义 6.4.1 和二重积分的定义即得

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma(\Pi_i) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \Big|_{(u_i, v_i)} \Delta u_i \Delta v_i \\ &= \iint_{D'} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du dv. \end{aligned}$$

□

推论 6.4.2 设 S 为光滑曲面 (我们也用 S 表示其面积), 其参数方程为

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

其中 $(u, v) \in D'$, D' 为 uv 平面上的有界闭区域, 函数 x, y, z 在 D' 上连续可微, 记

$$\mathbf{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad E = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_u, \quad F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v, \quad G = \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_v,$$

则曲面 S 的面积为

$$S = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2} \, du dv.$$

推论 6.4.3 (直角坐标下曲面的面积公式) 设光滑曲面 S 的方程为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

D 为 xOy 平面上的有界闭区域, 函数 f 在 D 上连续可微, 则曲面 S 的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy.$$

这里 $dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$ 称为直角坐标下的曲面微元.

证明 此时我们取曲面 S 的参数方程为: $x = x, y = y, z = f(x, y)$, 记 $\mathbf{r} = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$, 则

$$\mathbf{r}'_x = (1, 0, f'_x), \quad \mathbf{r}'_y = (0, 1, f'_y),$$

于是

$$E = \mathbf{r}'_x \cdot \mathbf{r}'_x = 1 + (f'_x)^2, \quad F = \mathbf{r}'_x \cdot \mathbf{r}'_y = f'_x f'_y, \quad G = \mathbf{r}'_y \cdot \mathbf{r}'_y = 1 + (f'_y)^2,$$

所以

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy. \quad \square$$

例 6.4.3 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 所截下的部分曲面的面积, 其中 $a > 0$ (见图 6.34).

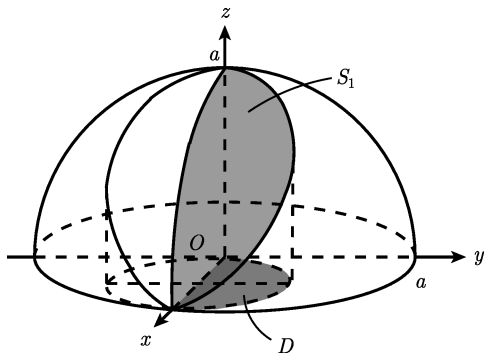


图 6.34

解 设 S_1 是所求曲面在第一卦限部分的面积, 则由对称性, $S = 4S_1$.

$$S_1: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D, \quad D: x^2 + y^2 \leq ax, y \geq 0.$$

$$\begin{aligned} S &= 4S_1 = 4 \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = 4 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho = 2a^2(\pi - 2). \end{aligned} \quad \square$$

例 6.4.4 求柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部分曲面的面积 ($a > 0$).

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho^2 \quad \left. -\sqrt{a^2 - \rho^2} \right|_0^{a \cos \theta}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

$$z \leq \sqrt{a^2 - ax} \cdot 95.$$

解 设 S_1 是所求曲面在第一卦限部分的面积, 则由对称性, $S = 4S_1$ (见图 6.35).

是一个柱面

$$S_1: y = \sqrt{ax - x^2}, \quad (x, z) \in D, \quad D: 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - ax}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$S = 4S_1 = 4 \iint_D \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dz dx = 2 \iint_D \frac{a}{\sqrt{ax - x^2}} dz dx$$

$$= 2a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - ax}} \frac{1}{\sqrt{ax - x^2}} dz = 4a^2.$$

□

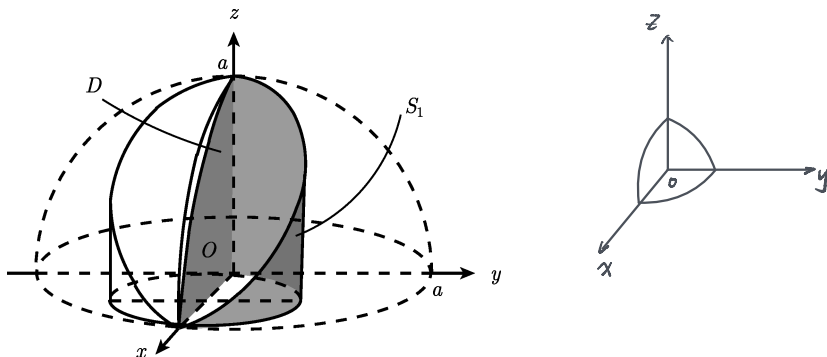


图 6.35

6.4.2 重积分在物理上的应用*

从二重积分和三重积分概念的引入可以看到, 利用它们可以分别求平面薄片以及空间立体的质量. 除此以外, 重积分在物理上还有着广泛的应用. 下面我们仅从几个方面举例说明.

