第 8 章　无 穷 级 数

技巧性强

无穷级数是微积分理论的发展与应用, 它是研究函数及数值计算的一个重要工具, 本章先讨论常数项级数, 然后讨论函数项级数.

8.1　常数项级数

8.1.1　常数项级数的概念

给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots,$$

形如

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{8.1.1}$$

的和式称为**(常数项) 无穷级数**, 简称为**(常数项) 级数**, 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots .$$

其中 u_n 称为级数的**通项**. 上面的和式仅仅是形式上的相加. 这样的加法是否有意义, 我们需要进一步讨论. 为此, 我们引入部分和的概念.

作级数 (8.1.1) 的前 n 项的和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

S_n 称为级数 (8.1.1) 的前 n 项的**部分和**. 我们得到一个新的数列 $\{S_n\}$, 这个数列称为级数 (8.1.1) 的**部分和数列**.

定义 8.1.1 (级数的敛散性)　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**, 极限 S 称为这个级数的**和**, 记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots .$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限. 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

部分和的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在 or 余项的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} |r_n| = 0$

显然, 当级数 (8.1.1) 收敛时, 其部分和 S_n 是级数和 S 的近似值, 它们之间的差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数 (8.1.1) 的**余项**. 用近似值 S_n 代替和 S 所产生的误差是这个余项的绝对值, 即误差为 $|r_n|$.

从上面的讨论可知, 级数与数列有着密切的联系, 给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 我们就可以得到一个部分和数列 $\{S_n\}$, 反之给定数列 $\{S_n\}$, 就有以 $\{S_n\}$ 为部分和数列的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 事实上, 只需取 $u_1 = S_1, u_n = S_n - S_{n-1} (n \geqslant 2)$. 按定义, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与数列 $\{S_n\}$ 同时收敛或同时发散, 且在收敛时有

同时敛散

P级数判别：分析级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，找P使得 $\frac{u_n}{\frac{1}{n^p}} \to A$ (A为常数且A≠0)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

例 8.1.1 讨论等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的收敛性. 其中 $a \neq 0$, q 叫做级数的**公比** (这个级数又称为**几何级数**).

解 如果 $|q| \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$. 从而 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$. 因此, 此时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛到 $\dfrac{a}{1-q}$.

当 $|q| > 1$ 时, $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$. 这时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

如果 $|q| = 1$, 则当 $q = 1$ 时, $S_n = na \to \infty$. 因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

当 $q = -1$ 时, $S_{2k-1} = a$, $S_{2k} = 0 (k = 1, 2, \cdots)$. 从而 S_n 的极限不存在. 因此, 此时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

综上所述, 我们可得: 如果 $|q| < 1$, 则等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛于 $\dfrac{a}{1-q}$. 如果 $|q| \geqslant 1$, 则等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散. □

例 8.1.2 判断级数

$$(1+1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}}\right) + \cdots$$

的敛散性. 若收敛, 求其和.

解

$$\begin{aligned}S_n &= (1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)\\ &=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)\\ &=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}.\\ \lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

因此, 这个级数收敛, 其和为 $\frac{7}{2}$. □

例 8.1.3　判断级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的敛散性. 若收敛, 求其和.

解　因为

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

所以

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\ &=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

因此, 这个级数收敛, 其和为 1. □

8.1.2　收敛级数的基本性质

由级数收敛的定义, 我们可以推出收敛级数的基本性质.

定理 8.1.1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, k 为任一常数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 亦收敛, 并且有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证明　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和为 S, 并设

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\ \ \sigma_n=ku_1+ku_2+\cdots+ku_n.$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} kS_n = k \lim_{n\to\infty} S_n = kS.$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = kS.$ □

定理 8.1.2 若两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 并且

一个收敛一个发散, 等式仍成立.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 τ_n, s_n, σ_n. 再设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$, 则

原级数收敛 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 加括号收敛.

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} (s_n \pm \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s \pm \sigma.$$ □

定理 8.1.3 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对这级数的项任意加括号所成的级数

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + \cdots + u_{i_n}) + \cdots$$

仍收敛, 且其和不变.

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$. 加括号后的级数的部分和数列为 $\{A_n\}$, 则有

$$\begin{aligned}
&A_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1},\\
&A_2 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2},\\
&\cdots\cdots\\
&A_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2})\\
&\qquad + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + \cdots + u_{i_n}) = S_{i_n}.
\end{aligned}$$

可见, $\{A_n\}$ 实际上是 $\{S_n\}$ 的一个子数列, 故由 $\{S_n\}$ 的收敛性立即可得 $\{A_n\}$ 也收敛, 且其极限值相同. 任一收敛数列的子数列仍收敛. □

注 加括号后的级数收敛, 不能断言原来未加括号的级数也是收敛的, 例如, 级数

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

收敛于零, 但级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

是发散的.

由定理 8.1.3 可得到下面的结论: 如果加括号后所成的级数发散, 则原来级数也发散. 事实上, 如果原来级数收敛, 则根据定理 8.1.3 知道, 加括号后所成的级数也应收敛.

定理 8.1.4 (级数收敛的必要条件)　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

证明　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 和为 S, 则　通项一定趋于0。

证明技巧: $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_n$ … 再放缩.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$ □

注　一般项 u_n 趋于零只是级数收敛的必要条件, 但不是充分条件. 例如, **调和级数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

虽然它的一般项 $u_n=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$, 但它是发散级数. 我们用反证法证明.

反设调和级数收敛, 设它的部分和为 S_n, 则 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}=S$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0.$$

但另一方面

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ 项}}=\frac{1}{2}.$$

故 $S_{2n}-S_n\not\to 0(n\to\infty)$, 矛盾! 这个矛盾说明调和级数发散.

