第 7 章　曲线积分 · 曲面积分与场论

前面我们将积分的概念推广到二重积分和三重积分, 即积分范围为平面区域和空间区域, 这一章我们将讨论积分范围为曲线弧或一片曲面的情况, 分别称为曲线积分和曲面积分.

7.1　第一类曲线积分

7.1.1　第一类曲线积分的概念与性质

物质曲线的质量: 如果一条物质曲线的线密度是一个常值, 那么这条物质曲线的质量就等于它的线密度与长度的乘积. 现设有一条密度不均匀的物质曲线 C, 以 A, B 为其端点, 并设 C 上任一点 $M(x,y)$ 处的线密度为 $\rho(x,y)$. 为了求得 C 的质量, 我们用 C 上的点 $A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$ 将 C 分为 n 个小段 (见图 7.1). 当 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 很短时, 这一段上每点的密度都与其中一固定点 (ξ_i, η_i) 的密度相差很小, 因而, 我们可以求得这一小段质量 Δm_i 的近似值

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i,$$

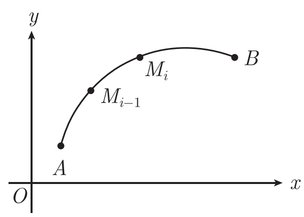


图 7.1

其中 Δs_i 表示 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的长度. 于是整个物质曲线质量的近似值

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

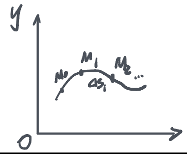
令 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta s_i\}$, 如果极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

存在, 则我们称此极限值就是物质曲线 C 的质量 m, 即

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

在许多其他问题中, 都会遇到这种形式的和的极限, 因而将其总结为下面的定义.



定义 7.1.1 (第一类曲线积分) 设 C 为 xOy 平面上的一条光滑曲线段, 函数 $f(x,y)$ 在 C 上有定义, 在 C 上任意插入一点列 $M_0, M_1, \cdots, M_n$, 将 C 分为 n 小段, 第 i 段的长度记为 $\Delta s_i (i=1,2,\cdots,n)$. 在第 i 段上任取一点 (ξ_i,η_i). 令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$, 如果对于曲线的任意分割及点 (ξ_i,η_i) 的任意取法, 下面的极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

都存在且唯一, 则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在曲线段 C 上的**第一类曲线积分**, 也称为**对弧长的曲线积分**, 记为 $\displaystyle\int_C f(x,y)\mathrm{d}s$, 即

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

其中 $f(x,y)$ 称为**被积函数**, C 称为**积分曲线**, $\mathrm{d}s$ 称为**弧微分**.

类似地, 我们可以定义函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 C 上的第一类曲线积分

$$\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

如果 C 是逐段光滑曲线, 即 C 是由有限条光滑曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 连接而成, 则我们规定

$$\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{C_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y,z)\mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

由第一类曲线积分的定义可知, 它有以下性质.

定理 7.1.1 (第一类曲线积分的性质) 设函数 $f(x,y), g(x,y)$ 在逐段光滑曲线 C 上第一类曲线积分存在, 则有

(1) 设 k 为常数, 则

$$\int_C kf(x,y)\mathrm{d}s = k\int_C f(x,y)\mathrm{d}s.$$

(2) $\displaystyle\int_C (f(x,y)\pm g(x,y))\,\mathrm{d}s = \int_C f(x,y)\mathrm{d}s \pm \int_C g(x,y)\mathrm{d}s.$

(3) 若 $C = C_1 + C_2$, 即 C 由两条逐段光滑曲线 C_1, C_2 连接而成, 则

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{C_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

(4) 设在 C 上有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$, 则

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_C g(x,y)\mathrm{d}s,$$

特别地

$$\left|\int_C f(x,y)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_C |f(x,y)|\,\mathrm{d}s.$$

(5) 设 A, B 为曲线 C 的两个端点, 则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\mathrm{d}s,$$

即第一类曲线积分的值不依赖于积分曲线的走向.

(6) $\displaystyle\int_C \mathrm{d}s = C$ 的弧长.

7.1.2　第一类曲线积分的计算

我们将第一类曲线积分化为我们熟悉的定积分来计算.

定理 7.1.2　设 $f(x,y)$ 为定义在曲线段 C 上的连续函数, C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

找参数方程
保证一一对应
代入公式求解

导数不全为0 → 保证一一对应

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的一阶导数, 且 $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$, 则第一类曲线积分 $\displaystyle\int_C f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在, 且

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

证明　曲线 $C = \overset{\frown}{AB}$ 的一个分割

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}, M_n = B,$$

对应于对参数区间 $[a,b]$ 的一个分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

其中 M_i 为点 $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$, 根据第一类曲线积分的定义, 有

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

设点 (ξ_i, η_i) 对应的参数值为 τ_i, 即

$$\xi_i = \varphi(\tau_i), \quad \eta_i = \psi(\tau_i) \qquad (t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i),$$

由于

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

应用积分中值定理, 有

$$\Delta s_i = \sqrt{[\varphi'(\tau_i')]^2 + [\psi'(\tau_i')]^2}\Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $t_{i-1} \leqslant \tau_i' \leqslant t_i$. 记 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$, 于是

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\sqrt{[\varphi'(\tau_i')]^2 + [\psi'(\tau_i')]^2}\Delta t_i.$$

由于函数 $\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 我们可以将上式中的 τ_i' 换成 τ_i(证明从略), 从而由定积分的定义及

$$f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

在 $[a,b]$ 上的连续性知

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y)\mathrm{d}s &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\Delta t_i \\ &= \int_a^b f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t \quad (a<b).\end{aligned}$$

因此, $\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t.$ □

注 定积分的下限 a 一定要小于上限 b. 这是因为 $\Delta s_i>0$, 从而 $\Delta t_i>0$, 所以 $a<b$.

如果曲线 C 的方程为

$$y=\psi(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

那么有

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+[\psi'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

如果曲线 C 的方程为

$$x=\varphi(y) \qquad (c\leqslant y\leqslant d),$$

则有

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{[\varphi'(y)]^2+1}\mathrm{d}y.$$

类似地, 我们可以得到空间曲线第一类曲线积分的计算公式. 设空间曲线 C 的方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b),$$

则有

$$\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_a^b f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\mathrm{d}t \quad (a<b).$$

例 7.1.1 计算曲线积分 $\int_C x\,\mathrm{d}s$, 其中 C 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $A(1,1)$ 之间的一段弧.

解 曲线 C 由方程 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$ 给出, 因此

$$\begin{aligned}\int_C x\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).\end{aligned}$$ □

例 7.1.2　计算曲线积分

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s,$$

其中 C 是螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi, k\in\mathbb{R})$.

解

$$\begin{aligned}\int_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+k^2}(a^2t+\frac{1}{3}k^2t^3)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4k^2\pi^2).\end{aligned}$$

□

例 7.1.3　计算曲线积分 $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ay(a>0)$.

减少变量: $\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta. \end{cases}$

解　C 的参数方程为

$$x=a\sin\theta\cos\theta,\quad y=a\sin^2\theta\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

$\rho^2(\theta)=a\rho(\theta)\sin\theta.$

$\Rightarrow \rho(\theta)=a\sin\theta$

$$\begin{aligned}\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta}\sqrt{a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2+4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi}a\sin\theta\sqrt{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 2a^2.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x=a\sin\theta\cos\theta \\ y=a\sin^2\theta \end{cases}$

□

例 7.1.4　求空间曲线 $x=3t, y=3t^2, z=2t^3$ 从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(3,3,2)$ 的弧长.

解　所求弧长

$$\begin{aligned}s &= \int_{\overset{\frown}{OA}}\mathrm{d}s = \int_0^1\sqrt{3^2+(6t)^2+(6t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &= 3\int_0^1(1+2t^2)\mathrm{d}t = 3(t+\frac{2}{3}t^3)\Big|_0^1 = 5.\end{aligned}$$

□

习题 7.1

1. 计算下列第一类曲线积分:

(1) $\int_C (x+y)\mathrm{d}s$, 其中 C 是顶点为 $O(0,0), A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 的三角形的边界;

(2) ✓ $\int_C (x^2+y^2)^n\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi), a>0, n\in\mathbb{N}$;

(3) $\int_C y^2\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(4) ✓ $\oint_C x\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围区域的边界;

(5) $\oint_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 是圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 与直线 $y=x, y=0$ 所围成的位于第一象限的区域的边界;

(6) $\int_C y\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为 $y=2x$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(1,2)$ 的线段;

(7) $\int_C xy\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 位于第一象限的一段弧;

(8) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax(a>0)$;

(9) $\oint_C y\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=2x$;

(10) $\int_C \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ 的一段弧;

(11) $\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}s$, 其中 C 是曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(12) $\int_C \dfrac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中 C 的参数方程为 $x=3\cos t, y=3\sin t, z=3t, (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(13) $\int_C \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为曲线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a>0$, $b>0)$;

(14) $\oint_C (x^2+2y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 与平面 $z=x$ 的交线;

(15) $\int_C x^2yz\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为折线 $ABDE$, 这里 A,B,D,E 点分别为 $A(0,0,0), B(0,0,2)$, $D(1,0,2)$, $E(1,3,2)$;

(16) $\int_C x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.

2. 若曲线在点 (x,y) 处的线密度为 $\rho=|y|$, 求曲线 $x=a\cos t, y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a\geqslant b>0)$ 的质量.

3. 求均匀摆线段 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant \pi)$ 的质心 $(a>0)$.

4. 设螺旋线一段的方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 它的线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 求

(1) 它关于 z 轴的转动惯量; (2) 它的质心.

7.2 第二类曲线积分

7.2.1 第二类曲线积分的概念与性质

变力沿曲线所做的功: 设有一条 xOy 平面上的光滑曲线 C, 并且给定了 C 的方向, 其起点为 A, 终点为 B, 设有一个质点在外力

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

的作用下, 从 A 点沿曲线 C 移动到 B 点, 求此时力 $\boldsymbol{F}$ 做的功 W.

我们用分点 $A=M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n=B$ 将曲线 C 分成 n 个小弧段 (见图 7.2), 设

第 i 小段的弧长为 Δs_i. 当 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 很短时, $\boldsymbol{F}$ 在 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的变化不大, 可近似地看作常力 $\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)$, 其中 (ξ_i,η_i) 为弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上的任意一点, 同时可将质点运动的路径 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 近似地看作直线段 $M_{i-1}M_i$. 于是, 力 $\boldsymbol{F}$ 在这段弧上所做的功为

$$\Delta W_i \approx \boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}.$$

而

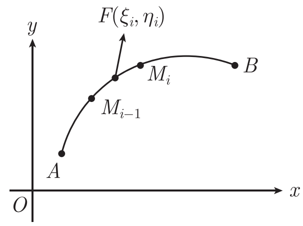


图 7.2

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i) &= P(\xi_i,\eta_i)\boldsymbol{i}+Q(\xi_i,\eta_i)\boldsymbol{j},\\ \overrightarrow{M_{i-1}M_i} &= \Delta x_i\boldsymbol{i}+\Delta y_i\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, 于是

$$\Delta W_i \approx P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

因此, 力 $\boldsymbol{F}$ 沿 C 所做的功为

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i \approx \sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right].$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$, 如果当 $\lambda\to 0$ 时, 上述和式的极限存在, 则这个极限被称为变力 $\boldsymbol{F}$ 沿曲线段 C 所做的功, 即

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right].$$

这种和式的极限, 在研究其他问题时也会遇到. 对这类问题, 我们归结为下面的定义.

定义 7.2.1 (第二类曲线积分)　设 C 是 xOy 平面上从点 A 到点 B 的一条有向光滑曲线段, 向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 在 C 上有定义, 沿 C 的方向用分点

$$A=M_0(x_0,y_0),M_1(x_1,y_1),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}),M_n(x_n,y_n)=B,$$

将 C 分为 n 个有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}(i=1,2,\cdots,n)$, $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长记为 $\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$. 设 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. 在 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i). 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right]$$

存在唯一 (不依赖于对曲线的分割及 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上点 (ξ_i,η_i) 的选取), 则称此极限为向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 沿曲线 C 从 A 点到 B 点的**第二类曲线积分**. 记为

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad \int_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$, 有向曲线 $C=\overset{\frown}{AB}$ 称为**积分路径**. 第二类曲线积分也称为**对坐标的曲线积分**.

特别地,

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

称为函数 $P(x,y)$ 沿有向曲线 C 对坐标 x 的曲线积分,

$$\int_C Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

称为函数 $Q(x,y)$ 沿有向曲线 C 对坐标 y 的曲线积分. 如果曲线 C 为闭曲线, 则记第二类曲线积分为

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad \oint_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

由定义可知, 变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 沿曲线 C 所做的功可表示为

$$W = \int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

类似地可以定义空间向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

沿空间有向曲线 C 的第二类曲线积分

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

或

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

其中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}.$$

今后, 我们用 $\boldsymbol{F}(M)$ 表示平面或空间中点 M 的向量值函数, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示平面向量 $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 或空间向量 $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$. 由定义不难推出第二类曲线积分的如下性质.

定理 7.2.1 (第二类曲线积分的性质) 若 $\boldsymbol{F}(M),\boldsymbol{G}(M)$ 在有向曲线 C 上第二类曲线积分存在, 则有

(1) $\boldsymbol{F}(M)\pm\boldsymbol{G}(M)$ 在 C 上第二类曲线积分也存在, 并且

$$\int_C [\boldsymbol{F}(M)\pm\boldsymbol{G}(M)]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \pm \int_C \boldsymbol{G}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

(2) $k\boldsymbol{F}(M)$ 在 C 上第二类曲线积分也存在, 并且

$$\int_C k\boldsymbol{F}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = k\int_C \boldsymbol{F}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

(3) 若有向曲线 C 可以分成两段逐段光滑的有向曲线 C_1 与 C_2, 则 只有一个交点

$$\int_C \boldsymbol{F}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

(4) 设 C 是一条有向光滑曲线, C^- 是 C 的反向曲线, 则

$$\int_{C^-} \boldsymbol{F}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{F}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

性质 (4) 表明, 当积分曲线的方向改变时, 第二类曲线积分要改变符号. 这是第一类曲线积分与第二类曲线积分的重要区别.

7.2.2　第二类曲线积分的计算

与第一类曲线积分的计算类似, 第二类曲线积分也可以化为定积分来计算. 我们首先讨论平面曲线的情况.