一、引力

设空间中有一物体, 占有空间中的有界闭区域 Ω , 密度为 Ω 上的连续函数 $\mu = \mu(x, y, z)$, 求它对位于 Ω 外的质点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (质量为 m) 的引力 $\mathbf{F}$.

在 Ω 内任取一直径很小的区域 dV (我们也用 dV 表示该区域的体积), 在 dV 内任取一点 $P(x, y, z)$, 把 dV 看作以 P 点处的密度为均匀密度的区域, 则 dV 的质量为 $\mu(x, y, z)dV$, 把 dV 看作质点 (质量集中在点 P 处), 则按两点之间的引力公式有

$$d\mathbf{F} = k \frac{m\mu(x, y, z)dV}{r^2} \cdot \mathbf{n}^\circ.$$

这里 k 为引力常数, $r = |\overrightarrow{P_0P}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, $\mathbf{n}^\circ$ 为与 $\overrightarrow{P_0P}$ 同向的单位向量, 即

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\overrightarrow{P_0P}}{|\overrightarrow{P_0P}|} = \left(\frac{x - x_0}{r}, \frac{y - y_0}{r}, \frac{z - z_0}{r} \right),$$

因此 $d\mathbf{F}$ 在三个坐标轴上的分量分别为

$$dF_x = k \frac{m\mu(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dV,$$

$$dF_y = k \frac{m\mu(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dV,$$

$$dF_z = k \frac{m\mu(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dV,$$

于是得到引力 $\mathbf{F}$ 在三个坐标轴上的分量分别为

$$F_x = km \iiint_{\Omega} \frac{\mu(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dV,$$

$$F_y = km \iiint_{\Omega} \frac{\mu(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dV,$$

$$F_z = km \iiint_{\Omega} \frac{\mu(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dV,$$

其中 $r = |\overrightarrow{P_0P}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

如果考虑平面薄片对薄片外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的质量为 m 的质点的引力, 设平面薄片占有 xOy 平面上的有界闭区域 D , 其面密度为 $\mu(x, y)$, 那么只要将上式中的密度 $\mu(x, y, z)$ 换成面密度 $\mu(x, y)$, 将 Ω 上的三重积分换成 D 上的二重积分, 就可得到相应的计算公式.

例 6.4.5 求质量为 M , 半径为 R 的均匀球体对质量为 m , 与球心距离为 a ($a > R$) 的质点的引力.

解 设球体的球心在坐标原点, 质点为 $(0, 0, a)$, 球体的密度为 μ , 则球体 Ω 的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. 由对称性易知 $F_x = 0, F_y = 0$.

$$\begin{aligned} F_z &= km\mu \iiint_{\Omega} \frac{(z - a)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2})^3} dV, \\ F_z &= km\mu \int_{-R}^R dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{(z - a)\rho}{(\sqrt{\rho^2 + (z - a)^2})^3} d\rho \\ &= km\mu \int_{-R}^R dz \int_0^{2\pi} \left(-\frac{z - a}{\sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{R^2 - z^2}} d\theta \\ &= km\mu \int_{-R}^R dz \int_0^{2\pi} \left(\frac{z - a}{a - z} - \frac{z - a}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}} \right) d\theta \\ &= 2\pi km\mu \int_{-R}^R \left(-1 - \frac{z - a}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}} \right) dz \\ &= 2\pi km\mu \left(-2R + \frac{1}{a} \int_{-R}^R (z - a) d\sqrt{R^2 - 2az + a^2} \right) \\ &= -\frac{4\pi R^3}{3a^2} km\mu. \end{aligned}$$

所以球体对已知质点的引力为 $\left(0, 0, -\frac{4\pi R^3}{3a^2} km\mu\right)$.

□

二、质心

一物体占有空间区域 Ω , 密度为 $\mu(x, y, z)$, 求 Ω 的质心.

在 Ω 内任取一直径很小的区域 dV (dV 也表示该区域的体积), 在 dV 内任取一点 $P(x, y, z)$, 把 dV 看作以 P 点处的密度为均匀密度的区域, 则 dV 的质量为 $\mu(x, y, z)dV$, 把 dV 看作质点 (质量集中在点 P 处), 则其静矩微元 dM_x, dM_y, dM_z 分别为

$$dM_x = x\mu(x, y, z)dV, \quad dM_y = y\mu(x, y, z)dV, \quad dM_z = z\mu(x, y, z)dV,$$

于是

$$M_x = \iiint_{\Omega} x\mu(x, y, z)dV, \quad M_y = \iiint_{\Omega} y\mu(x, y, z)dV, \quad M_z = \iiint_{\Omega} z\mu(x, y, z)dV,$$

由此得立体 Ω 的质心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x\mu(x, y, z)dV,$$

$$\bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y\mu(x, y, z)dV,$$

$$\bar{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z\mu(x, y, z)dV,$$

其中 $M = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z)dV$.