定理 8.1.4 虽然不是级数收敛的充分条件, 但它在判断一个级数是否收敛的问题中仍起相当大的作用, 当我们考察一个级数是否收敛时, 我们首先考察这个级数的一般项 u_n 是否趋于零. 如果 u_n 不趋于零, 那么立即可以断定这个级数是发散的. 例如, 对于级数

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}+\cdots,$$

因为 $u_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ 当 $n\to\infty$ 时, 不趋于零. 所以该级数发散.

定理 8.1.5　在级数中去掉、加上或改变有限项, 不会改变级数的敛散性.　补 | 改变部分项再判断

证明　我们只需证明 "去掉级数前面部分的有限项或在级数前面加上有限项, 不会改变级数的敛散性". 因为其他情形 (即在级数中任意去掉、加上或改变有限项的情形) 都可以看成去掉级数前面的有限项, 然后在级数前面再加上有限项的结果.

设将级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$$

的前 k 项去掉, 则得级数

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots,$$

于是新级数的部分和为

$$\sigma_n=u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}=S_{n+k}-S_k.$$

其中 S_{k+n} 是原级数前 $k+n$ 项的和. 因为 S_k 是常数, 所以 σ_n 与 S_{k+n} 同时收敛或发散. 类似地, 可以证明在级数的前面加上有限项, 不会改变级数的敛散性. □

下面的柯西收敛原理是判断级数是否收敛的基本原理.

无法求出和式，级数极限未知.

定理 8.1.6 (柯西收敛原理) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 对于任意的正整数 p, 都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$ $\forall \varepsilon, \forall p, \exists N$

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n. 因为

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n|,$$

所以由数列的柯西收敛原理立得. □

例 8.1.4 利用柯西收敛原理判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解 因为对任何自然数 p,

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \quad \text{放缩} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

于是对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 对于任何自然数 p, 总有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

由柯西收敛原理知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. □

习题 8.1

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 是否收敛?

2. 写出下列级数的部分和, 并讨论其收敛性:

   (1) $\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$;

   (2) $\frac{1}{1 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \cdots$;

   (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

   (4) $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{6} + \cdots$.

3. 判断下列级数是否收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{7^n}{9^n}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$;　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 9}{2}\right)^n$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{\frac{1}{n}}, (0<a<1)$.

4. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{7}{10^n}\right)$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$, $m\in\mathbb{N}$ 是常数.　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

5. 利用柯西收敛原理判断下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$;　(4) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

8.2　正 项 级 数

每一项都是非负的级数称为**正项级数**, 即若 $u_n\geqslant 0\,(n=1,2,\cdots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为正项级数, 这一节专门考虑正项级数的收敛问题.

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,(u_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots)$ 的部分和为 S_n, 显然

单调有界

$$S_1\leqslant S_2\leqslant S_3\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots,$$

即 $\{S_n\}$ 为单调增加数列. 如果 $\{S_n\}$ 具有上界, 即存在 $M>0$ 使得 $S_n\leqslant M\,(n=1,2,\cdots)$. 根据单调有界数列必有极限的准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S, 知 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. 根据收敛数列必为有界数列的性质知, 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界. 因此, 我们得到下面的基本定理.

定理 8.2.1 (基本定理)　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

Theorem (比较判别法的推论)

设$a_n > 0, b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. 则

(1) 当级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

Hint: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \iff \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_n}$.

根据这一基本定理, 我们立即可得到关于正项级数的比较判别法.

定理 8.2.2 (比较判别法) 如果两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的一般项满足关系 $u_n \leqslant v_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则:

(1) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛. 大收敛→小收敛

(2) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散. 小发散→大发散

证明 (1) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于和 σ, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leqslant \sigma.$$ 单调有界

由定理 8.2.1 知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 用反证法, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 由 (1) 的结论知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 这与 (2) 的假设矛盾. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散. □

推论 8.2.3 若存在正整数 N 及常数 $C > 0$ 使得

乘了一个常数

$$0 \leqslant u_n \leqslant C v_n \qquad (n \geqslant N)$$

成立, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛; 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例 8.2.1 讨论p-级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的收敛性, 其中常数 $p > 0$.

$p \le 1$, 小发散→大发散

解 当 $p \leqslant 1$ 时, $\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$, 而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 因此, 根据比较判别法知, 当 $p \leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散. 当 $p > 1$ 时, 因为当 $k - 1 \leqslant x \leqslant k$ 时, 有 $\frac{1}{k^p} \leqslant \frac{1}{x^p}$, 所以

积分的转化.

$$\frac{1}{k^p} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^p} \mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x \qquad (k = 2, 3, \cdots),$$

从而, p-级数的部分和

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x$$
$$= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1} \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

这说明数列 $\{S_n\}$ 有界, 因此, 当 $p>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛.

综上所述, 我们有 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散. □

例 8.2.2　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的.

证明　因为 $n(n+1)<(n+1)^2$, 所以 $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\dfrac{1}{n+1}$. 而级数

$\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \dfrac{1}{n+1}$

调和级数的一部分
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

小发散→大发散.

发散, 根据比较判别法, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的. □

有限倍速敛散性相同.

定理 8.2.4 (比较判别法的极限形式)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数,

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l\quad(0\leqslant l<+\infty)$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l>0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明　(1) 由极限的定义知, 对于 $\varepsilon=1$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $\dfrac{u_n}{v_n}<l+1$. 即 $u_n<(l+1)v_n$. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 根据推论 8.2.3 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.　$\left|\dfrac{u_n}{v_n}-1\right|<\varepsilon$

(2) 由已知条件知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}$ 存在, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则由结论 (1) 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛, 但已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 因此, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散. □

例 8.2.3　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 的收敛性.　等价无穷小：调和级数

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散. 由定理 8.2.4 知原级数也发散. □

例 8.2.4　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.　等价无穷小：p级数 (p=2).