定理 7.2.2　设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向曲线 C 上有定义且连续, C 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

当 t 单调地由 α 变到 β 时, 点 $M(x,y)$ 从 C 的起点 A 沿 C 运动到终点 B, $\varphi(t),\psi(t)$ 在以 α,β 为端点的闭区间上具有一阶连续的导数, 且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$. 则第二类曲线积分

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

存在, 且

代入求微分

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t.$$

证明　在 C 上取一点列

$$A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_{n-1},M_n=B,$$

它们对应于一列单调变化的参数值

$$\alpha=t_0,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},t_n=\beta.$$

由拉格朗日 (Lagrange) 中值定理, 有

$$\Delta x_i=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

其中 τ_i 位于 t_{i-1} 与 t_i 之间, 根据第二类曲线积分的定义, 取 $\xi_i=\varphi(\tau_i),\eta_i=\psi(\tau_i)$ 有

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

由 $P(x,y)$ 在 C 上的连续性及 $\varphi(t),\psi(t),\varphi'(t)$ 的连续性知 $P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)$ 在以 α,β 为端点的闭区间上连续, 从而可积, 令 $\mu=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\Delta t_i|\}$, 不难看出, 当 $\lambda\to 0$ 时, $\mu\to 0$. 因此

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^n P(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

同理可证

$$\int_C Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t.$$

将上面两式相加即得

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t.$$

特别要注意, 下限 α 对应于有向曲线 C 的起点, 上限 β 对应于有向曲线 C 的终点. □

这个定理表明, 计算第二类曲线积分

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

只要将 $x,y,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 分别换为 $\varphi(t),\psi(t),\varphi'(t)\mathrm{d}t,\psi'(t)\mathrm{d}t$, 就化为了从 α 到 β 的定积分.

如果 C 由方程 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 给出, 可以看作参数方程的特殊情形. 例如, 当 C 由 $y=\varphi(x)$ 给出时, 则有

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b[P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)]\mathrm{d}x,$$

其中下限 a 对应 C 的起点, 上限 b 对应于 C 的终点.

空间曲线上第二类曲线积分的计算, 完全类似于平面曲线. 我们给出计算公式而略去其证明. 设空间曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t), \end{cases} \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta \quad \text{或} \quad \beta\leqslant t\leqslant\alpha),$$

其中参数 α 对应曲线的起点, 参数 β 对应曲线的终点,$\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 有连续的一阶导数, 且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2\neq 0$. 若 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 C 上连续, 则

$$\begin{aligned}&\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\ =&\int_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\psi'(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\omega'(t)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中参数 α 对应 C 的起点, 参数 β 对应 C 的终点.

例 7.2.1 计算曲线积分 $\int_C xy\mathrm{d}x$, 其中 C 是抛物线 $y^2=x$ 上点 $A(1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 之间的一段弧 (见图 7.3).

解　方法 1: 将 y 作为参数

$$\int_C xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} y^2\cdot y\cdot (y^2)'\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1} y^4\mathrm{d}y=\frac{2}{5}y^5\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}.$$

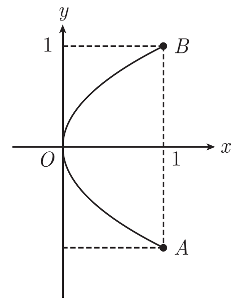
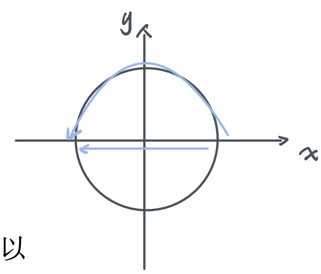


图 7.3

方法 2: 将 x 作为参数. 由于 $y=\pm\sqrt{x}$ 不是单值函数, 所以将 C 分为 $\widehat{AO},\widehat{OB}$ 两部分. 在 $\widehat{AO}$ 上, $y=-\sqrt{x}$, x 从 1 变到 0, 在 $\widehat{OB}$ 上, $y=\sqrt{x}$, x 从 0 变到 1. 因此,

$$\begin{aligned}\int_C xy\mathrm{d}x&=\int_{\widehat{AO}} xy\mathrm{d}x+\int_{\widehat{OB}} xy\mathrm{d}x\\&=\int_1^0 x(-\sqrt{x})\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

□



例 7.2.2　计算曲线积分 $\int_C y^2\mathrm{d}x$, 其中 C 为

(1) 按逆时针方向绕行的上半圆周 $x^2+y^2=a^2, y\geqslant 0$;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

解　(1) C 的参数方程为 $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta$, θ 从 0 变到 π, 所以

$$\begin{aligned}\int_C y^2\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi} a^2\sin^2\theta(-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)=a^3(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^{\pi}\\&=-\frac{4}{3}a^3.\end{aligned}$$

(2) C 的参数方程为 $y=0, x$ 从 a 变到 $-a$, 所以

$$\int_C y^2\mathrm{d}x=\int_a^{-a} 0\mathrm{d}x=0.$$

□

从上面的例子看出, 虽然两个曲线积分的被积函数相同, 积分路径的起点和终点也相同, 但沿不同路径得出的积分值并不相等.

例 7.2.3　计算曲线积分 $\oint_{\widehat{OmAnO}} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$, 其中 $\widehat{OmA}$ 为抛物线段 $y=x^2, AnO$ 为直线段 $y=x$ (见图 7.4).

解

$$\begin{aligned}&\oint_{\widehat{OmAnO}} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x\\=&\int_{\widehat{OmA}} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x+\int_{AnO} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x\end{aligned}$$

代入 $y=x^2$　　代入 $y=x$

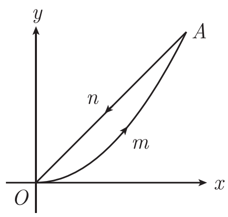


图 7.4

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (2x\arctan x - 1)\mathrm{d}x + \int_1^0 (\arctan 1 - 1)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 2x\ \arctan\ x\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\pi}{4}\mathrm{d}x \\
&= x^2\ \arctan\ x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{4} = (\arctan\ x - x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1. \qquad \square
\end{aligned}
$$

例 7.2.4 计算曲线积分 $\int_C y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$, 其中 C 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2=ax \qquad (z\geqslant 0, a>0),$$

从 z 轴正向看去取逆时针方向 (见图 7.5).

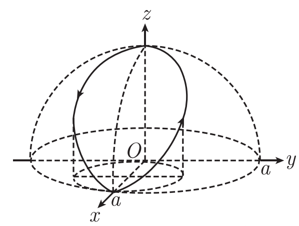
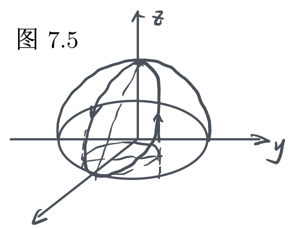


图 7.5



解 柱面 $x^2+y^2=ax$ 的方程可变为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$. 故令

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t, \quad y=\frac{a}{2}\sin t \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

则 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2(1+\cos t)^2}{4}-\frac{a^2\sin^2 t}{4}}=a\sin\frac{t}{2}$. 从而曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+\cos t)}{2}, y=\frac{a\sin t}{2}, z=a\sin\frac{t}{2}(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z \\
=& \int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3\sin^3 t}{8}+\frac{a^3\sin^2(t/2)\cos t}{2}+\frac{a^3(1+\cos t)^2\cos(t/2)}{8}\right)\mathrm{d}t \\
=& \frac{a^3}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)\mathrm{d}(\cos t)+\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos t}{2}\cos t\mathrm{d}t \\
&+a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\mathrm{d}\left(\sin\frac{t}{2}\right) \\
=& \left[\frac{a^3}{8}\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)+\frac{a^3}{4}\left(\sin t-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\right. \\
&\left.+a^3\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{2}{3}\sin^3\frac{t}{2}+\frac{1}{5}\sin^5\frac{t}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi} \\
=& -\frac{\pi a^3}{4}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

例 7.2.5　计算曲线积分

$$\int_C (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中 C 为 $y=1-|1-x|$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$ 上的一段 (见图 7.6).

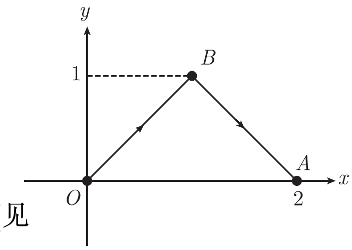


图 7.6

解　点 $B(1,1)$ 将曲线分为两个有向直线段 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{OB}$ 的方程为

$$y=x \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

$\overrightarrow{BA}$ 的方程为

$$y=2-x \qquad (1\leqslant x\leqslant 2),$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_C (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y\\=&\int_{\overrightarrow{OB}}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BA}}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y\\=&\int_0^1 2x\mathrm{d}x+\int_1^2[2-(2x-2)]\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1+(4x-x^2)\Big|_1^2\\=&1+4-3=2.\end{aligned}$$

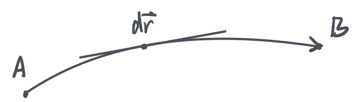
□

7.2.3　两类曲线积分之间的联系

虽然两类曲线积分的定义不同, 但在一定条件下可以互相转化, 我们先讨论平面曲线.

设有向曲线 C 的起点为 A, 终点为 B, 曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\end{cases}$$



起点 A, 终点 B 分别对应于参数 t_1,t_2, 不妨设 $t_1<t_2$. $(\varphi'(t),\psi'(t))$ 是曲线的切向量, 因而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=(\varphi'(t),\psi'(t))\mathrm{d}t$$

也是 C 的切向量且其方向与积分路径的方向一致, 又 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的模正好是弧微分

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\mathrm{d}s,$$

设 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta$, 则有

$$(\cos\alpha,\cos\beta)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right),$$

所以

$$dx = \cos\alpha\, ds, \qquad dy = \cos\beta\, ds,$$

因此

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_C (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta)ds.}$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta)$ 为曲线 C 上点 (x,y) 处的单位切向量 (且其方向与积分曲线方向一致). 类似地, 空间曲线 C 上的两类曲线积分之间有如下的联系

$$\int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds,$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为曲线 C 上点 (x,y,z) 处的单位切向量 (且其方向与积分曲线方向一致).

习题 7.2

1. 计算下列第二类曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 C 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧;

(2) $\displaystyle\int_C (x^2 - y^2)dx$, 其中 C 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧;

(3) $\displaystyle\oint_C xydx$, 其中 C 为圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 与 x 轴所围成的第一象限内的区域的边界 (按逆时针方向绕行);

(4) $\displaystyle\oint_C (x+y)dx + (x-y)dy$, 其中 C 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$(按逆时针方向绕行) $(a > 0, b > 0)$;

(5) $\displaystyle\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$(按逆时针方向绕行);

(6) $\displaystyle\oint_C y^2dx + x^2dy$, 其中 C 为 $y = x^2$ 与 $y = x$ 所围区域的边界, 取逆时针方向;

(7) $\displaystyle\oint_C xdx + zdy + ydz$, 其中 C 由 C_1, C_2, C_3 连接而成 (按参数增加的方向)

$C_1: x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

$C_2: x = 0,\ y = 1,\ z = \dfrac{\pi}{2}(1-t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$,

$C_3: x = t,\ y = 1-t,\ z = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$;

(8) $\displaystyle\int_C xdx + ydy + (x+y-1)dz$, 其中 C 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的直线段;

(9) $\displaystyle\oint_C dx - dy + ydz$, 其中 C 为有向闭折线 $ABDA$, 这里 A, B, D 分别为点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;

(10) $\int_C (x^4-z^2)\mathrm{d}x+2xy^2\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$, 其中 C 为依参数增加方向的曲线: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3(0\leqslant t\leqslant 1)$;

(11) $\oint_C \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, 其中 C 是以 $A(1,0),B(0,1),D(-1,0),E(0,-1)$ 为顶点的正向正方形闭路 $ABDEA$;

(12) $\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中 C 为 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 z 轴正向看去为顺时针方向;

(13) $\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, 其中 C 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2az, \\ x+z=a \end{cases}$ $(z\geqslant 0, a>0)$, 从 z 轴正向看去为逆时针方向;

(14) $\int_C y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+zx\mathrm{d}z$, 其中 C 为从 $O(0,0,0)$ 出发，经过 $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$ 到 $D(1,1,1)$ 的折线段.

2. 求 $\int_L 2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$ 的值, 其中 $O(0,0),A(1,1),L$ 为

(1) 从点 O 到点 A 的直线段;

(2) 沿 $y=x^2$ 从点 O 到点 A 的抛物线段;

(3) 折线 OBA, 其中 B 为点 $(1,0)$;

(4) 折线 OCA, 其中 C 为点 $(0,1)$;

(5) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x(y>0)$ 从点 O 到点 A.

3. 设力 $\boldsymbol{F}=(y-x^2,z-y^2,x-z^2)$, 今有一质点沿曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, 被力 $\boldsymbol{F}$ 从点 $A(0,0,0)$ 移动至 $B(1,1,1)$. 求 $\boldsymbol{F}$ 所做的功.

7.3　格林公式及其应用

本节我们将讨论, 当 $P(x,y),Q(x,y)$ 满足什么条件时, 曲线积分

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

与积分路径无关而只依赖于起点 A 和终点 B.

7.3.1　格林 (Green) 公式

设曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

简称单闭曲线

如果 φ,ψ 连续, 且对不同的参数 $t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$(不妨设 $t_1<t_2$), $(\varphi(t_1),\psi(t_1))=(\varphi(t_2),\psi(t_2))$ 当且仅当 $t_1=\alpha,t_2=\beta$, 则称 C 为**简单闭曲线**. 从几何上看, 一条简单闭曲线是起点和终点重合, 而在其他处不相重的曲线, 见图 7.7(a). 而图 7.7 中的 (b)(c) 两图则不是简单闭曲线.

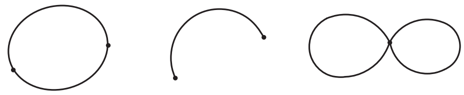


图 7.7

下面我们介绍平面单连通区域的概念. 设 D 为一平面区域, 如果 D 内的任一条简单闭曲线所围的部分都属于 D, 则称 D 为**单连通区域**, 否则称为**多连通区域**.