当 Ω 质量均匀时, 其质心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} y dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dV,$$

此时称 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为 Ω 的形心.

设一平面薄片占有平面区域 D , 其面密度为 $\mu(x, y)$, 则类似可得 D 的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{M} \iint_D x\mu(x, y)dxdy,$$

$$\bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{M} \iint_D y\mu(x, y)dxdy,$$

其中 $M = \iint_D \mu(x, y)dxdy$.

例 6.4.6 设有一半径为 R 的球体, P_0 是球面上一定点, 球体上任何一点的密度与该点到 P_0 的距离成正比 (比例系数为 k), 求球体的质心位置.

解 设球体的球心在点 $(0, 0, R)$, 点 P_0 位于坐标原点, 则球体内任意一点 (x, y, z) 的密度为 $\mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则球体的质量为

$$M = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV = k \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV.$$

采用球坐标变换, 则

$$M = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^3 \sin \varphi dr = \frac{1}{10} k \pi a^4.$$

记质心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 则

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} kx \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} ky \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} kz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV \\ &= \frac{k}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^4 \sin \varphi \cos \varphi dr = \frac{4a}{7}. \end{aligned}$$

因此, 此球体质心坐标为 $(0, 0, \frac{4a}{7})$. □

三、转动惯量

我们知道, 平面上位于点 $P(x, y)$ 处一质量为 m 的质点对于 x 轴, y 轴, 以及坐标原点 O 的转动惯量分别为

$$I_x = my^2, \quad I_y = mx^2, \quad I_0 = m(x^2 + y^2),$$

现在考虑空间一物体, 它占有空间区域 Ω , 密度为 $\mu(x, y, z)$, 求 Ω 分别对 x 轴、 y 轴、 z 轴及坐标原点的转动惯量.

在 Ω 内任取一直径很小的区域 dV (dV 也表示该区域的体积), 在 dV 内任取一点 $P(x, y, z)$, 把 dV 看作以 P 点处的密度为均匀密度的区域, 则 dV 的质量为 $\mu(x, y, z)dV$, 把 dV 看作质点 (质量集中在点 P 处), 则其对 x 轴、 y 轴、 z 轴及坐标原点的转动惯量微元分别为

$$dI_x = (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dV,$$

$$dI_y = (z^2 + x^2)\mu(x, y, z)dV,$$

$$dI_z = (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)dV,$$

$$dI_0 = (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dV,$$

于是

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dV, \\ I_y &= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) \mu(x, y, z) dV, \\ I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dV, \\ I_0 &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

类似可得面密度为 $\mu(x, y)$ 的平面薄片 D 对坐标轴及坐标原点的转动惯量分别为

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy, \\ I_y &= \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy, \\ I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

例 6.4.7 设 D 是由心脏线 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ 所围的质量均匀的平面薄片, 求它对 y 轴的转动惯量.

解 设平面薄片的密度为 k , 则

$$I_y = \iint_D x^2 k dx dy,$$

采用极坐标变换, 则

$$I_y = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho = \frac{49}{32} k \pi a^4.$$

□

习题 6.4

1. 求下列立体的体积:

- (1) $\Omega: x^2 + y^2 \leq z \leq 1$;
- (2) Ω : 圆柱体 $x^2 + y^2 \leq Rx$ 被球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 截下的部分, 其中 $R > 0$;
- (3) $\Omega: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$;
- (4) $\Omega: x^2 + y^2 \leq 1, z^2 + x^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1$;
- (5) $\Omega: 0 \leq 2z \leq x^2 + y^2, (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2$;
- (6) $\Omega: x=0, y=0, x+y=1$ 所围的三棱柱体被 $z=0$ 及 $z=6-x^2-y^2$ 所截的部分;
- (7) Ω : 六个平面 $x+y+z=\pm 1, -x+2y+3z=\pm 2, 2x-y+5z=\pm 3$ 所围平行六面体;