解　因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}}=1,$$
而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ 收敛. □

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n^\alpha(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$

次数: $n^{\alpha+\frac{1}{2}}$

分子有理化

例 8.2.5 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}}{\dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=2.$$

而当 $\alpha+\frac{1}{2}>1$ 即 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 收敛. 所以当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时, 原级数收敛.

当 $\alpha+\frac{1}{2}\leqslant 1$, 即 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 发散. 故当 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 原级数发散. □

利用比较判别法, 将要判定的级数与几何级数比较, 可以得到下面两个很有用的判别法.

定理 8.2.5 (达朗贝尔 (d′Alembert*) 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数, 如果

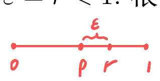
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛; $\rho>1$ (或 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$) 时级数发散; $\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

达朗贝尔判别法也称为**比值判别法**.

证明 (1) 当 $\rho<1$ 时, 取一个充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 $\rho+\varepsilon=r<1$. 根据极限定义, 存在正整数 N, 当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r.$$



因此

$$u_{N+1}<ru_N,u_{N+2}<r^2u_N,\cdots$$
$$u_{N+k}<r^ku_N,\cdots$$

大收敛→小收敛

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}r^ku_N$ 为公比 $r<1$ 的几何级数, 从而收敛. 根据定理 8.2.2 的推论, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho>1$ 时, 取一个充分小的 $\varepsilon>0$, 使得 $\rho-\varepsilon>1$. 根据极限定义, 存在正整数 N, 当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon>1.$$

Theorem (拉阿贝(Raabe)判别法)

设 $a_n>0$, $\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=p$, 则

(1) 当 $p>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 当 $p<1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

Hint: $\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq 1+\frac{p_1}{n}\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p_2}=\frac{1/n^{p_2}}{1/(n+1)^{p_2}}$, $1<p_2<p_1<p$.

从而

$$u_{n+1}>u_n>u_{n-1}>\cdots>u_N>0.$$

因此, u_n 的极限不可能为零. 根据级数收敛的必要条件知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

* 达朗贝尔 (d′Alembert J L R, 1717~1783), 法国数学家.

类似地, 可以证明当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(3) 当 $\rho=1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例如, 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 及级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 都有 $\rho=1$. 但前者收敛, 后者发散. □

例 8.2.6　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^s}(s>0,a>0)$ 的敛散性.　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^s}$

解　因为 $u_n=\dfrac{a^n}{n^s}$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}\cdot\frac{n^s}{a^n}=a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=a.$$

因此, 当 $a<1$ 时, 级数收敛. 当 $a>1$ 时, 级数发散. 而 $a=1$ 时, 根据例题 8.2.1 知 $s\leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ 发散; 当 $s>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ 收敛. p级数 □

例 8.2.7　证明级数

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots$$

是收敛的.

证明　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1,$$

由达朗贝尔判别法知级数收敛. □

例 8.2.8　判断级数

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\cdots+\frac{n!}{10^n}+\cdots$$

的敛散性.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=+\infty,$$

根据达朗贝尔判别法知级数发散. □

定理 8.2.6 (柯西判别法)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数, 如果

开n次方根

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛; 当 $\rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$) 时级数发散; 当 $\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

柯西判别法也称为**根值判别法**.

证明　(1) 给定 $\varepsilon>0$ 使得 $\rho+\varepsilon=r<1$, 对于这个给定的 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得当 $n\geqslant N$ 时

$$\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon=r,$$

即 $u_n < r^n (n \geqslant N)$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛. 因此, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2)$\rho > 1$, 则存在充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $r = \rho - \varepsilon > 1$, 对于这个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时

$$\sqrt[n]{u_n} > \rho - \varepsilon = r > 1,$$

即 $u_n > r^n > 1$. 因此, 当 n 趋于无穷时, u_n 的极限不能为零.

由级数收敛的必要条件知此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 当 $\rho = 1$ 时级数可能收敛, 也可能发散. 例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. 这两个级数都有 $\rho = 1$, 但前者收敛, 后者发散. □

例 8.2.9　考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n (x \geqslant 0)$ 的敛散性.

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n} = x$. 根据柯西判别法, 当 $x < 1$ 时级数收敛, 当 $x > 1$ 时级数发散. 当 $x = 1$ 时级数为 $1 + 1 + 1 + \cdots$, 显然是发散的. 所以, 原级数当 $x < 1$ 时收敛, $x \geqslant 1$ 时发散. □

例 8.2.10　考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n-1}{5n+2}\right)^n$ 的敛散性.

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{3n-1}{5n+2}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{5n+2} = \dfrac{3}{5} < 1$. 根据柯西判别法, 级数收敛. □

定理 8.2.7 (柯西积分判别法)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若存在一个连续的单调减少的正值函数 $f(x)$, 使得

$$u_n = f(n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性.

证明　由于

$$u_{k-1} = \int_{k-1}^{k} u_{k-1}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{k-1}^{k} u_k\,\mathrm{d}x = u_k,$$

所以

$$\sum_{k=2}^{n} u_{k-1} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=2}^{n} u_k.$$ (夹逼定理)

由此即得证明. (如图 8.1 所示, 上述不等式中, $\sum\limits_{k=2}^{n} u_{k-1}$ 为曲线上方矩形面积之和, $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k$ 为曲线下方矩形面积之和, 而 $\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ 为曲边梯形的面积) □

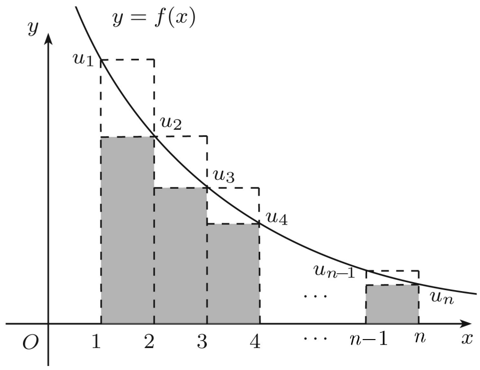


图 8.1

例 8.2.11　证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛.