例如, 上半平面 $H=\{(x,y)|\,y>0\}$(见图 7.8) 及单位圆盘 $\Delta=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$(见图 7.9) 都是单连通区域. 而圆环 $R=\{(x,y)|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$(见图 7.10) 为多连通区域.

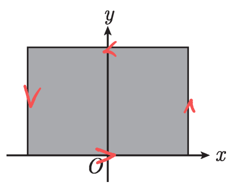


图 7.8

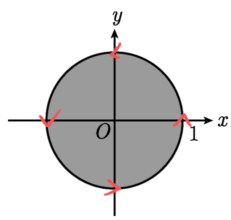


图 7.9

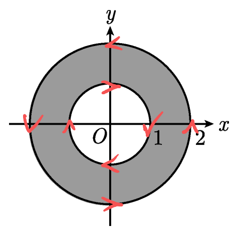


图 7.10

对于平面区域 D 的边界曲线 C, 我们规定 C 的正向如下: 当观察者沿 C 的这个方向行走时, 区域 D 总在他的左手边. 例如, 圆环 $R=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 的边界是圆周 $L:x^2+y^2=2$ 及 $l:x^2+y^2=1$. 作为 R 的正向边界, L 的正向是逆时针方向, 而 l 的正向是顺时针方向 (见图 7.11).

定理 7.3.1 (格林 (Green*) 公式) 设有界闭区域 D 由逐段光滑曲线 C 围成, 函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.3.1}$$

其中 C 的方向按 D 的正向边界曲线所取. C是单闭曲线

证明 先证

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.3.2}$$

根据区域 D 的情况, 我们分三种情况进行讨论.

(1) 区域 D 由曲线

$$y=\varphi_1(x),\qquad y=\varphi_2(x),$$

(当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$) 及直线 $x=a,x=b$ 所围成 (见图 7.12), 即

$$D=\{(x,y)|\,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}.$$

* 格林 (Green G, 1793~1841), 英国数学家.

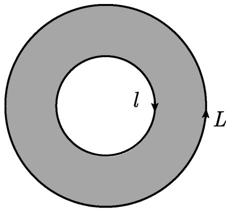


图 7.11

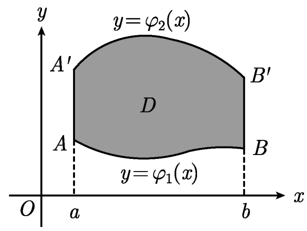


图 7.12

根据曲线积分的计算公式, 有

dx = db = 0

$$\begin{aligned}
\oint_C P\,\mathrm{d}x &= \int_{\overset{\frown}{AB}} P\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{BB'}} P\,\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{B'A'}} P\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{A'A}} P\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b P(x,\varphi_1(x))\mathrm{d}x + 0 + \int_b^a P(x,\varphi_2(x))\mathrm{d}x + 0 \\
&= -\int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

另一方面, 根据二重积分的计算法, 有　　$\int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy = P(x,y) + C(x)$

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y = \int_a^b [\,P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]\mathrm{d}x.$$

比较上面的两个式子, 即得

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) D 是单连通区域, 但 D 的边界曲线与某些平行于 y 轴的直线之交点多于两点 (见图 7.13). 这时, 可引进一些辅助线将区域 D 分成几个子闭区域, 使得在每个子闭区域上满足上述条件. 在每个子闭区域上利用已证得的公式 (7.3.2), 然后将所得的结果相加, 注意到在引进的辅助线上, 使用公式 (7.3.2) 时, 两曲线积分的方向正好相反, 因而在这些辅助线上的曲线积分正好抵消, 这就推出公式 (7.3.2) 对整个区域依然成立.

例如, 图 7.13 所示的闭区域 D, 它的边界曲线 C 为 $\widehat{MNPM}$, 引进一条辅助线 ABE, 将 D 分为 D_1, D_2, D_3 三部分, 将公式 (7.3.2) 应用于每个部分并相加得

$$\begin{aligned}
-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\sum_{i=1}^{3}\iint\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \oint_{\overset{\frown}{AMBA}} P\,\mathrm{d}x + \oint_{\overset{\frown}{BNEB}} P\,\mathrm{d}x + \oint_{\overset{\frown}{EPAE}} P\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\overset{\frown}{AMB}} P\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{BA}} P\,\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{BNE}} P\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{EB}} P\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\overset{\frown}{EPA}} P\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{AE}} P\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_{\overset{\frown}{AMB}} + \int_{\overset{\frown}{BNE}} + \int_{\overset{\frown}{EPA}}\right) P\,\mathrm{d}x = \oint_C P\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(3) D 是多连通闭区域, 这时仍然可以通过引进辅助线, 将 D 分为满足前面条件的子闭区域, 对每个子闭区域应用已证明的公式 (7.3.2), 然后相加, 即得对于整个闭区域 D, 公式 (7.3.2) 成立. 例如图 7.14 所示, 引进两条辅助线, 将 D 分为 D_1, D_2, D_3, D_4 则有

$$-\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sum_{i=1}^{4}\iint\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C P\,\mathrm{d}x.$$

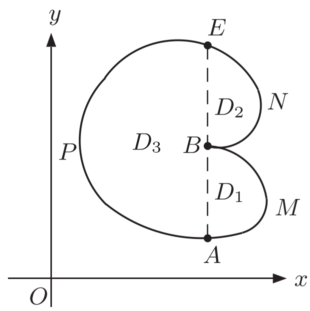


图 7.13

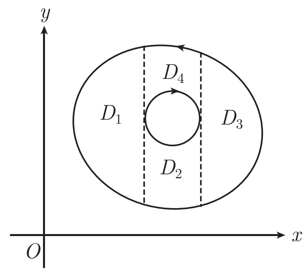


图 7.14

通过先考虑下面形式的闭区域

$$D = \{(x,y)|\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), c \leqslant y \leqslant d\}.$$

完全类似地, 可以证明

$$\oint_C Q\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.3.3}$$

将式 (7.3.2) 与式 (7.3.3) 两式相加即得

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$ □

下面我们说明格林公式的一个简单应用. 在公式 (7.3.1) 中取 $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$, 即得

$$\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 2\iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设闭区域 D 的面积为 A, 则有

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x. \tag{7.3.4}$$

例 7.3.1　求椭圆 $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 所围图形的面积.

解　由公式 (7.3.4) 有

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}ab \cdot 2\pi = ab\pi. \end{aligned}$$ □

例 7.3.2　计算 $\oint_C y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y$. 其中 C 是正方形 $ABMN$ 的边界取逆时针方向, 其中 $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $M=(-1,0)$, $N=(0,-1)$(见图 7.15).

解　$P=y, Q=2x$, 由格林公式得

$$\begin{aligned}\oint_C y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y &= \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_G (2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \text{区域}G\text{的面积}\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.\end{aligned}$$

□

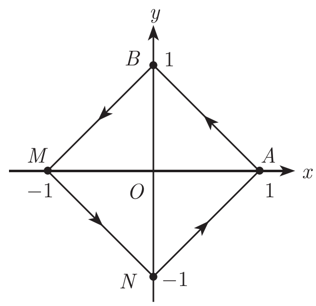


图 7.15

例 7.3.3　求曲线积分

$$\oint_C \frac{-(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中 C 是不通过坐标原点的简单闭曲线, 取逆时针方向.

解

$$P(x,y) = \frac{-(x+y)}{x^2+y^2}, \qquad Q(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2},$$

$P(x,y), Q(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 无定义, 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

分两种情况讨论:

(1) C 所围的区域 D 不包含坐标原点, 则由格林公式有

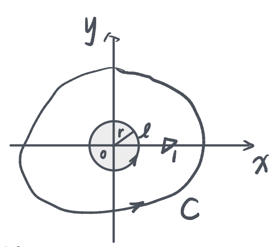
$$\begin{aligned}\oint_C \frac{-(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

挖掉区域为圆：分母有圆的形式

(2) C 所围的区域 D 包含坐标原点, 选取 $r>0$ 充分小, 使得圆周 $l: x^2+y^2=r^2$ 完全位于区域 D 内, 且 l 取逆时针方向. 记 C 与 l 所围成的区域为 D_1, 对 D_1 应用格林公式有

$$\int_{C+l^-} \frac{-(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \iint_{D_1} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Q



因此

$$\begin{aligned}\int_C \frac{-(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \int_l \frac{-(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-(r\cos\theta + r\sin\theta)(-r\sin\theta) + (r\cos\theta - r\sin\theta)(r\cos\theta)}{r^2}\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi.\end{aligned}$$

□

7.3.2　平面上第二类曲线积分与路径无关的条件

设 C 为平面上起点为 A, 终点为 B 的逐段光滑曲线, 现在我们讨论, 当函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 满足什么条件时, 第二类曲线积分

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

的值与积分路径无关, 而只与起点 A, 终点 B 有关.

设 G 为平面上的一个区域, $P(x,y), Q(x,y)$ 在区域 G 内具有一阶连续偏导数. 如果对于 G 内的任意指定的两点 A, B, 以及 G 内从 A 点到 B 点的任意两条曲线 L_1, L_2 (见图 7.16) 恒有

$$\int_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

则称曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 G 内**与路径无关**. 否则, 就称**与路径有关**.

曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关等价于对于 G 内的任何简单闭曲线 L, 有

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0.$$

事实上, 如果曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 G 内与积分路径无关, 则对 G 内的闭曲线 L, 在 L 上取两点 A, B(见图 7.17), 则曲线 L 被分成 $\overset{\frown}{AmB}$ 与 $\overset{\frown}{AnB}$ 两段, 由假设有

$$\int_{\overset{\frown}{AmB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\overset{\frown}{AnB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

从而有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\overset{\frown}{AmB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - \int_{\overset{\frown}{AnB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\overset{\frown}{AmB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{\overset{\frown}{BnA}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

反过来, 可同样证明.

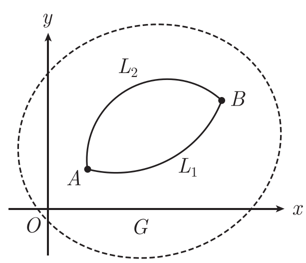


图 7.16

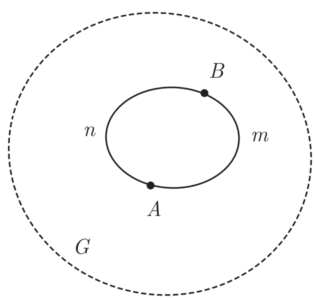


图 7.17

Theorem

设 $D \subseteq R^2$ 为单连通开域(有界或无界), 函数 $P, Q : D \to R$ 连续可微, 则下述四条等价:

(1) $\forall (x,y) \in D$ 有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

(2) 沿 D 内任意逐段光滑的简单闭曲线 Γ, 有 $\displaystyle\int_\Gamma P dx + Q dy = 0$.

(3) $A, B \in D$, 从 A 到 B 的曲线积分 $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ 与路径无关.

(4) 存在可微函数 $u(x,y)$, 使得 $du = P dx + Q dy$.

定理 7.3.2　设 D 是一单连通区域, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内有一阶连续偏导数, 则曲线积分 $\displaystyle\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 D 内恒成立.

证明　充分性. 因为 D 为单连通区域, 对于 D 内的任一简单闭曲线 C, 其所围之闭区域 $G \subset D$, 故由条件及格林公式有

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

因此, 曲线积分 $\displaystyle\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

必要性. 现在要证的是: 如果沿 D 内任意闭曲线的积分为零, 那么 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内恒成立. 采用反证法, 假设上述论断不成立, 那么在 D 内至少存在一点 $M_0(x_0, y_0)$ 使

$$\left.\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{M_0} \neq 0.$$

令 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = f(x,y)$

$\left.\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{M_0} = \eta$.

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \eta$.

令 $\varepsilon_0 = \frac{\eta}{2}$. 则存在 $\delta > 0$, 使得

当 $d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta$ 时, 有

$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \frac{\eta}{2}$.

$f(x,y) - \frac{\eta}{2} \leq f(x,y) \leq f(x_0,y_0) + \frac{\eta}{2}$

$= \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}$　　$= \eta + \frac{\eta}{2} = \frac{3}{2}\eta$.

不妨设

$$\left.\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{M_0} = \eta > 0,$$

由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内连续, 因而存在

$$\overline{N_r(M_0)} = \left\{(x,y) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant r^2\right\} \subset D,$$

使得在 $\overline{N_r(M_0)}$ 上有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geqslant \frac{\eta}{2}.$$

设 γ 为正向圆周 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, 于是由格林公式有

$$\begin{aligned}\oint_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y &= \iint_{N_r(M_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\geqslant \iint_{N_r(M_0)} \frac{\eta}{2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\eta}{2} \cdot \pi r^2 > 0.\end{aligned}$$

这与沿 D 内任意闭曲线的曲线积分为零的假设相矛盾. 因此, 在 D 内恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad \square$$

注 当曲线积分与路径无关时，常将从起点 A 到终点 B 的曲线积分记为

$$\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

在定理 7.3.2 中，要求区域 D 为单连通区域且函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数. 如果这两个条件之一不能满足, 那么定理的结论不能保证成立. 例如, 函数

$$P(x,y) = \frac{-(x+y)}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2},$$

在闭圆环 $D = \{(x,y)|\, 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$ 上有一阶连续的偏导数, 且 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内恒成立, 但对于绕坐标原点的简单闭曲线 C,

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 2\pi \neq 0.$$

恰当微分

定理 7.3.3 *设 D 是一单连通区域, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 D 内恰是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的充分必要条件是*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 D 内恒成立.