- (8) $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2 (a > b > 0)$;
- (9) $\Omega: z = x^2 + 3y^2$ 与 $z = 8 - x^2 - y^2$ 所围立体.
2. 求下列曲面的面积:
- (1) 平面 $x + 2y + 3z = 1$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 截下的部分;
- (2) 双曲抛物面 $z = xy$ 被 $x^2 + y^2 = 1$ 截下的第一卦限的部分;
- (3) 两个圆柱面 $x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1$ 所围立体的表面积;
- (4) 三个圆柱面 $x^2 + y^2 = 1, z^2 + x^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$ 所围立体的表面积;
- (5) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被 $z = h$ 与 $z = -h (0 \leq h \leq R)$ 截下的部分;
- (6) 圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截下的部分;
- (7) 圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 截下的部分;
- (8) 圆柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 被曲面 $z^2 = 2y$ 所截下的部分.
3. 求圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $2z - y = 3$ 所围立体的表面积.
4. 求曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$ 所围立体的体积 ($a > 0$).
5. 求密度均匀圆锥体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 对位于坐标原点处一单位质点的引力.
6. 设圆盘 $x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$ 的密度为 $\mu(x, y) = y^2$, 求它对位于 z 轴上点 $(0, 0, b)$ 处的单位质点的引力 ($a > 0$).
7. 求下列平面薄片 D 的质心:
- (1) D 为 $y = x^2$ 与 $y = 1$ 所围区域, 密度 $\mu(x, y) = 1 + x$;
- (2) D 为心脏线 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ 所围区域, 密度 $\mu(x, y) = 1$;
- (3) D 为旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴所围区域, 密度 $\mu(x, y) = 1$.
8. 求下列立体的质心:
- (1) Ω 为上半球体 $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 密度 $\mu = 1 + x^2 + y^2 + z^2$;
- (2) Ω 为 $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, 密度 $\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
- (3) Ω 为平面 $x + y + z = 1$ 与 $x = 0, y = 0, z = 0$ 所围区域, 密度 $\mu = x$.
9. 求下列平面物体对相应直线或点的转动惯量:
- (1) D 为正方形区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 密度 $\mu(x, y) = x + y$, 求 I_x ;
- (2) D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$ 在第一象限的部分, 密度 $\mu(x, y) = 1$, 求 D 对坐标原点的转动惯量 I_0 及 D 对直线 $y = -1$ 的转动惯量;
- (3) D 为旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴所围区域, 密度 $\mu(x, y) = 1$, 求 I_x ;
- (4) D 为心脏线 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ 所围区域, 密度 $\mu(x, y) = 1$, 求 I_y .
10. 设 Ω 为均匀球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, 分别求其对三个坐标轴的转动惯量.
11. 设 Ω 为圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 1$ 介于平面 $z = 0, z = 1$ 之间的部分, 密度分布均匀, 求 Ω 对 x 轴及 z 轴的转动惯量.

6.5 广义重积分简介

与广义积分类似, 广义重积分也分两类, 一类是积分区域无界的广义重积分, 一类是被积函数无界的广义重积分. 本节我们简单介绍广义二重积分. 对于广义三重积分有类似的定义及结论, 在此不赘述.

定义 6.5.1 (无界区域上的广义二重积分) 设 D 为平面上的无界区域, D' 是 D 中任意的有界闭区域, 函数 $f(x, y)$ 在区域 D' 上常义可积, $D' \rightarrow D$ 表示按任意方式扩大 D' , 使得区域 D 中任一点总包含在足够大的 D' 中. 若 $D' \rightarrow D$ 时,

$$\iint_{D'} f(x, y) dx dy$$

极限存在, 则称无界区域 D 上的广义二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 收敛, 记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{D' \rightarrow D} \iint_{D'} f(x, y) dx dy,$$

否则称其为发散.

定义 6.5.2 (无界函数的广义二重积分) 设 D 为平面上的有界闭区域, C 是 D 中的光滑曲线 (C 可退化为一), 函数 $f(x, y)$ 在 C 上任意一点的邻域内无界. D' 是 $D \setminus C$ 中任意的有界闭区域, 函数 $f(x, y)$ 在区域 D' 上常义可积, $D' \rightarrow D$ 表示按任意方式扩大 D' , 使得 $D \setminus C$ 中任一点总包含在足够大的 D' 中. 若 $D' \rightarrow D$ 时,

$$\iint_{D'} f(x, y) dx dy$$

极限存在, 则称无界函数的广义二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 收敛, 记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{D' \rightarrow D} \iint_{D'} f(x, y) dx dy,$$

否则称其为发散.

对于非负被积函数的广义二重积分, 有下面常用的结论 (略去证明):

定理 6.5.1 设函数 $f(x, y)$ 在 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上非负, 对于两类广义二重积分, 若按某一确定的方式取 D_1 , 使得 $D_1 \rightarrow D$ 时

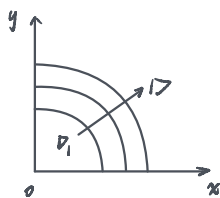
$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy$$

以 A 为极限, 则广义二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 收敛于 A .

例 6.5.1 计算 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$.

解 取 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则由定理 6.5.1 可知

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{D_1 \rightarrow D} \iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



□

例 6.5.2 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

解 在上面的例子中, 重新取 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq A, 0 \leq y \leq A\}$,

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{D_1 \rightarrow D} \iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x^2} dx \cdot \int_0^A e^{-y^2} dy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

应用上题的结论即得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

这个积分在“概率统计”学科中经常用到, 被称为“概率积分”.

习题 6.5

1. 计算 $\iint_D e^{-(x+y)} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$.

2. 计算 $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \geq 1$.

3. 计算 $\iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$.