证明　因为

$(\ln \ln x)' = \frac{1}{x \ln x} + C.$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \lim_{A \to +\infty} (\ln \ln A - \ln \ln 2) = +\infty,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散. 又

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A} \right) = \frac{1}{\ln 2},$$

所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛.

Stirling 公式：

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51480n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \cdots \right)$$

习题 8.2

1. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{4^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^3+1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+a^n}$　$(a > 0)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+4n-3}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n^2+3n+1)^{\frac{n+2}{2}}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{4^n}$.

2. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3n^2}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^n}$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$;

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$;

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(12) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\quad(p>0)$;

(13) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$;

(14) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}\quad(p>0,q>0)$;

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0,b>0$.

3. 证明: 若正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 也收敛, 反之不一定成立, 试举例说明.

4. 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 均收敛, 证明下列级数均收敛.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$; $<\dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$;　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. a_n　b_n.

5. 若正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散, 问下列级数是否发散?

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$;　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$;　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$.

6. 设有 $\alpha>0$ 使得 $\ln\dfrac{1}{a_n}\geqslant(1+\alpha)\ln n\,(n\geqslant N)$, 其中 $a_n>0$, 试证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

7. 讨论实数 p 为何值时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^p$ 收敛, 实数 p 为何值时, 级数发散.

8. 讨论实数 p 为何值时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ 收敛, 实数 p 为何值时, 级数发散.

8.3　任意项级数

这一节我们来讨论正负项可以任意出现的级数的收敛问题. 首先讨论一类特殊的任意项级数 —— 交错级数.

8.3.1　交错级数

凡正负相间的级数, 也就是形如

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$$

的级数, 其中 $u_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$, 称为**交错级数**.

对于交错级数, 我们有下面常用的判别法.

必考

定理 8.3.1 (莱布尼兹定理)　如果一个交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ $(u_n > 0, n = 1, 2, 3, \cdots)$ 的一般项满足下列条件:

(1) $u_n \geqslant u_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$;　单减趋于0必收敛

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛, 其余项 r_n 的符号与余项第一项 $(-1)^{n+2}u_{n+1}$ 的符号相同, 并且 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

证明　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 的部分和为 S_n, 我们来考察由偶数项所组成的部分和数列 $\{S_{2m}\}$ 及由奇数项所组成的部分和数列 $\{S_{2m+1}\}$,

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}),$$
$$S_{2m+1} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) + u_{2m+1}.$$

由条件 (1), 即 $u_{n-1} - u_n \geqslant 0(n = 1, 2, \cdots)$ 知 $\{S_{2m}\}$ 为单调增加的数列. 另一方面

$$0 \leqslant S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \leqslant u_1.$$ 加括号

因此 $\{S_{2m}\}$ 是单调有界数列, 故 $\{S_{2m}\}$ 极限存在.　单增有上界

设

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

而

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1},$$

由条件 (2) 知 $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$. 因此

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S.$$

因为

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛于 S, 并且 $0 \leqslant S \leqslant u_1$.

最后, 余项 r_n 可以写成

$$r_n = (-1)^{n+2}(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots),$$
$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots.$$

上式右端是一个交错级数, 它也满足收敛的两个条件. 根据前面的结论有

$$0 \leqslant u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leqslant u_{n+1},$$

从而

$$-u_{n+1} \leqslant -(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots) \leqslant 0.$$

即余项 r_n 的符号与余项中第一项的符号相同. 并且 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$. □

例如级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

是一交错级数, 满足条件

(1) $u_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

所以它是收敛的. 其和 $S < 1$. 如果用前 n 项的部分和

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

作为 S 的近似值, 所产生的误差 $|\, r_n \,| < \dfrac{1}{n+1}$.

8.3.2 绝对收敛与条件收敛

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项的绝对值所构成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, u_n \,|$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, u_n \,|$ 发散, 则称级数为**条件收敛**. 条件收敛的级数是存在的, 例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ 就是一个条件收敛级数.

绝对收敛和收敛之间有着下面重要关系.

定理 8.3.2 绝对收敛级数必为收敛级数, 但反之不然.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛级数, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, u_n \,|$ 收敛. 令

构造绝对值 $$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |\, u_n \,|), \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

大收敛→小收敛

显然 $0 \leqslant v_n \leqslant |\, u_n \,|$, 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 也收敛. 而 $u_n = 2v_n - |\, u_n \,|$, 由收敛级数的基本性质有

— 基本运算后仍收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |\, u_n \,|.$$

收敛 ⇐ 收敛 − 收敛

因此, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. □

上述证明中引入的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, 其一般项

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |\,u_n\,|) = \begin{cases} u_n, & u_n > 0, \\ 0, & u_n \leqslant 0. \end{cases}$$

类似地, 令

$$w_n = \frac{1}{2}(|\,u_n\,| - u_n) = \begin{cases} 0, & u_n > 0, \\ -u_n, & u_n \leqslant 0. \end{cases}$$

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 均收敛, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$. 如果级数条件收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 均发散.