证明 必要性. 假设 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即

$\Rightarrow$

$$\mathrm{d}u = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y),$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由于 P, Q 具有一阶连续偏导数, 所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 连续, 因此 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, 即

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

充分性. 已知 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内恒成立, 由定理 7.3.2 知曲线积分

$\Leftarrow$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

与路径无关. 当起点 $A(x_0, y_0)$ 固定, 而终点 $B(x,y)$ 在 D 内移动, 则上述曲线积分就是终点 (x,y) 的函数. 用 $u(x,y)$ 来表示这个函数, 即 变上限积分

$$\boxed{u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.} \tag{7.3.5}$$

任取一点

下面我们证明

$$\mathrm{d}u = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

因为 $P(x,y),Q(x,y)$ 都是连续的, 因此只要证明

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

对于任意的定点 $B(x,y)$, 取 $|\Delta x|$ 充分小使得点 $B'(x+\Delta x,y)$ 及线段 BB' 都完全位于 D 内 (见图 7.18)

$$u(x+\Delta x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

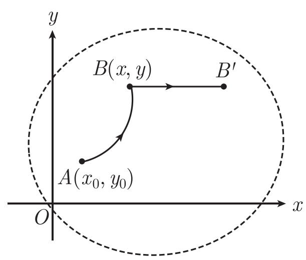


图 7.18

由于曲线积分与路径无关, 可以先从 A 到 B, 然后沿线段 BB' 从 B 到 B' 作为曲线积分的路径. 所以

$$u(x+\Delta x,y) = u(x,y) + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

从而

$$u(x+\Delta x,y) - u(x,y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

因为直线 BB' 的方程为 $y =$ 常数, 上式变为

$$u(x+\Delta x,y) - u(x,y) = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)\mathrm{d}x.$$

再由积分中值定理得

$$u(x+\Delta x,y) - u(x,y) = P(\xi,y)\Delta x,$$

其中 ξ 是 x 与 $x+\Delta x$ 之间的点. 因此由 $P(x,y)$ 的连续性, 可得　用定义完成

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(\xi,y) = P(x,y).$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$. 这样就证明了充分性. □

推论 7.3.4 设区域 D 是一个单连通区域, 函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数, 对于 D 内的任意两点 A,B, 曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关的充分必要条件是: $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 恰是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$(这时我们称 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 为恰当微分). 此时有

积分与路径无关时：找 u(x,y) → 转化为 u(B)−u(A)

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_A^B \mathrm{d}u=u(B)-u(A),} \tag{7.3.6}$$

其中 $u(A),u(B)$ 分别表示函数 $u(x,y)$ 在 A,B 点的函数值.

证明 推论的前半部分由定理 7.3.2 及定理 7.3.3 立即可推得. 下面我们证明公式 (7.3.6). 过 A,B 两点在 D 内作一曲线 $\widehat{AB}$, 设 $\widehat{AB}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

其中 α,β 分别对应于点 A 及点 B. 从而有

$$\begin{aligned}
&\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \\
=&\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t \\
=&\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}u(\varphi(t),\psi(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
=&u(\varphi(t),\psi(t))\Big|_\alpha^\beta=u(B)-u(A).
\end{aligned}$$

□

这个公式与牛顿-莱布尼兹公式十分相似, 因此, 我们将其称为**曲线积分的基本公式**. 而将满足条件

$$\mathrm{d}u=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

的函数 u 称为 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 的原函数. $u(x,y)$ 可用公式 (7.3.5) 来求出. 因为公式 (7.3.5) 中的曲线积分与路径无关, 为计算简便, 我们可以选取 D 内一些特殊的曲线. 例如, 联结 A,B 两点直线段 AB, 或由平行于坐标轴的直线段连成的折线 AMB 或 ANB(见图 7.19).

例 7.3.4 验证: $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $x>0$ 内是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

解

$$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}\quad (x^2+y^2\neq 0),$$

在右半平面内恒成立, 因此在右半平面内, $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 是某个函数的全微分.

在 $x>0$ 内取点 $A(1,0), B(x,y)$, 积分路径为折线 AMB(见图 7.20). 有

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{AM}\frac{\overset{\mathrm{d}y=0}{x\mathrm{d}y}-\overset{y=0}{y\mathrm{d}x}}{x^2+y^2}+\int_{MB}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=0+\int_0^y\frac{x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}\Big|_0^y=\arctan\frac{y}{x}.$$ □

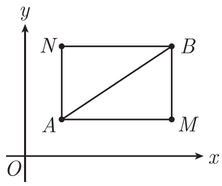


图 7.19

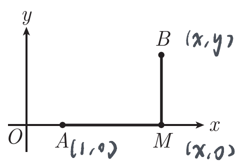


图 7.20

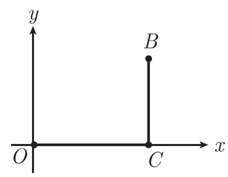
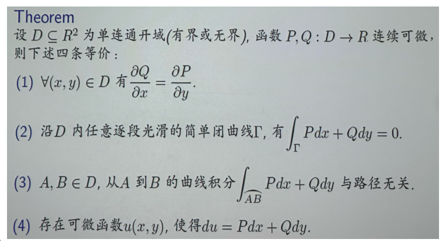


图 7.21


Theorem
设 $D\subseteq R^2$ 为单连通开域(有界或无界), 函数 $P,Q:D\to R$ 连续可微, 则下述四条等价:
(1) $\forall(x,y)\in D$ 有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.
(2) 沿 D 内任意逐段光滑的简单闭曲线 Γ, 有 $\int_\Gamma Pdx+Qdy=0$.
(3) $A,B\in D$, 从 A 到 B 的曲线积分 $\int_{\widehat{AB}}Pdx+Qdy$ 与路径无关.
(4) 存在可微函数 $u(x,y)$, 使得 $du=Pdx+Qdy$.

例 7.3.5　设 $P(x,y)=x^4+4xy^3$, $Q(x,y)=6x^2y^2+5y^4$,

(1) 验证在整个 xOy 平面内,$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分;

(2) 求 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 的原函数 $u(x,y)$;

(3) 求曲线积分 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(5,1)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$.

解　(1) 由于 $P(x,y),Q(x,y)$ 在全平面上有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

所以 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分.

(2) 取点 $A(0,0)$, 任一点 $B(x,y)$, 点 $C(x,0)$(见图 7.21), 则

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OC}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{CB}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x^4\mathrm{d}x+\int_0^y(6x^2y^2+5y^4)\mathrm{d}y=\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3+y^5.$$

(3) $$\int_{(0,0)}^{(5,1)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3+y^5\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(5,1)}=676.$$ □

习题 7.3

1. 应用格林公式计算下列曲线积分 (闭曲线均为逆时针方向绕行):

(1) $\displaystyle\oint_C xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=a^2$;

(2) $\oint_C (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y$, 其中 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

(3) $\oint_C (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$, 其中 C 为三个顶点分别为 $(0,0),(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形的正向边界;

(4) $\oint_C (x+\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{d}y$, 其中 C 是双纽线 $\rho^2=\cos 2\theta$ 的右半支;

(5) $\oint_C \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$, 其中 C 为区域 $D=\{(x,y)|0<x<\pi,0<y<\sin x\}$ 的边界;

(6) $\oint_C (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$, 其中 C 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$;

(7) $\oint_C (x\mathrm{e}^{x^2}-3y)\mathrm{d}x+(2x+y^2\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$, 其中 C 是 $y=x^2,y=0,x+2y=3$ 所围区域的边界;

(8) $\int_C -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$, 其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ 的右半分支.

2. 利用曲线积分, 求下列所围区域的面积:

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t(a>0,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) 椭圆 $9x^2+16y^2=144$;

(3) 心脏线 $\begin{cases} x=a(1-\cos t)\cos t, \\ y=a(1-\cos t)\sin t, \end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

3. 证明下列曲线积分与路径无关, 并求积分值:

(1) $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$;

(3) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(3,4)} \mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}y$.

4. 可微函数 $F(x,y)$ 满足什么条件使得曲线积分 $\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$ 与积分路径无关.

5. 计算 $I=\oint_C \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 C 为不通过坐标原点的简单闭曲线, 取逆时针方向.

6. 验证下列 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分, 并求出一个这样的 $u(x,y)$:

(1) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$;

(2) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$;

(3) $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$;

(4) $(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$;

(5) $(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$.

7. 计算下列曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_C \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, 其中 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$ 上从 $A(0,b)$ 到 $B(a,0)$ 的有向弧段;

(2) $\displaystyle\int_C \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 C 是沿抛物线 $y=2x^2-2$ 从点 $A(-1,0)$ 到 $B(1,0)$ 的弧段;

(3) $\displaystyle\int_C \big((x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y+y\big)\mathrm{d}x+\big(\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y-x\big)\mathrm{d}y$, 这里 C 是旋轮线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)(a>0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$ 的一拱;

(4) $\displaystyle\int_C (\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$, 其中 C 为从点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax(a>0)$;

(5) $\displaystyle\int_C \frac{(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y}{(x-a)^2+y^2}$, 其中 C 为从点 $A(2a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$.

* 8. 设 D 是平面有界区域, 其边界 C 是逐段光滑曲线, 函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 $\overline{D}=D\bigcup C$ 上有连续的一阶偏导数. 证明:

$$\oint_C [\,P\cos\langle \boldsymbol{n},x\rangle+Q\cos\langle \boldsymbol{n},y\rangle\,]\,\mathrm{d}s=\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 C 是按区域 D 的正向绕行, $\cos\langle \boldsymbol{n},x\rangle,\cos\langle \boldsymbol{n},y\rangle$ 为曲线 C 的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.

* 9. 设 D 为有界区域, D 的边界 C 为逐段光滑闭曲线. 函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}=D\bigcup C$ 上有二阶连续偏导数, 证明:

(1) $\displaystyle\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s-\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 为 u 沿 C 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数, 算子 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_D (u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s$.

* 10. 设 D 为有界区域, D 的边界 C 为逐段光滑闭曲线, $u(x,y)$ 为有界闭区域 $\overline{D}$ 上的调和函数, 即 $u(x,y)$ 有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

证明:

(1) $\displaystyle\oint_C u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为 C 的外法线方向;

(2) 若 $u(x,y)$ 在 C 上恒为零, 则 $u(x,y)$ 在 D 上也恒为零.

11. 证明下面的不等式

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| \leqslant lM.$$

其中 l 为曲线 C 的长度, $M = \max\limits_{(x,y)\in C} \sqrt{P^2+Q^2}$.

12. 计算曲线积分

$$\int_{\overset{\frown}{AmB}} [\varphi(y)\mathrm{e}^x - my]\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\mathrm{e}^x - m]\mathrm{d}y.$$

其中 $\varphi(y), \varphi'(y)$ 均连续, $\overset{\frown}{AmB}$ 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 与点 $B(x_2,y_2)$ 的路径, 且与直线段 AB 围成的区域 D 的面积为 S, $\overset{\frown}{AmB}$ 的方向为 D 的边界曲线的正向.

13. 设 C 是平面上的一条光滑闭曲线，逆时针方向为其正方向，其上的单位切向量记为 $\boldsymbol{s}$, 其方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$, $\boldsymbol{l} = (A,B)$ 是任意固定的非零向量，$\boldsymbol{n}$ 是 C 的单位外法向量，其方向余弦为 $(\cos\langle \boldsymbol{n}, x\rangle, \cos\langle \boldsymbol{n}, y\rangle)$, 证明: $\oint\limits_C \cos\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}s = 0$.

14. 计算积分$I = \oint_C \dfrac{\cos\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle}{r}\,\mathrm{d}s$, 其中 $\boldsymbol{r} = (x-\xi, y-\eta)$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, C 为逐段光滑的简单闭曲线，取逆时针方向, 点 $A(\xi,\eta)$ 不在 C 上, $\boldsymbol{n}$ 是 C 的单位外法向量.

15. 设函数 $Q(x,y)$ 连续可微，曲线积分 $\displaystyle\int_C 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，且对一切实数 t 都有 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,1)} 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$, 求函数 $Q(x,y)$.

16. 函数 $f(x)$ 连续可微且 $f(0)=1$. 若积分

$$\int_O^A \left[\frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)y^2 + \frac{1}{3}f(x)y^3 + x\ln(1+x^2)\right]\mathrm{d}x + \left[f(x)y^2 - f(x)y + \frac{x^2}{2}y + \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\right]\mathrm{d}y$$

与路径无关，其中 $O(0,0)$ 以及 $A(1,1)$ 为两个固定点. 求 $f(x)$ 以及此积分值.

17. 设曲线 C 为 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$, 取逆时针方向, 设 $\varphi(x)$ 是连续的正函数. 证明:

$$\int_C \frac{x}{\varphi(y)}\mathrm{d}y - y\varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\pi.$$

7.4 第一类曲面积分

7.4.1 第一类曲面积分的概念与性质

设在空间中有一张光滑曲面 S(即在曲面上每点都有切平面, 且切平面的法向量随曲面上的点连续地变动), 其上任一点 (x,y,z) 处的面密度为 $\rho(x,y,z)$. 函数 $\rho(x,y,z)$ 在 S 上连续, 要求曲面 S 的质量 m.

将 S 任意地分成 n 小块 $\Delta S_i (i=1,\cdots,n)$, 同时也用 ΔS_i 表示小块的面积 (见图 7.22). 在每一小块 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i), 则小块 ΔS_i 的质量

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

因而

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

令 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta S_i$ 的直径$\}$, 若极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

存在, 则称此极限值就是曲面 S 的质量 m, 即

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

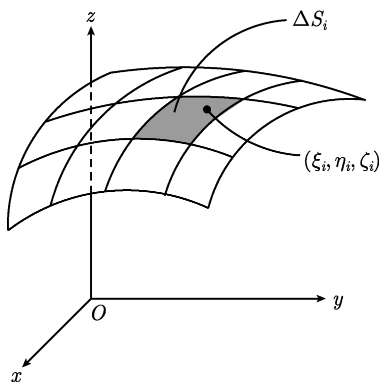


图 7.22

这样的极限也会在其他问题中遇到, 抽去它们的具体意义, 就得出第一类曲面积分的概念.

定义 7.4.1 (第一类曲面积分)　设曲面 S 是光滑的, 函数 $f(x, y, z)$ 在 S 上有定义, 将 S 任意分为 n 小块 $\Delta S_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, ΔS_i 同时也表示这个小的曲面面积. 令 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta S_i$ 的直径$\}$. 在 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i), 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$, 如果当 $\lambda \to 0$ 时, 这个和式的极限总存在 (且与曲面 S 的分割和点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关), 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 S 上的**第一类曲面积分**或**对面积的曲面积分**, 记为

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z) \mathrm{d}S,$$

即

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为**被积函数**, S 称为**积分曲面**, $\mathrm{d}S$ 称为面积**微元**.