定理 8.3.2 说明, 对于一般级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 如果它绝对收敛, 则它收敛. 但要特别注意的是, 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\,u_n\,|$ 发散时, 我们不能断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散. 但是, 如果我们应用达朗贝尔判别法和柯西判别法判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\,u_n\,|$ 为发散时, 我们可以断言级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散. 这是因为利用达朗贝尔判别法和柯西判别法来判定正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\,u_n\,|$ 为发散时, 是由于这个级数的一般项 $|\,u_n\,|$ 不趋于零, 因此对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 它的一般项 u_n 当 $n \to \infty$ 时也不会趋于零, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是发散的.

例 8.3.1　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n} (x > 0)$ 的敛散性. 函数项级数

解　考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{x^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$ 绝对收敛 → 收敛

因为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt[n]{n}} = x,$$ 与 1 比较

由柯西判别法知当 $x < 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 收敛, 而当 $x > 1$ 时级数发散.

因此可以断言:

当 $x < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ 绝对收敛.

当 $x > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ 发散. ($\frac{x^n}{n} \to \infty$)

调和级数

而当 $x=1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|$ 发散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 故为条件收敛. □

例 8.3.2 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 的敛散性.

解 因为 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 收敛. 从而级数

有界：大收敛→小收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 也收敛, 且绝对收敛. □

步骤：绝对收敛→条件收敛

下面我们讨论绝对收敛级数的性质.

定理 8.3.3 绝对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**更序级数**(即改变一般项的位置后所构成的级数)

重新排序

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'$ 仍为绝对收敛级数, 且其和相同, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'$.

证明 (1) 我们先证明当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为收敛的正项级数的情形.

考虑更序级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'$ 的部分和 S_k'. 因为

$$u_1'=u_{n_1}, u_2'=u_{n_2}, \cdots, u_k'=u_{n_k},$$

取 n 大于所有 $n_1,n_2,\cdots,n_k$, 显然有

$$S_k'=u_1'+u_2'+\cdots+u_k' \leqslant u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=S_n.$$

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和为 S, 则 $S_n\leqslant S$, 于是对一切 k 都有 $S_k'\leqslant S$. 根据正项级数收敛的基本定理, 更序级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'$ 也收敛. 设其和为 S'. 故有 $S'\leqslant S$.

另一方面, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也可以看作级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'$ 的更序级数, 由刚才的讨论, 故有 $S\leqslant S'$, 因此 $S=S'$.

(2) 下面证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意绝对收敛级数的情形. 令

$$v_n=\frac{1}{2}(|u_n|+u_n), \quad w_n=\frac{1}{2}(|u_n|-u_n) \quad (n=1,2,\cdots)$$

显然有 $0\leqslant v_n\leqslant|u_n|$, $0\leqslant w_n\leqslant|u_n|$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 及级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 均收敛. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=V$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n=W$. 因为

$$u_n=v_n-w_n, \qquad |u_n|=v_n+w_n.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = V - W, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\, u_n \,| = V + W.$$

由 (1) 已经证明的结论知道, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, u_n \,|$ 的更序级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n'|$ 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n'| = V + W.$$

这就表明更序级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 是绝对收敛的.

再设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n'$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n'$ 分别为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 的相应的更序级数. 由 (1) 的结论知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n' = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = V, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n' = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = W.$$

而 $u_n' = v_n' - w_n'$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n' - w_n') = V - W = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

这样就证明了定理. □

注　对于绝对收敛的级数, 可以任意交换其各项的次序, 而不影响它的和, 这与有限项相加之和的性质相同. 但这个定理对条件收敛级数而言, 却不一定成立. 例如, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$ 是条件收敛的, 设其和为 S, 考虑该级数的一个更序级数

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots .$$

分别用 S_n 和 σ_n 表示这两个级数的部分和, 则

$$\begin{aligned}\sigma_{3m} &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2} S_{2m} \to \frac{1}{2} S \quad (m \to \infty).\end{aligned}$$

又不难得到

$$\sigma_{3m+1} = \sigma_{3m} + \frac{1}{2m+1} \to \frac{1}{2} S \quad (m \to \infty).$$

$$\sigma_{3m+2} = \sigma_{3m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{4m+2} \to \frac{1}{2} S \quad (m \to \infty).$$

因此, 我们有 $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \dfrac{1}{2} S$, 即更序级数收敛于 $\dfrac{S}{2}$.

在给出绝对收敛级数的另一个性质前, 我们来讨论级数的乘法运算.

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 仿照有限项之和相乘的规则, 作出这两个级数的项所有可能的乘积 $u_iv_j(i,j=1,2,\cdots)$, 这些乘积是

$$
\begin{gathered}
u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, \cdots, u_1v_j, \cdots, \\
u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, \cdots, u_2v_j, \cdots, \\
u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3, \cdots, u_3v_j, \cdots, \\
\cdots\cdots \\
u_iv_1, u_iv_2, u_iv_3, \cdots, u_iv_j, \cdots, \\
\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

这些乘积可以用很多的方式将它们排列成一个数列, 例如可以按 “对角线法” 或按 “正方形法” 将它们排列成下面形状的数列.

对角线法　反对角线

$$
\begin{array}{ccccccccc}
u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & & u_1v_4 & & \cdots, \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
u_2v_1 & & u_2v_2 & & u_2v_3 & & u_2v_4 & & \cdots, \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
u_3v_1 & & u_3v_2 & & u_3v_3 & & u_3v_4 & & \cdots, \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
u_4v_1 & & u_4v_2 & & u_4v_3 & & u_4v_4 & & \cdots, \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots.
\end{array}
$$

正方形法

$$
\begin{array}{ccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 & \cdots, \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & u_2v_4 & \cdots, \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & u_3v_4 & \cdots, \\
u_4v_1 & u_4v_2 & u_4v_3 & u_4v_4 & \cdots, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots.
\end{array}
$$

对角线法: $u_1v_1; u_1v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_2, u_3v_1; \cdots$.

正方形法: $u_1v_1; u_1v_2, u_2v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_3, u_3v_3, u_3v_2, u_3v_1; \cdots$.

将上面排好的数列用加号相连, 就得到一个无穷级数. 我们称按 “对角线法” 排列所组成的级数

下标和　2　3　…　n+1　…

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \cdots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_nv_1) + \cdots$$

为两级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的**柯西乘积**.

定理 8.3.4 (柯西定理)　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆绝对收敛, 其和分别为 s 和 σ. 则它们各项之积 $u_iv_j(i,j=1,2,3,\cdots)$ 按照任何方法排列所构成的级数也绝对收敛, 且其和为 $s\sigma$.

证明　用 $w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n, \cdots$ 来表示按某一种次序排列 $u_i v_j (i, j = 1, 2, 3, \cdots)$ 所成的一个数列. 考虑级数

$$|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| + \cdots.$$

设 s_n^* 是它的部分和

$$s_n^* = \sum_{k=1}^{n} |w_k| = \sum_{k=1}^{n} |u_{n_k} v_{m_k}|.$$

记

$$\mu = \max(n_1, n_2, \cdots, n_n, m_1, m_2, \cdots, m_n).$$

又记

$$\begin{aligned} U_\mu^* &= |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_\mu|, \\ V_\mu^* &= |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_\mu|. \end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆绝对收敛. 设 $U^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, $V^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n|$, 则有 $U_\mu^* \leqslant U^*$, $V_\mu^* \leqslant V^*$, 从而有

$$\begin{aligned} s_n^* &= |u_{n_1} v_{m_1}| + |u_{n_2} v_{m_2}| + \cdots + |u_{n_n} v_{m_n}| \\ &\leqslant (|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_\mu|)(|v_1| + |v_2| + \cdots + |v_\mu|) \\ &= U_\mu^* V_\mu^* \leqslant U^* V^*. \end{aligned}$$

由正项级数收敛的基本定理, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 绝对收敛. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 的更序级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n'$ 也绝对收敛, 并且它们的和数相同, 也即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n'$. 也就是说, 由 $u_i v_j (i, j = 1, 2, \cdots)$ 按任何方式排列所构成的级数都绝对收敛, 并且都收敛于同一和数.

下面再证明这个和数就是 $s\sigma$.

考虑由正方形法排列所构成的级数, 并加括号如下

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = {} & u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1) \\ & + (u_1 v_3 + u_2 v_3 + u_3 v_3 + u_3 v_2 + u_3 v_1) + \cdots. \end{aligned}$$

由收敛级数的性质知, 加括号后并不影响和的数值.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 A_n, 则 $A_n = s_n \sigma_n$ 于是

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} (s_n \sigma_n) = s \cdot \sigma.$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s \cdot \sigma$. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = s \cdot \sigma$.　□

下面我们给出两个有效的任意项级数收敛性的判别法 (略去证明) .

定理 8.3.5 (阿贝尔判别法) 如果:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛; (1)条件更强

(2) 数列 $\{a_n\}$ 单调有界,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 8.3.6 (狄利克雷判别法) 如果:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 单调趋于零, (2)条件更强

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

发现 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 中 $\frac{1}{n} \to 0$.
故用狄利克雷判别法.
只需证部分和数列有界.

例 8.3.3 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ 收敛而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n}$ 发散.

证明 因为数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调趋于零, 而

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

步长的一半

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos k\right| = \boxed{\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}}\left|\sum_{k=1}^{n} 2\cos k \sin\frac{1}{2}\right|$$

积化和差

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2} - \sin\frac{2k-1}{2}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{2n+1}{2} - \sin\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}},$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n$ 的部分和有界. 由狄利克雷判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ 收敛.

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}.$$ 同乘 sin 1 (步长的一半)

与上面的证明类似, 可以知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{2n}$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ 发散. 一个发散级数与一个收敛级数逐项相加所得的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n}$ 必发散. □

习题 8.3

1. 判断下列级数是否收敛? 条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{3}{10^3} + \dfrac{1}{2^3} - \dfrac{3}{10^5} + \cdots$; (2) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5!} - \cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\ln n}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^3}{2^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)^2}$;　(6) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}(x\neq 0)$;　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(9) $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1})$;　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$;　(12) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{3^{n^2}}$;

(13) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\sin n}{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}$;　(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+\sin n}$.

2. 判别下列级数的敛散性 (绝对收敛、条件收敛或发散).

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-n\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}\right)$;　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

3. 设常数 $a>0$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ 的敛散性 (绝对收敛、条件收敛或发散).

4. 设 θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 为一常数, $p>0$. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^p}$ 的敛散性 (绝对收敛、条件收敛或发散).

5. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}(p>0)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}u_n$ 均收敛.

6. 证明: 将收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 重排后的级数

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}+\cdots$$

发散 (提示: 先证明 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 发散, 其中 $u_k=\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}$).

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是否也收敛? 试说明理由.

8. 设 $a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明:

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛;

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

9. 设 $x_{2n-1}=\frac{1}{n}, x_{2n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, $(n=1,2,\cdots)$,

(1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 收敛;

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n=A$, $y_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

8.4 函数项级数

8.4.1 函数项级数的收敛与一致收敛

前面我们讨论了常数项级数, 即级数的每一项都是常数, 这一节我们将讨论函数项级数, 即级数的每一项都是 x 的函数. 如果给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \cdots, u_n(x), \cdots,$$

则形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{8.4.1}$$

称为定义在区间 I 上的**函数项级数**.