根据定义可知, 面密度为连续函数 $\rho(x,y,z)$ 的光滑曲面 S 的质量 m 可表示为

$$m=\iint\limits_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

如果 S 是分片光滑的, 我们规定函数在 S 上第一类曲面积分等于函数在光滑的各片曲面上第一类曲面积分之和. 例如, 设 S 是由两片光滑曲面组成 (记为 $S=S_1\bigcup S_2$), 就规定

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

我们指出, 第一类曲面积分有以下性质:

定理 7.4.1 (第一类曲面积分的性质)　*当 $f(x,y,z),g(x,y,z)$ 在分片光滑曲面 S 上连续时, 第一类曲面积分总存在, 并且*

(1) *设 k 为常数, 则*

$$\iint\limits_S kf(x,y,z)\mathrm{d}S=k\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

(2) $\displaystyle\iint\limits_S [f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S\pm\iint\limits_S g(x,y,z)\mathrm{d}S.$

(3) *若 $S=S_1\bigcup S_2$, 即 S 由互不重叠的分片光滑曲面 S_1,S_2 所组成, 则*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

(4) $\displaystyle\iint\limits_S \mathrm{d}S=S$ *的面积.*

7.4.2　第一类曲面积分的计算

第一类曲面积分的计算方法是将其转化为二重积分. 我们给出其计算公式. 设曲面 S 由方程 $z=g(x,y),(x,y)\in D$ 确定, 且函数 $g(x,y)$ 在闭区域 D 上具有连续的一阶偏导数, 则有计算公式

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x'^2+g_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.}$$

下面我们给出简略的证明. 按定义, 有

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

设 S 上第 i 小块曲面 ΔS_i(它的面积也记为 ΔS_i) 在 xOy 平面上的投影区域为 $\Delta\sigma_i$(见图 7.23), 则 ΔS_i 可表示为二重积分

$$\Delta S_i=\iint\limits_{\Delta\sigma_i}\sqrt{1+[g_x'(x,y)]^2+[g_y'(x,y)]^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用二重积分的中值定理, 上式可写成

$$\Delta S_i=\sqrt{1+[g_x'(\xi_i',\eta_i')]^2+[g_y'(\xi_i',\eta_i')]^2}\Delta\sigma_i.$$

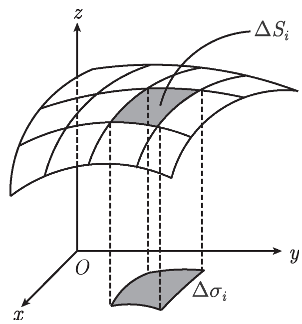


图 7.23

其中 $(\xi_i',\eta_i')\in\Delta\sigma_i$. 又由 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S$, 故 $\zeta_i=g(\xi_i,\eta_i)$, 于是

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,g(\xi_i,\eta_i))\sqrt{1+[g_x'(\xi_i',\eta_i')]^2+[g_y'(\xi_i',\eta_i')]^2}\Delta\sigma_i.$$

其中 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 构成闭区域 D 的一个分割. $\mu=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}$, 且 $\lambda\to 0$ 时有 $\mu\to 0$.

由于函数 $f(x,y,g(x,y))$ 以及函数 $\sqrt{1+[g_x'(x,y)]^2+[g_y'(x,y)]^2}$ 都在闭区域 D 上连续, 从而一致连续. 可以证明:

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,g(\xi_i,\eta_i))\sqrt{1+[g_x'(\xi_i',\eta_i')]^2+[g_y'(\xi_i',\eta_i')]^2}\Delta\sigma_i\\=&\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,g(\xi_i,\eta_i))\sqrt{1+[g_x'(\xi_i,\eta_i)]^2+[g_y'(\xi_i,\eta_i)]^2}\Delta\sigma_i\\=&\iint\limits_{D}f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+[g_x'(x,y)]^2+[g_y'(x,y)]^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此, 有

$$\iint\limits_{S}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+[g_x'(x,y)]^2+[g_y'(x,y)]^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果积分曲面 S 由方程 $y=h(z,x)$ 或 $x=k(y,z)$ 给出, 也可将第一类曲面积分化为相应的二重积分, 请读者给出其相应的计算公式.

当曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v),\\z=z(u,v),\end{cases}\qquad (u,v)\in D$$

$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 \qquad F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v' \qquad G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$

给出时, 由第 6 章的讨论知, 曲面的面积微元可表示成 $\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中

$$E = \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_u, \quad F = \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v, \quad G = \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{r}'_v, \quad \boldsymbol{r} = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big),$$

因此, 有下面的计算公式

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例 7.4.1 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部 (见图 7.24).

解 S 的方程为

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant a^2-h^2\},$$

又

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

因此有

$$\begin{aligned}\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= a\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a(a^2-h^2).\end{aligned}$$

□

例 7.4.2 空间立体 V 由 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0, \\ z=2-x \end{cases}$ 所围成, S 为 V 的边界曲面 (见图 7.25).

(1) 求曲面积分 $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S$;

(2) 若 S 有均匀密度 a(常数), 求 S 的质量 M.

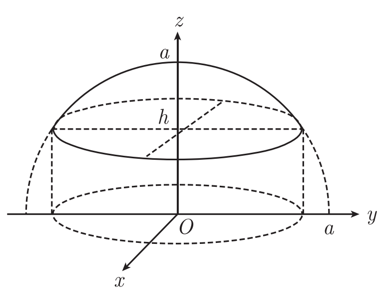


图 7.24

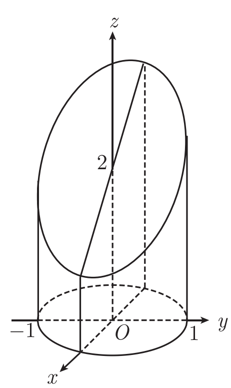


图 7.25

下表面　上表面　侧右面 $(y>0)$

解　S 由 $S_1: z=0, x^2+y^2 \leqslant 1, S_2: z=2-x, x^2+y^2 \leqslant 1, S_3: y=\sqrt{1-x^2}, 0 \leqslant z \leqslant 2-x, S_4: y=-\sqrt{1-x^2}, 0 \leqslant z \leqslant 2-x$ 所组成. 因此

$-1 \leq x \leq 1$

侧左面 $(y<0)$

$$\begin{aligned}\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} x\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_3} x\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_4} x\,\mathrm{d}S \\ &= \iint\limits_{D_1} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_1} \sqrt{2}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint\limits_{D_2} \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

←计算步骤

其中 D_1 为 xOy 平面上的闭区域: $x^2+y^2 \leqslant 1$.

D_2 为 zOx 平面上的闭区域: $-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2-x$, 从而

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (1+\sqrt{2})\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y + 2\int_{-1}^{1} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2-x} \mathrm{d}z \\ &= (1+\sqrt{2})\int_{-1}^{1} \underbrace{2x}_{\text{奇}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{1} \frac{2x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= 0 - 2\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + 4\int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{奇}}\mathrm{d}x \\ &= -4\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + 0 = -4\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

而

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4},$$

因此

$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S = -4\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -4 \times \frac{\pi}{4} = -\pi.$$

$$\begin{aligned}M &= \iint\limits_S a\,\mathrm{d}S \\ &= (1+\sqrt{2})\iint\limits_{D_1} a\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint\limits_{D_2} \frac{a\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= (1+\sqrt{2})a\pi + 2a\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2-x} \mathrm{d}z \\ &= (1+\sqrt{2})a\pi + 2a\int_{-1}^{1} \frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= (1+\sqrt{2})a\pi + 4a\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= (1+\sqrt{2})a\pi + 4a\arcsin x\Big|_{-1}^{1} = (5+\sqrt{2})a\pi.\end{aligned}$$

□

习题 7.4

1. 计算下列第一类曲面积分:

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$, 其中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2 = a^2, z \geqslant 0, a>0$;

(2) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的边界曲面;

(3) $\iint\limits_S \dfrac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, 其中 S 为四面体 $x+y+z\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 的边界曲面;

(4) $\iint\limits_S (z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S$, 其中 S 为平面 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分;

(5) $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分;

(6) $\iint\limits_S x^2\ \mathrm{d}S$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

(7) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\ \mathrm{d}S$, 其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=2z$ $(1\leqslant z\leqslant 2)$.

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_S \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\mathrm{d}S$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $0<a<1$.

3. 求抛物面壳 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量, 其面密度 $\rho=x+y+z$.

4. 求面密度为 ρ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0, a>0)$ 对 Oz 轴的转动惯量.

5. 求半球 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0, a>0)$ 的质量, 它的面密度 $\rho(x,y,z)=\dfrac{z}{a}$.

7.5　第二类曲面积分

7.5.1　第二类曲面积分的概念与性质

这一节我们讨论第二类曲面积分. 与第一类曲面积分不同, 它涉及曲面的定侧问题. 因此, 我们首先说明曲面侧的概念.

通常我们遇见的曲面都是双侧曲面, 例如上半球面 $S: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示的曲面, 有上侧与下侧之分. 闭球面有内侧与外侧之分. 对于这种曲面, 如果我们从曲面一侧的一点开始给曲面涂一种颜色, 若不越过曲面的边界曲线, 不能涂到曲面的另一侧.

但对于另一种曲面, 从曲面上的一点开始, 给曲面涂颜色, 不越过边界曲线, 可以将颜色涂满整个曲面. 例如, 将一长方形的带子 $ABCD$, 将 AB 保持不动, 而将 CD 扭转 $180°$, 再将 A 与 C 粘合, 将 B 与 D 粘合, 就得如图 7.26 所示的曲面 (称为麦比乌斯 (Möbius†) 带).

† 麦比乌斯 (Möbius A F, 1790~1868), 德国数学家.

具有这样性质的曲面称为**单侧曲面**.

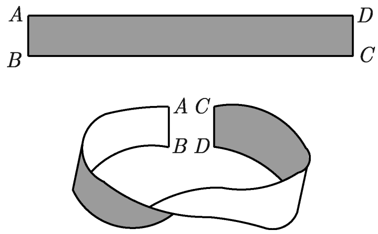


图 7.26

下面我们用数学语言来描述双侧曲面. 我们考虑光滑曲面. 在 S 上取定一点 P_0, 那么 S 在 P_0 点有两个方向相反的法向量. 我们任意取定其中一个作为从 P_0 点的出发方向, 记作 $\boldsymbol{n}(P_0)$. 设一动点 P 从 P_0 点出发沿完全落在曲面 S 上的任何一条连续闭曲线 C 变动, 再回到点 P_0, 如 S 是非闭的, 还假设 C 不越过 S 的边界曲线. 当点 P 在 C 上运动时, 其法向量 $\boldsymbol{n}(P)$ 也随之连续变化, 当点 P 返回到起始点 P_0 时, $\boldsymbol{n}(P)$ 的指向没有发生改变, 则称 S 为**双侧曲面**.

不具有上述性质的曲面称为单侧曲面.

以后我们总假设所考虑的曲面是双侧曲面. 在双侧曲面上只要选定了一点的法向量方向, 则曲面上全部点的法线方向也随之而定, 也就选定了曲面的一侧. 若改变原先选定的法线方向, 则在其他点的法线方向也一律改变, 这样就确定了曲面的另一侧. 所以对双侧曲面要确定它的一侧, 只要在它上面任一点选定一法线方向就行了. 例如, 设曲面 S 由方程

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D,$$

$F = z - f(x,y) = 0$

确定, 其中 $f(x, y)$ 在区域 D 上有一阶连续偏导数. S 在其上每一点 $P(x, y, z)$ 都有两个法向量

负号生成

$$(f'_x, f'_y, -1) \quad 及 \quad (-f'_x, -f'_y, 1),$$

这里前一个法向量的第三个坐标 < 0, 说明该法向量与 z 轴的正向成钝角, 故该法向量指向下方. 从而, 我们称这样确定的一侧为曲面的下侧.

法向量 $(-f'_x, -f'_y, 1)$ 指向上方, 它确定的一侧为曲面的上侧.

对于闭曲面, 我们可以确定曲面的内侧与外侧.

在引进第二类曲面积分的概念之前, 先讨论一个例子.

流向曲面一侧的流量: 设有一不可压缩流体流经曲面 S, 其流速与时间 t 无关, 只与点的位置有关, 设在点 $(x, y, z) \in S$ 的流速为

$\vec{v} = (P, Q, R)$

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

其中 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 都在 S 上连续. 求在单位时间内流向 S 指定侧的流体的质量 (假设流体的密度为 1), 即流量 Φ.

如果流体流过平面上面积为 A 的一个闭区域, 且流体在这闭区域上各点处的流速为 $\boldsymbol{v}$(常向量), 又设 $\boldsymbol{n}$ 为该平面的单位法向量, 那么在单位时间内流过这个闭区域的流体组成一个底面积为 A, 斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体 (见图 7.27).

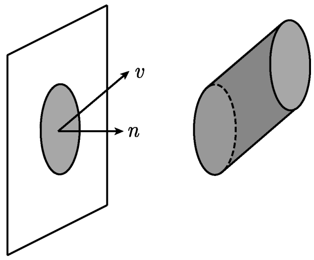


图 7.27

当 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角 $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}\rangle = \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 时, 斜柱体的体积为

$$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta = A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

这就是通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量 Φ.

当 $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}\rangle = \dfrac{\pi}{2}$ 时, 显然流体通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量 Φ 为零. 而 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0$, 故 $\Phi = A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

当 $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle = \theta > \dfrac{\pi}{2}$ 时, $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} < 0$, 这时我们仍将 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ 称为流体通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量, 它表示流体通过闭区域 A 实际上流向 $-\boldsymbol{n}$ 所指一侧, 且流向 $-\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量为 $-A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$. 因此, 不论 $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}\rangle$ 为何值, 流体通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量 Φ 均为 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

如果流体所经过的是一片曲面 S, 且流速 $\boldsymbol{v}$ 也不是常向量, 我们可以运用极限的思想来求流体通过曲面 S 一侧的流量 Φ.

将曲面 S 分成 n 小块 ΔS_i(ΔS_i 同时也表示第 i 小块曲面的面积), 在 ΔS_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 用在 M_i 点处的流速

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\boldsymbol{i} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\boldsymbol{j} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\boldsymbol{k}$$

代替 ΔS_i 上其他各点处的流速, 以 M_i 点处曲面 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 代替 ΔS_i 上其他各点处的单位法向量 (见图 7.28). 从而通过 ΔS_i 流向指定侧的流量 $\Delta\Phi_i$ 的近似值为

$$\Delta\Phi_i \approx \boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i.$$

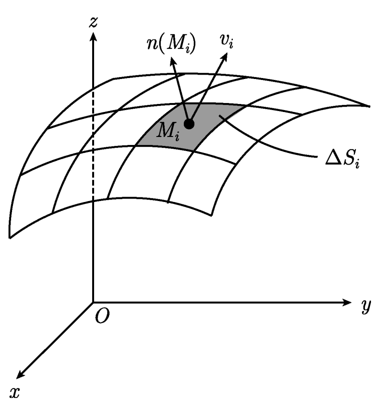


图 7.28

于是, 通过 S 流向指定侧的流量

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_i \Delta S_i.$$

设 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta S_i$ 的直径$\}$, 如果 $\lambda \to 0$, 上式右端和式的极限存在, 则我们称这个极限值是流量 Φ, 即

$$\Phi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_i \Delta S_i.$$

这样的极限还会在其他问题中遇到, 抽去它们的具体意义, 就得到了第二类曲面积分的定义.