对于每一个确定的值 $x_0 \in I$, 函数项级数 (8.4.1) 成为常数项级数.

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots. \tag{8.4.2}$$

如果常数项级数 (8.4.2) 收敛, 则称函数项级数 (8.4.1)**在 x_0 收敛**, 点 x_0 称为函数项级数 (8.4.1) 的**收敛点**. 如果级数 (8.4.2) 发散, 就称点 x_0 是函数项级数 (8.4.1) 的**发散点**. 函数项级数 (8.4.1) 收敛点的全体称为它的**收敛域**, 发散点的全体称为它的**发散域**.

对于收敛域内的任一点 x, 函数项级数成为一收敛的常数项级数, 因而有一确定的和数 S. 这样, 在收敛域上, 函数项级数的和是 x 的函数 $S(x)$, 通常称 $S(x)$ 为函数项级数的和函数. 级数 (8.4.1) 的收敛域就是这个函数的定义域, 并写成

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots.$$

记函数项级数 (8.4.1) 前 n 项的部分和为 $S_n(x)$, 则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

这时称

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的余项, 并有 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

例 8.4.1 函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

中每一项在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 但该函数项级数的收敛域为 $(-1, 1)$, 在收敛域内, 其和函数为 $\dfrac{1}{1-x}$. 即

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{x}{n})^n}{n^x}$$

敛散相同

$$\frac{\frac{(1+\frac{x}{n})^n}{n^x}}{\frac{1}{n^x}} = (1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}\cdot x} \to e^x \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

例 8.4.2　求级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

的收敛域与和函数.

解　级数的前 n 项的部分和为

$$S_n(x)=x^n, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

当 $|x|>1$ 时, $S_n(x)=x^n\to\infty(n\to\infty)$.

当 $x=-1$ 时, $S_n(-1)=(-1)^n$, 当 $n\to\infty$ 时, 无极限.

当 $|x|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$.

当 $x=1$ 时, $S_n(1)=1$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(1)=1$.

所以, 级数的收敛域为 $(-1,1]$, 和函数为 $S(x)=\begin{cases}0, & -1<x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$ □

从这个例子, 我们看到, 级数 $x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$ 中的每一项在实数域上都是连续函数, 但其和函数 $S(x)$ 在其定义域 $(-1,1]$ 上并不连续. 我们还可以举出这样的例子, 函数项级数的每一项的导数或积分所成级数的和不等于它的和函数的导数或积分.

这些说明利用级数进行这些运算时, 还需特别慎重, 不然就会导致错误的结果. 然而对什么级数, 能够从每一项的连续性得出和函数的连续性, 或从和函数的导数或积分得出每一项导数或积分所成级数的和呢? 要回答这个问题, 就需要引入下面的函数项级数的一致收敛的概念.

设函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

在区间 I 上收敛于和函数 $S(x)$. 这就意味着对于区间 I 上的每一个值 x_0, 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛于 $S(x_0)$, 即部分和数列 $S_n(x_0)=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(x_0)$ 收敛于 $S(x_0)\,(n\to\infty)$. 根据数列极限的定义, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 以及区间 I 上的每一个固定点 x_0, 都存在一个正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$|S(x_0)-S_n(x_0)|<\varepsilon.$$

即

$$|r_n(x_0)|=\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i(x_0)\right|<\varepsilon.$$

这个数 N 一般来说不仅依赖于 ε, 而且也依赖于 x_0, 我们记它为 $N(x_0,\varepsilon)$. 如果对于某一函数项级数能够得到这样一个正整数 N, 它只依赖于 ε 而不依赖于 x_0, 也就是对于区间 I 上的每一个点 x_0 都适用的 $N=N(\varepsilon)$. 对这类函数项级数, 我们称之为一致收敛, 这就是下面的定义.

定义 8.4.1 (函数项级数的一致收敛性) 设有函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε, 都存在一个只依赖于 ε 的自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 对于区间 I 上的一切 x, 都有不等式

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

成立, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上**一致收敛**于 $S(x)$, 也称函数列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$.

$\{S_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$ 的几何意义: 当 $n > N$ 时, 在区间 I 上所有曲线 $y = S_n(x)$ 将位于曲线

$$y = S(x) + \varepsilon$$

与

$$y = S(x) - \varepsilon$$

之间 (见图 8.2).

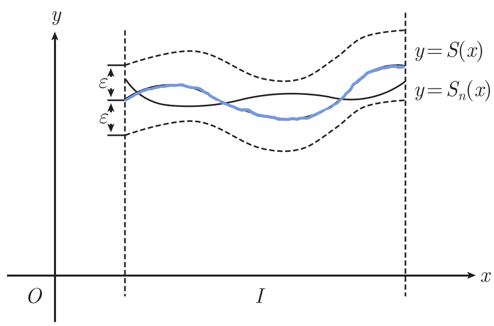


图 8.2

例 8.4.3 讨论下列函数项级数在所给区间是否一致收敛.

(1) $\dfrac{1}{x+1} + \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{x+n} - \dfrac{1}{x+n-1}\right) + \cdots, 0 \leqslant x < +\infty$;

(2) $x + (x^2 - x) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots, 0 < x < 1$.

解 (1) 级数的前 n 项的和 $S_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$, 因此级数的和

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0 \quad (0 \leqslant x < +\infty),$$

于是

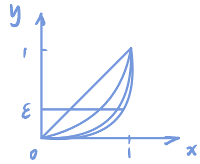
$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n} \quad (0 \leqslant x < +\infty).$$

对于任给 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 对于区间 $[0, +\infty)$ 上的任何 x 都有

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

因此, 所给函数项级数在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛于和函数 $S(x) \equiv 0$.