定义 7.5.1 (第二类曲面积分)　设 S 为光滑的有向曲面, 在 S 上选定一侧, 记选定一侧的单位法向量为 $\boldsymbol{n}(P)$, $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ 为定义在 S 上的一个向量函数. 将 S 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i(ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积), 在 ΔS_i 上任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 如果当各小块曲面的直径的最大者 $\lambda \to 0$ 时

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \boldsymbol{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

存在, 且与 S 分割和 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的取法无关. 则称此极限值为 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ 在 S 上的**第二类曲面积分**, 并记为

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{n}(x, y, z) \mathrm{d}S.$$

即

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{n}(x, y, z) \mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \boldsymbol{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

如果设 $\boldsymbol{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$, 法向量 $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ 的方向角为 $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$, $\gamma = \gamma(x, y, z)$, 则

应用于 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 较简单. 如平面/球面.

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{S} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) \mathrm{d}S.$$

这样第二类曲面积分便转化为第一类曲面积分. 下面我们来研究 $\cos\gamma \, \mathrm{d}S$ 的几何意义. 这里 $\mathrm{d}S$ 是曲面 S 的一个面积的微元, 可看作 S 上一小块曲面的面积, 因为这小块曲面很小, 故可近似地看作是垂直于 $\boldsymbol{n}(P)$ 的一小块平面, 其中 P 为小块曲面上的一点 (见图 7.29). 这样 $|\cos\gamma| \mathrm{d}S$ 就是 $\mathrm{d}S$ 在 xOy 平面上的投影. 由于 $\cos\gamma \, \mathrm{d}S$ 可正可负, 我们称 $\cos\gamma \, \mathrm{d}S$ 为 $\mathrm{d}S$ 在 xOy 平面上的有向投影面积, 记之为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 即

$$\cos\gamma \, \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

显然 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的符号依赖于 γ. 当 $0 \leqslant \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$, 当 $\dfrac{\pi}{2} < \gamma \leqslant \pi$ 时, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 0$. 完全类似地, 我们可以得到 $\mathrm{d}S$ 在 yOz 平面及 zOx 平面的有向投影面积, 并记 $\cos\alpha \, \mathrm{d}S =$

$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\cos\beta\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}z\mathrm{d}x$. 这里 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 与 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 的符号分别依赖于 α 与 β. 引入有向投影面积微元的记号后, 第二类曲面积分也可写成下列形式: 取决于 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 的符号.

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上式右边称为第二类曲面积分的坐标形式, 因此第二类曲面积分也称为**对坐标的曲面积分**.

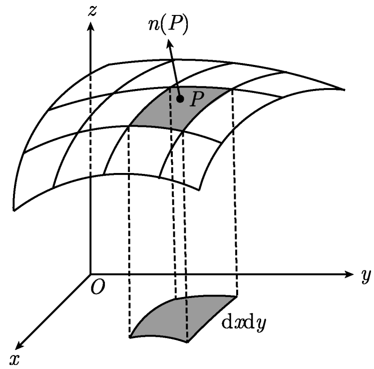


图 7.29

要特别注意, 第二类曲面积分的坐标形式与二重积分的区别.

例如, 当 $P = Q \equiv 0$ 时, 这时 S 上的第二类曲面积分为

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

它与在 xOy 平面上某个区域上的二重积分有本质的区别. 首先, 二重积分的被积函数是二元函数, 而第二类曲面积分中的被积函数 $R(x,y,z)$ 为三元函数, 其中点 (x,y,z) 位于曲面 S 上. 其次, 记号 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在二重积分中表示面积微元, 它是一个正的量, 而上面第二类曲面积分中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示曲面上的面积微元 $\mathrm{d}S$ 在 xOy 平面上的有向投影面积, 它可能为正也可能为负, 其符号由曲面的法向量的方向所决定.

如果 S 是分片光滑的有向曲面, 我们规定向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在 S 上的第二类曲面积分等于它在各片光滑曲面上第二类曲面积分之和.

第二类曲面积分具有以下性质:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{S^+} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{S^-} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

其中 S^+, S^- 是同一曲面的两个不同的侧.

(2) 如果将 S 分成 S_1 和 S_2, 则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint\limits_{S_1} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_2} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$$(3) \iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_S Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint\limits_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

以上性质可以由定义直接得到, 证明从略.

7.5.2　第二类曲面积分的计算

从前一节关于第二类曲面积分的讨论, 我们可知第二类曲面积分的计算方法之一是将其化为第一类曲面积分.

设 S 是一个有向曲面, S 上的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

则

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

例 7.5.1　计算

$$\iint\limits_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y),$$

$\vec{n}_1 = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) = (2x, 2y, 2z).$

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

$\vec{n} = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z).$

解　球面 S 外侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z),$$

原式 $= \iint\limits_S \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{n}\,dS$

$= \iint\limits_S \frac{(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dS$

$= \frac{1}{R^2}\iint\limits_S dS = \frac{1}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi.$

故

$dydz = \cos\alpha\, dS$

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
=&\iint\limits_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S\\
=&\iint\limits_S \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{R^2}\iint\limits_S \mathrm{d}S = \frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi.
\end{aligned}$$

□

这个例子有一些特殊性. 一般我们需要将第二类曲面积分化为二重积分来计算. 因此, 我们有下面的一些结论.

定理 7.5.1　设 S 为一有向曲面, 其方程为

$$z = f(x,y),\qquad (x,y)\in D_{xy},$$

且函数 $f(x,y)$ 在 D_{xy} 上连续可微. 函数 P, Q, R 为定义在曲面 S 上的连续函数, 则有

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iint\limits_{D_{xy}}[P(x,y,f(x,y))(-f'_x)+Q(x,y,f(x,y))(-f'_y)+R(x,y,f(x,y))]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中正负号由 S 的定向决定, 法向量指向上侧时取正号, 指向下侧时取负号.

证明　曲面 S 在点 (x,y,z) 的单位法向量为

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}(-f'_x,-f'_y,1),$$

其中当法向量指向上侧时取正号, 当法向量指向下侧时取负号, 所以我们有

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=\pm\iint\limits_S\frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}[P(-f'_x)+Q(-f'_y)+R]\,\mathrm{d}S.$$

而

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\pm\iint\limits_{D_{xy}}[P(x,y,f(x,y))(-f'_x)+Q(x,y,f(x,y))(-f'_y)+R(x,y,f(x,y))]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\qquad\square$$

特别地, 我们有下面的推论.

推论 7.5.2　设 S 的方程为 $z=f(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 函数 $f(x,y)$ 在 D_{xy} 上连续可微, 则

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

类似地, 如果曲面 S 的方程为　　投影.

$$y=g(z,x),\qquad (z,x)\in D_{zx},$$

其中 D_{zx} 为 S 在 zOx 平面上的投影, 函数 $g(z,x)$ 在 D_{zx} 上连续可微, 则有

$$\iint\limits_S(P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$
$$=\pm\iint\limits_{D_{zx}}[P(x,g(z,x),z)(-g'_x)+Q(x,g(z,x),z)+R(x,g(z,x),z)(-g'_z)]\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

特别地

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_{D_{zx}}Q(x,g(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

其中正负号由 S 的定向所决定, 当 S 的法向量指向右侧时取正号, 当 S 的法向量指向左侧时取负号.

如果曲面 S 的方程为

$$x=h(y,z),\qquad (y,z)\in D_{yz},$$

其中 D_{yz} 为 S 在 yOz 平面上的投影, 函数 $h(y,z)$ 在 D_{yz} 上连续可微, 则有

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\pm\iint\limits_{D_{yz}}[P(h(y,z),y,z)+Q(h(y,z),y,z)(-h'_y)+R(h(y,z),y,z)(-h'_z)]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

特别地

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(h(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中正负号由 S 的定向所决定, 当 S 的法向量指向前侧时取正号, 当 S 的法向量指向后侧时取负号.

当曲面的方程是参数方程时, 有如下结论:

定理 7.5.3　*设 S 为一有向曲面, 其参数方程为*

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

且函数 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 在 D 上连续可微. 函数 P,Q,R 为定义在曲面 S 上的连续函数, 则有

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_D(PA+QB+RC)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中等式右边 P,Q,R 中 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$. $A=\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B=\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $C=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$. 当 (A,B,C) 的方向与 S 的方向一致时, 取正号, 否则取负号.

证明　记 $\boldsymbol{r}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, 则 $(A,B,C)=\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$ 是曲面的法向量. S 的指定侧的单位法向量

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right),$$

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S \\
=&\iint\limits_S \pm(PA+QB+RC)\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\mathrm{d}S \\
=&\pm\iint\limits_D (PA+QB+RC)\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
=&\pm\iint\limits_D (PA+QB+RC)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

□

例 7.5.2 计算

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

解 $S: z=\sqrt{x^2+y^2}, z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\in D, D: x^2+y^2\leqslant 1.$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}=&\iint\limits_D \left(x\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+y\cdot\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}
$$

□

例 7.5.3 计算

$$\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

解 先计算

$$I_3=\iint\limits_S z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1^+} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_2^-} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

上、下半球分别投影.

其中 S_1^+ 是上半球面

$$z=c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}, (x,y)\in D$$

取上侧, S_2^- 是下半球面

$$z=c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}, (x,y)\in D$$

取下侧. 其中 $D: (x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$, 所以

$$
\begin{aligned}
I_3=&\iint\limits_D \left(c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&-\iint\limits_D \left(c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$= 4c\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换

$$x = a + r\cos\theta, \qquad y = b + r\sin\theta,$$

则得

$$I_3 = 4c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}r\mathrm{d}r = 8\pi c\left(-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R\right) = \frac{8}{3}\pi R^3 c.$$

由对称性知

$$I_1 = \iint\limits_{S}x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\pi R^3 a, I_2 = \iint\limits_{S}y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\pi R^3 b,$$

因此

$$\iint\limits_{S}x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

□

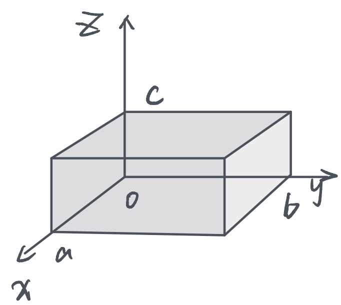
例 7.5.4　计算曲面积分

$$\iint\limits_{S}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ 为连续函数, a, b, c 为正实数, S 为长方体 V 的整个表面的外侧, $V = \{(x,y,z)|\,0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c\}$.

解　将有向曲面 S 分成六部分

$S_1:\ z=c,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$ 的上侧,
$S_2:\ z=0,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$ 的下侧,
$S_3:\ x=a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c$ 的前侧,
$S_4:\ x=0,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c$ 的后侧,
$S_5:\ y=b,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant c$ 的右侧,
$S_6:\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant c$ 的左侧.



除 S_3, S_4 外, 其余四片曲面在 yOz 平面上的投影为一线段, 故面积为零. 因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{S_3}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{S_4}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \iint\limits_{D_{yz}}f(a)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_{yz}}f(0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= [\,f(a)-f(0)]\,bc.\end{aligned}$$

类似地可得

$$\iint\limits_{S}g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = [\,g(b)-g(0)]\,ac, \iint\limits_{S}h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = [\,h(c)-h(0)]\,ab.$$

因此

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&abc\left(\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right).\end{aligned}$$

□

例 7.5.5 计算曲面积分 $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$ 的部分.

解 方法 1：将 S 分为两部分 (见图 7.30), 其中 S_1 的方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 其法线向上. S_2 的方程为 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, 其法线向下. 两个曲面在 xOy 平面上的投影区域均为

$$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}.$$

因此

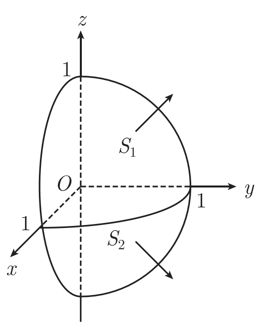


图 7.30

$$\begin{aligned}\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_2} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad-\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

方法 2：曲面 S 的参数方程为 $x=\sin\varphi\cos\theta, y=\sin\varphi\sin\theta, z=\cos\varphi$, 则

$$C=\frac{D\,(x,y)}{D\,(\varphi,\theta)}=\sin\varphi\cos\varphi,$$

其中 $(\varphi,\theta)\in D$, $D:0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. (A,B,C) 的方向与 S 方向一致. 因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_D \sin\varphi\cos\theta\cdot\sin\varphi\sin\theta\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

□

习题 7.5

计算下列第二类曲面积分:

1. $\iint\limits_{S}(x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

2. $\iint\limits_{S} yz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及 $x+y+z=a(a>0)$ 所围四面体的表面外侧.

3. $\iint\limits_{S} x^2y^2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上半部的上侧.

4. $\iint\limits_{S}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为圆锥曲面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧.

5. $\iint\limits_{S}\left(\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}\right)$, 其中 S 为椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$ 的外侧.

6. $\iint\limits_{S}(x+a)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+b)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 的外侧, a, b, c 为常数.

7. $\iint\limits_{S} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=2$ 所截得的第一卦限内的部分的前侧.

8. $\iint\limits_{S} -2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\sin(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是曲面 $y=\mathrm{e}^x(1\leqslant y\leqslant 2,\ 0\leqslant z\leqslant 2)$ 的前侧.

9. $\iint\limits_{S}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sqrt{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是曲面 $z=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$, 取上侧.

10. $\iint\limits_{S} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(R>0)$ 的上侧.

11. $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分, 取下侧.

7.6　高斯公式与斯托克斯公式

7.6.1　高斯 (Gauss) 公式

高斯 (Gauss‡) 公式是格林公式的一种推广, 它表示了空间闭区域上的三重积分与其边

‡ 高斯 (Gauss K F, 1777～1855), 德国数学家.

界曲面上的曲面积分之间的关系. 高斯定理是由俄罗斯数学家奥斯特洛格拉德斯基[§] 首先发表, 故公式也称**奥氏公式**或**奥斯特洛格拉德斯基-高斯公式**(简称**奥-高公式**). 高斯公式可陈述如下.

定理 7.6.1 (高斯公式)　设空间闭区域 V 是由分片光滑的闭曲面 S 所围成, 函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 V 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint\limits_{S} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V,$$

或

$$\iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V.$$

这里 S 是 V 的边界曲面的外侧, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是 S 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

证明　设区域 V 是以曲面 S_1 为底, 曲面 S_2 为顶, 母线平行于 z 轴的柱体 (见图 7.31). 设 V 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy}, S_1, S_2 的方程分别为

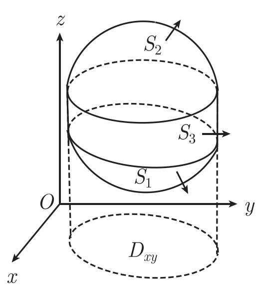


图 7.31

$$S_1 : z = f_1(x,y), (x,y) \in D_{xy},$$
$$S_2 : z = f_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}.$$

由三重积分的计算法, 有

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint\limits_{D_{xy}} \Big[R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))\Big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另一方面, 这里 V 的边界曲面 S 由 S_1, S_2 及 S_3 组成, 其中 S_3 为柱体的侧表面, 其在 xOy 平面上的投影为 D_{xy} 的边界曲线, 因而其面积为零. 故由曲面积分的计算公式知

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{S_1} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_2} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_3} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 0 \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} \Big[R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))\Big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

即

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{S} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.6.1}$$

§ 奥斯特洛格拉德斯基 (1801～1862), 俄罗斯数学家.

对于一般的区域 V, 可引进一些辅助曲面将 V 分成有限个如图 7.31 所示的小区域, 则在每个小区域上式 (7.6.1) 成立, 并注意到沿辅助曲面相反两侧的两个曲面积分的绝对值相等而符号相反. 因此, 将在各小区域上的等式相加就得在整个 V 上式 (7.6.1) 仍然成立. 同理可证

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{7.6.2}$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x. \tag{7.6.3}$$

将式 (7.6.1), (7.6.2), (7.6.3) 相加, 即得高斯公式. □

例 7.6.1　利用高斯公式计算曲面积分

$$\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$P=x^3$ $Q=y^3$ $R=z^3$.

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解　由高斯公式得

$$\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^a r^4\mathrm{d}r\right)=\frac{12\pi a^5}{5}.$$

□

例 7.6.2　计算

$$\iint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

解　由高斯公式得

$$\iint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中 V 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 所围的区域.

作变换 $u=x-y+z, v=y-z+x, w=z-x+y$, 则

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=4,$$

因而 $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\dfrac{1}{4}$.

又区域 V 变为 $V_1=\{(u,v,w)\,|\,|u|+|v|+|w|\leqslant 1\}$, 这是一个关于坐标原点对称的正八面体, 且在第一卦限的部分由平面 $u+v+w=1, u=0, v=0, w=0$ 围成, 其体积为 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{6}$, 故八面体的体积为 $8\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{3}$. 因此

$$\begin{aligned}&\iint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&3\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1}\frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=1.\end{aligned}$$

□

例 7.6.3 利用高斯公式计算曲面积分

$$\iint_S (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧 (见图 7.32).

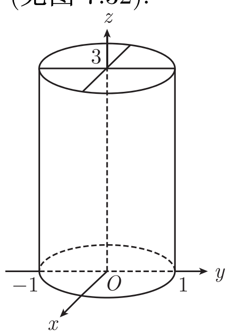


图 7.32

解 $P=(y-z)x, Q=0, R=x-y$, 由高斯公式得

$$\begin{aligned}&\iint_S (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V (y-z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^3(\rho\sin\theta-z)\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

例 7.6.4 求

$$I=\iint_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y),$$

其中 S 是空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧, 且坐标原点不在 S 上.

解 分两种情况讨论:

(1) V 不包含坐标原点. 因为

$$P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

则在 V 上有

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

于是

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

故由高斯公式有

$$\begin{aligned}I=&\iint\limits_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\=&\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.\end{aligned}$$

(2) V 包含坐标原点, 以 $(0,0,0)$ 为球心, 充分小的正数 r 为半径, 作一球体

$$V_2=\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2\leqslant r^2\},$$

使得 V_2 完全包含在 V 内 (见图 7.33). 记 $S_1=\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2=r^2\}$, 取外侧. 记 V_1 为由 S 及 S_1 包含的闭区域, 则在 V_1 上有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

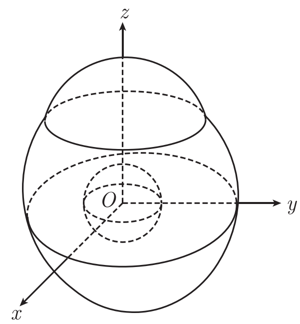


图 7.33

因此

$$\iint\limits_{S+S_1^-}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=0.$$

其中 S_1^- 的法向量指向内侧. 故

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\=&\iint\limits_{S_1} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=4\pi.\end{aligned}$$

□

最后我们介绍高斯公式的一个简单应用. 在高斯公式中取 $P=x,Q=y,R=z$ 时, 可得

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_V 3\mathrm{d}V=3V,$$

由此可以得到利用第二类曲面积分计算立体体积的公式

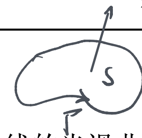
$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是空间立体 V 的边界曲面的外侧, V 既表示空间立体, 也表示立体的体积.

类似地, 还有如下公式

$$V=\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

具体使用的时候, 可以根据实际情况选择合适的公式.



7.6.2 斯托克斯 (Stokes) 公式

我们要将格林公式由平面推广到曲面, 使在具有光滑边界曲线的光滑曲面上的曲面积分与其边界上的曲线积分联系起来, 得到下面的斯托克斯 (Stokes¶) 公式.

定理 7.6.2 (斯托克斯公式) 设 S 为分片光滑的有向曲面, 其边界 Γ 为逐段光滑的有向闭曲线, Γ 的正向与 S 的正侧符合右手法则 (即当右手除大拇指外的四指依 Γ 的正向绕行时, 大拇指所指的方向与 S 上法向量所指的方向相同, 这时 Γ 称为有向曲面 S 的正向边界曲线), 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在曲面 S 及曲线 Γ 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\begin{aligned}&\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\\ =&\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{7.6.4}$$

证明 我们只需证明下面三个式子成立

$R\to Q\to P$ $R\to Q\to P$

$$\oint_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x=\iint\limits_{S}\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7.6.5}$$

$$\oint_{\Gamma} Q(x,y,z)\mathrm{d}y=\iint\limits_{S}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{7.6.6}$$

$$\oint_{\Gamma} R(x,y,z)\mathrm{d}z=\iint\limits_{S}\frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x. \tag{7.6.7}$$

我们首先证明式 (7.6.5). 先假设 S 与平行于 z 轴的直线相交不多于一点, 并设 S 的方程为

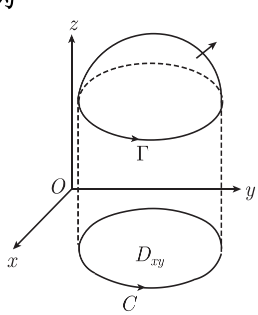


图 7.34

$$z=f(x,y)\qquad (x,y)\in D_{xy},$$

其中 D_{xy} 为曲面 S 在 xOy 平面上的投影区域, 记 D_{xy} 的边界为 C, C 也是 S 的边界曲线 Γ 在 xOy 平面上的投影. 不妨设 S 取上侧, 则 Γ 的正向如图 7.34 所示, 而 C 的指向是逆时针方向. 因为函数 $P(x,y,f(x,y))$ 在曲线 C 上点 (x,y) 处的值与函数 $P(x,y,z)$ 在曲线 Γ 上对应点 (x,y,z) 处的值是一样的, 并且两曲线上的对应小弧段在 x 轴上的投影相同, 根据曲线积分的定义, 我们有

$$\oint_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x=\oint_{C} P(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x,$$

由格林公式可得

$$\oint_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x=\oint_{C} P(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x$$

¶ 斯托克斯 (Stokes G G, 1819~1903), 英国数学家.

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(-\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,f(x,y))\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f_y'\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另一方面, 由第二类曲面积分的计算公式有

$$\begin{aligned}\iint\limits_S\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{\partial P}{\partial z}(-f_y')-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{\partial P}{\partial z}f_y'+\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

这样, 我们就证得此时式 (7.6.5) 成立.

其次, 如果曲面与平行于 z 轴的直线的交点多于一个, 则可作辅助曲线将曲面分成几个小曲面, 使得每个小曲面与平行于 z 轴的直线的交点不多于一个, 对每个小曲面可得公式 (7.6.5), 然后相加, 因为沿辅助曲线而方向相反的两个曲线积分相加时正好抵消, 所以, 我们得到式 (7.6.5) 对这一类曲面 S 成立, 同样可证得公式 (7.6.6), (7.6.7). 将这三式相加, 就得到斯托克斯公式. □

为了便于记忆, 斯托克斯公式也可写成

$$\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

将其中的行列式按第一行展开, 并将 $\dfrac{\partial}{\partial y}$ 与 R 的 "积" 理解为 $\dfrac{\partial R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 与 Q 的 "积" 理解为 $\dfrac{\partial Q}{\partial z}$.

利用两类曲面积分间的联系, 可得斯托克斯公式的另一种形式

$$\begin{aligned}&\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\\=&\iint\limits_S\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\=&\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为有向曲面 S 在点 (x,y,z) 处的单位法向量.

如果 S 是 xOy 平面上的一个闭区域, 则斯托克斯公式就变为格林公式. 因此, 格林公式可看成斯托克斯公式的一种特殊情况.

由斯托克斯公式, 我们可以得到空间曲线积分与路径无关的充分必要条件.

定理 7.6.3　设空间区域 V 是单连通区域, 函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 V 内具有一阶连续偏导数, 则空间曲线积分

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

在 V 内与路径无关 (或沿 V 内任意闭曲线的曲线积分为零) 的充分必要条件是

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{7.6.8}$$

在 V 内恒成立.

定理 7.6.4　设空间区域 V 是单连通区域, 函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 V 内具有一阶连续偏导数, 则存在 V 内的可微函数 $u(x,y,z)$ 使得 $\mathrm{d}u = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 在 V 内成立的充分必要条件是式 (7.6.8) 在 V 内恒成立.

例 7.6.5　利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_\Gamma z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z,$$

其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形 S 的边界, 它的正向与这个平面三角形 S 上侧的法向量之间符合右手法则 (见图 7.35).

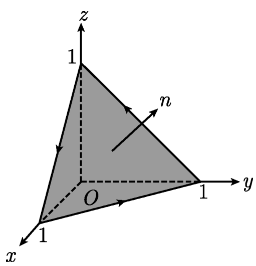


图 7.35

解　根据斯托克斯公式有

$$\oint_\Gamma z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$\mathrm{II}_S \to \mathrm{I}_S$

$$= \iint_S \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dS = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{3}{2}.$$

而

$$\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}, \quad \iint_S \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{D_{zx}} \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \quad \iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2},$$

其中 D_{yz}, D_{zx}, D_{xy} 分别为 S 在 yOz, zOx, xOy 平面上的投影区域. 因此

$$\oint_\Gamma z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \frac{3}{2}.$$

□

例 7.6.6　利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z.$$

其中 C 是椭圆 $x^2+y^2=a^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1(a>0,\ h>0)$, 若从 Ox 轴的正向看去, 此椭圆是依逆时针方向进行 (见图 7.36).

$$\oint_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$\vec{n}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})=(\frac{1}{a},0,\frac{1}{h})=(h,0,a)$.

解　将平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上 C 所围的区域记为 S, 则 S 的法向量为 $(h,0,a)$, 故

$$\cos\alpha=\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

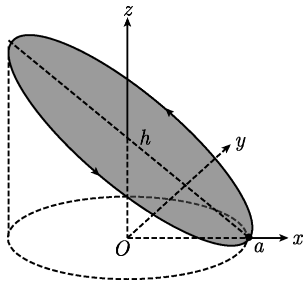


图 7.36

由斯托克斯公式有

$$\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\oint_C(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z \overset{\text{Stokes}}{=} -2\iint_S dydz+dzdx+dxdy$$

$$\overset{\text{I}\Leftrightarrow\text{II}}{=} -2\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-2\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-2\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}+0+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\iint_S\mathrm{d}S$$

$$=-2\frac{h+a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot a\sqrt{a^2+h^2}\pi=-2\pi a(h+a).$$

□

习题 7.6

1. 利用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ 全表面的外侧;

(2) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是圆柱 $x^2+y^2\leqslant 4$ 被 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的立体的表面的外侧;

(3) $\iint\limits_S (xy^2+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zx^2+5x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

2. 设 S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧 $(a>0)$, 计算曲面积分

$$\iint\limits_S \frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. 设 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 计算

$$\iint\limits_S zx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+6z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. 设 D 为空间中的区域, 分片光滑闭曲面 S 为 D 的边界, $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 是定义在闭区域 $\overline{D}=D\bigcup S$ 上且具有二阶连续偏导数的函数, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 依次表示 $u(x,\ y,\ z)$, $v(x,y,z)$ 沿 S 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数, 证明第二格林公式

$$\iiint\limits_D (u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S,$$

或记为

$$\iiint\limits_D \begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S \begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

其中算子 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

5. 设 S 为一光滑闭曲面, S 所围区域为 D, $u(x,y,z)$ 是闭区域 $\overline{D}=D\bigcup S$ 上的调和函数, 即 u 有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

证明:

(1) $\iint\limits_S u\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_D\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 为 u 沿 S 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数;

(2) 若 $u(x,y,z)$ 在 S 上恒为零, 则 $u(x,y,z)$ 在区域 D 也恒为零.

6. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_C (y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$, 其中 C 为椭圆 $x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t(0\leqslant t\leqslant\pi)$, 沿参数 t 的递增方向运动.

(2) $\oint_C y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$, 其中 C 是柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线, 从 z

轴正向看去是逆时针方向运动.

(3) $\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, 若从 x 轴的正向看去, 此圆周是取逆时针方向.

(4) $\oint_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的交线位于 xOy 平面上方的部分, 若从 x 轴正向看去为逆时针方向.

(5) $\oint_C 3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z$, 其中 C 是圆周 $x^2+y^2=2z$, $z=2$, 若从 z 轴正向看去, 此圆周取逆时针方向.

(6) $\oint_C 2y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$, 其中 C 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9$, $z=0$, 若从 z 轴正向看去, 此圆周取逆时针方向.

(7) $\oint_C (y^2-z^2+x^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2+z^2)\mathrm{d}z$, 其中 C 是平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}R$ 与立方体 $\{(x,y,z)|\,0\leqslant x\leqslant R,\ 0\leqslant y\leqslant R,\ 0\leqslant z\leqslant R\}$ 的交线, 若从 x 轴正向看去, C 按逆时针方向绕行.

(8) $\oint_C 2y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{e}^z\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y=1$ 的交线, 从 y 轴正向看去是顺时针方向.

7. 设 C 为柱面 $x^2+2y^2=4y$ 与上半球面 $x^2+y^2+z^2=4\ (z\geqslant 0)$ 的交线, 且从 y 轴正向看去为逆时针方向. 计算曲线积分

$$\int_C (y+1)\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}y+(x+3)\mathrm{d}z.$$

8. 设 C 是从 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的螺线 $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$. 计算曲线积分

$$\int_C (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z.$$

9. 求 I_1-I_2, 其中

$$I_1=\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S,\quad I_2=\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S,$$

S_1 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$, S_2 为内接于 S_1 的八面体的边界: $|x|+|y|+|z|=a$.

10. 求积分 $F(a)=\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$, 其中曲面 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$, 被积函数

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

11. 设 C 是平面 $2x+2y+z=2$ 上的一条光滑的简单闭曲线. 证明: 曲线积分

$$\oint_C 2y\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}y-x\mathrm{d}z$$

只与 C 所围区域的面积有关, 而与 C 的形状及位置无关.

12. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$, 求

$$\iint\limits_S (x^4+y^4+z^4-z^3)\,\mathrm{d}S.$$

13. 求曲环面 $\begin{cases} x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z=a\sin\psi, \end{cases}$ $(0<a\leqslant b)$ 所围立体的体积.

14. 当具有单位质量的物质沿直线段从点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 时, 求作用于物质的引力 $\boldsymbol{F}=\dfrac{k}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$ 所做的功.

7.7 场论初步

7.7.1 场的概念

在物理学中我们遇到各式各样的场, 如电场, 磁场, 温度场, 流体流动的速度场等. 如果忽略其物理意义, 单纯从数学上看, 所谓场就是一种数量或向量在空间中的分布. 更确切地说, 如果对于 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 中每一点 $M(x,y,z)$ 都有一个唯一确定的量

$$u=f(M)=f(x,y,z)$$

或向量

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$$

与之对应, 则称 $u=f(M)$ 或 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}(M)$ 为 Ω 上的一个场; 前者称为**数量场**, 后者称为**向量场**.

形成场的物理量常常依赖于时间, 这样的场的分布不仅是位置的函数也是时间的函数, 即 $u=f(x,y,z,t)$ 或 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}(x,y,z,t)$. 依赖于时间的场称为**不定常场**或**不稳定场**, 而不依赖于时间的场称为**定常场**或**稳定场**, 本节中我们只考察稳定场.

7.7.2 数量场・等值面・梯度

我们来考虑数量场 $u=f(x,y,z)$, 为了研究这个场的分布, 我们考察它的一个特殊情形, 就是仅考察场中有相同物理量的点, 即对于任意常数 C, 考察集合

$$M_C=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=C\}.$$

M_C 称为数量场的一个等值面. 在多数情况下,M_C 是空间中的一个曲面. 由隐函数存在定理可知, 如果 $f(x,y,z)$ 有一阶连续的偏导数且 f'_x, f'_y, f'_z 不同时为零, 进一步假设 $M_C\neq\varnothing$, 则 M_C 必为空间中的曲面. 对空间中每一点至多只能作一个等值面. 设 $P(x,y,z)$ 为等值面 M_C

上的任一点, 现作一向量 $\left(\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P, \left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_P\right)$, 这个向量称为数量场 $u=f(x,y,z)$ 在 P 点的**梯度**, 记为 $\mathrm{grad}f$, 即

$$\mathrm{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

由此可见, 每一个数量场 f 都有一个向量场 $\mathrm{grad}f$ 与之对应, $\mathrm{grad}f$ 称为数量场 f 的**梯度场**. 梯度 $\mathrm{grad}f$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$. 而它的长度为

$$|\mathrm{grad}f|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

设过点 $P(x,y,z)$ 的等值面为 $M_C: f(x,y,z)=C$, 则曲面 M_C 在点 P 的法向量为

$$\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right|_P,$$

即数量场 $f(x,y,z)$ 在点 P 的梯度. 因此, 数量场一点处的梯度恰好是通过该点的等值面的法向量. 进一步再讨论梯度的几何解释. 首先, 我们知道函数 $u=f(x,y,z)$ 在任意给定方向 $\boldsymbol{l}$ 上的导数是

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦. 因此, 若以 $\boldsymbol{l}^0$ 表示该方向上的单位向量, 即 $\boldsymbol{l}^0=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}+\cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$, 则有 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathrm{grad}f\cdot\boldsymbol{l}^0$. 又由于 $\boldsymbol{l}^0$ 为单位向量, 故上式右端的数量积等于向量 $\mathrm{grad}f$ 在方向 $\boldsymbol{l}$ 上的投影, 记为 $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{l}}f$:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathrm{grad}_{\boldsymbol{l}}f=|\mathrm{grad}f|\cos(\mathrm{grad}\,f,\boldsymbol{l}^0).$$

由此可见, 当 $\boldsymbol{l}$ 与 $\mathrm{grad}f$ 同方向时,$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$ 达到最大值 $|\mathrm{grad}f|$. 这说明在每一点处, 梯度 $\mathrm{grad}f$ 的方向是函数 $f(x,y,z)$ 在该点变化最快的那个方向, 也就是函数 $f(x,y,z)$ 在这个方向上的变化率为最大. 而 $|\mathrm{grad}f|$ 就是函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 的最大变化率. 这样也知道梯度 $\mathrm{grad}f$ 的定义与坐标系的选取无关. 如果我们以 $\boldsymbol{n}^0$ 表示等值面的单位法向量, 且该向量指向函数 $f(x,y,z)$ 的值增大的方向, 而以 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}$ 表示 $f(x,y,z)$ 沿该法线方向的方向导数, 则有

$$\mathrm{grad}f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}^0.$$

如果我们用 ∇(nabla) 表示向量微分算子 $\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 即 $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$, 则 $\mathrm{grad}f=\nabla f$.

类似地讨论可知平面数量场 $u=f(x,y)$ 的梯度 $\mathrm{grad}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$ 是等值线

$$M_C=\{(x,y)|f(x,y)=C\}$$

的法向量.

下面是梯度的基本性质:

(1) $\nabla C = \mathbf{0}$(C 为常数);

(2) $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$;

(3) $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$;

(4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}(v\nabla u - u\nabla v)$;

(5) $\nabla\varphi(u) = \varphi'(u)\nabla u$;

(6) $\nabla\varphi(u,v) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\nabla u + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\nabla v$.

例 7.7.1 试求数量场 $\dfrac{1}{r}$ 所产生的梯度场, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}.\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}).$$ □

7.7.3 向量场的流量与散度

设有向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}.$$

又假设 S 是场内的一个有向曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 S 在点 $M(x,y,z)$ 处的单位法向量, 则积分

$$\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过曲面 S 指定侧的流量 (通量). 由两类曲面积分的关系, 流量又可表示为

$$\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果将 $\boldsymbol{A}$ 看作流速场, 则上述积分的值恰好是在单位时间内通过 S 的流量的代数和.

当 S 是一个闭曲面, 而法向量朝外时, 流量实际上就是曲面上整体的流出量与流入量之差. 当流量大于零时, 意味着流出的量多于流入的量, 而流量小于零时则相反, 当流量等于零时, 流出量等于流入量.

由高斯公式, 我们有

$$\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中 Ω 为曲面 S 所包围的区域, $\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法向量, 量 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 的**散度**. 它形成一个数量场, 记为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

从而高斯公式可写为

$$\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V,$$

用 V 表示区域 Ω 的体积, 则由积分中值定理有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}|_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}=\frac{\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}{V}.$$

其中 $M(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 为 Ω 中的一点. 当 Ω 缩成一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 时, 则可得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}|_{M_0}=\lim_{\Omega\to M_0}\frac{\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}{V}.$$

由此可见, 散度在一点的值可以看作在该点附近单位体积内的流量, 它与坐标轴的选取无关. 若散度在一点大于零, 表明在该点附近流向该点的量少于该点流出的量, 我们称该点为 “源”, 若散度在一点处小于零, 则表明在该点附近流向该点的量多于自该点流出的量, 我们称该点为 “漏”. 若 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}|_M=0$, 则点 M 既非 “源” 也非 “漏”.

如果向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 处处为零, 则称向量场为**无源场**, 也称**管形场**.

利用向量微分算子 ∇, $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 还可以表示为 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}.$$

散度有以下的基本性质:

(1) $\mathrm{div}(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda\mathrm{div}\boldsymbol{A}$, 其中 λ 为实常数;

(2) $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}_1\pm\boldsymbol{A}_2)=\mathrm{div}\boldsymbol{A}_1\pm\mathrm{div}\boldsymbol{A}_2$;

(3) $\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}\varphi$, 其中 φ 是一个数量场;

(4) $\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ 或记为

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\Delta\varphi.$$

其中 Δ 为拉普拉斯算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

7.7.4　向量场的环流量与旋度

设有向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}.$$

其中函数 P,Q,R 均连续, C 为 $\boldsymbol{A}$ 的定义域内的一条逐段光滑的有向闭曲线, 则曲线积分

$$I=\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿曲线 C 的环流量. 积分 I 又可以写成

$$I=\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$.

当 $\boldsymbol{A}$ 是一个静力场时, 其环流量 I 是 $\boldsymbol{A}$ 沿曲线 C 作用一周时所做的功. 当 $\boldsymbol{A}$ 是一个流速场时,$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}S$(其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是 C 在点 (x,y,z) 处的单位切向量) 是曲线 C 上一点处的流速在切线方向的投影乘以相应的弧微分. 因此, 在流速场中沿一条有向闭曲线 C 的环流量 I 是流速沿曲线切线方向投影的代数和. 它的物理意义是流速场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线 C 整体上看是否旋转. 如果环流量 I 不为零, 则说明流速场沿着闭曲线 C 有旋转.

为了说明向量场在每一点附近的旋转情况, 我们引入旋度的概念.

设闭曲线 C 为某一曲面 S 的边界, 那么由斯托克斯公式有

$$I=\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S.$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为 S 的法向量的方向余弦.

我们称向量

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的**旋度**, 记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$, 即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

利用向量微分算子 ∇, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

用 σ_S 表示曲面 S 的面积, 并令 S 收缩成给定的点 M, 即 $\sigma_S\to 0$. 应用曲面积分中值定理可得

$$\lim_{\sigma_S\to 0}\frac{\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}r}{S}=\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]_M$$

$$= \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}.$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 为有向曲面 S 在点 M 的法向量的方向余弦. 这个公式给出了向量 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 在任意方向 $\boldsymbol{n}$ 上的投影的定义, 很明显, 它与坐标系的选择无关.

向量的旋度有几个简单而重要的性质.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为向量场,u 为数量场,C 为常数, 则有

(1) $\mathrm{rot}(C\boldsymbol{A})=C\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$;

(2) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\pm\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$;

(3) $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{A})=u\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}u\times\boldsymbol{A}$;

(4) $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$;

(5) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=\boldsymbol{0}$;

(6) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})=0$.

建议读者自己完成这些性质的证明.

7.7.5　有势场

如果构成一个向量场的向量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 是某一数量场 $u=f(x,y,z)$ 的梯度, 即 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\mathrm{grad}f$, 这样的向量场称为**有势场**(或**位势场**, **保守场**), 而函数 $f(x,y,z)$ 称为场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 的**势函数** (**位函数**). 并非所有向量场都是有势场, 因此有必要来研究一个向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 为有势场的充分必要条件. 从关系式

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\mathrm{grad}f$$

知

$$P(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad Q(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y},\qquad R(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

因此, $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$ 为函数 $f(x,y,z)$ 的全微分. 但要它是一个函数的全微分, 充要条件是 (这里所考虑的是单连通区域):

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0,$$

即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

因此, 向量场 $\boldsymbol{A}$ 为有势场的充分必要条件是 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$. 如果向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 处处为零, 则称向量场 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场. 因此, 有势场为无旋场.

若向量场 $\boldsymbol{A}$ 既是无源场, 又是无旋场, 则称向量场 $\boldsymbol{A}$ 为调和场.

定理 7.7.1　调和场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数 $u=f(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

我们称这样的函数为调和函数.

证明 因为 A 为无旋场, 所以存在势函数 $u=f(x,y,z)$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

又 $\boldsymbol{A}$ 为无源场, 所以 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$. 即

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$ □

习题 7.7

1. 已知场 $v(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, 求沿场 $v(x,y,z)$ 的梯度方向的方向导数.
2. 证明:
   (1) $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{A})=u\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}u\times\boldsymbol{A}$; (2) $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$.
3. 证明: 向量场 $\boldsymbol{A}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ 是有势场, 并求势函数.
4. 证明: 场 $\boldsymbol{A}=f(|\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{r}$ 是一有势场, 其 $\boldsymbol{r}$ 表示向量 $\overrightarrow{OM}$ 即 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, f 是连续函数.
5. 已给数量场 $u=\ln\dfrac{1}{r}$, 其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, 求在空间中有哪些点, 使得等式: $|\mathrm{grad}u|=1$ 成立.
6. 求向量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}$ 沿螺线 $\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段所做的功.
7. 求向量 $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$($c$ 为常数) 的环流量:
   (1) 沿圆周 $x^2+y^2=1$, $z=0$; (2) 沿圆周 $(x-2)^2+y^2=a^2$, $z=0$.
8. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度:
   (1) $\boldsymbol{A}=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(y-2x)\boldsymbol{k}$;
   (2) $\boldsymbol{A}=(z+\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{j}$.
9. 证明: $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$.
10. 设 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)$.