(2) 级数的前 n 项的和 $S_n(x)=x^n$, 因此级数的和



$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=0\quad(0<x<1),$$

即所给级数在区间 $(0,1)$ 内收敛于 $S(x)\equiv 0$, 但并不一致收敛. 事实上对于任意一个正整数 n, 取

$$x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\in(0,1).$$

于是

$$S_n(x_n)=x_n^n=\frac{1}{2},|\,r_n(x_n)\,|=|\,S(x_n)-S_n(x_n)\,|=\frac{1}{2},$$

所以, 对于 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$, 不论 n 多大, 在 $(0,1)$ 内总存在这样的点 x_n, 使得 $|\,r_n(x_n)\,|>\varepsilon$, 因此所给级数在 $(0,1)$ 内不一致收敛. 这表明虽然函数列 $S_n(x)=x^n$ 在 $(0,1)$ 内处处收敛于 $S(x)\equiv 0$, 但 $S_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内各点收敛于零的快慢程度是不一致的. 事实上, 要使 $|\,r_n(x)\,|=|S(x)-S_n(x)|=x^n<\varepsilon$, 可取 $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$, 这个 N 依赖于 x. 但可以证明级数在 $[0,C](0<C<1)$ 上是一致收敛的. □

上述例子说明一致收敛性与所讨论的区间有关. 下面介绍一个一致收敛的判别法.

定理 8.4.1 (魏尔斯特拉斯 (Weierstrass†) 判别法)　如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足: $|u_n(x)|\leqslant a_n(x\in I,n=1,2,\cdots)$, 且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

证明　由柯西收敛原理知对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 对任意的正整数 p, 都有

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而, 对任何 $x\in I$, 都有

$$\begin{aligned}&|\,u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\,|\\ \leqslant\,&|\,u_{n+1}(x)\,|+|\,u_{n+2}(x)\,|+\cdots+|\,u_{n+p}(x)\,|\\ \leqslant\,&a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

令 $p\to\infty$, 则得

$$|\,r_n(x)\,|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

因此函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛. □

定理中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 称为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**强级数**. 所以该判别法又称**强级数判别法**.

† 魏尔斯特拉斯 (Weierstrass K, 1815~1897), 德国数学家.

例 8.4.4 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{1}{3^n(1+x^2)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

证明 因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内有

$$\left| 2^n \sin \frac{1}{3^n(1+x^2)} \right| \leqslant 2^n \frac{1}{3^n(1+x^2)} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{1}{3^n(1+x^2)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛. □

8.4.2 一致收敛级数的性质*

一致收敛级数有以下基本性质.

一致收敛 + 每一项连续 → 和连续

定理 8.4.2 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上都连续, 则其和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续.

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 所以对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N$ 时, 对 $[a,b]$ 上的一切 x 都有

$$|S(x)-S_n(x)| = |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

故对于 $[a,b]$ 上一个固定的点 x_0, 也有 $|r_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 对于选定的 N, $S_{N+1}(x)$ 为在点 x_0 连续的函数, 故对于上面给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|S_{N+1}(x)-S_{N+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

因此, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时恒有

$$\begin{aligned}|S(x)-S(x_0)| \leqslant & |S(x)-S_{N+1}(x)| + |S(x_0)-S_{N+1}(x_0)| \\ & +|S_{N+1}(x)-S_{N+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $S(x)$ 在点 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知, $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. □

注 从定理的证明可以看到, 将定理中的闭区间换成开区间或半开半闭的区间, 定理依然成立.

一致收敛 + 每一项连续 → 积分号内移

定理 8.4.3 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以逐项积分, 即

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明　因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 由定理 8.4.2 知 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 因此 $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ 存在. 再由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一致收敛性知, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|\,S(x) - S_n(x)\,| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad x \in [a,b].$$

因此, 当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant &\int_a^b |\,S(x) - S_n(x)\,|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

由极限的定义, 有

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

每项导函数连续
原级数收敛
导级数一致收敛
$\Rightarrow$ 求导内移.

定理 8.4.4　如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$, $u_n(x)$ 的导函数 $u_n'(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且可逐项求导, 即

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \qquad x \in [a,b],$$

并且 $S'(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续.

证明　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 的和函数为 $\varphi(x)$, 即

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \qquad x \in [a,b]$$

在 $[a,b]$ 上任取一点 x, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 的一致收敛性及定理 8.4.3 知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在区间 $[a,x]$ 上可逐项积分, 即

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x) - u_n(a)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a). \end{aligned}$$

再由 $u_n'(x)$ 的一致连续性知 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 因此

$$S'(x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b). \qquad \square$$

①用莱布尼茨定理判断收敛.
②设 $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$.
③逐项求导 / 逐项积分、
④后面必须逐项积分 / 求导.

例 8.4.5 证明

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\qquad(-1<x<1).$$

莱布尼茨定理. 交错级数 $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=0$ $u_n-u_{n+1}>0$.

证明 ~~显然~~, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$ 在 $(-1,1)$ 内收敛. 设其和函数为 $S(x)$.

考虑级数通项的导数所组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

这个级数在 $(-1,1)$ 内不一致收敛, 为了应用定理 8.4.4, 我们考虑区间 $[-a,a](0<a<1)$. 显然 $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛, 因此, 由定理 8.4.4 有

$\boxed{\text{内闭一致性}}$

$(-a)^n\le(-x)^n\le a^n$ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛 $(0<a<1)$ 强级数.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x},\quad x\in[-a,a]$$

从而在 $[-a,a]$ 上有

$$S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=\ln(1+x).$$

但 $S(0)=0$, 所以 $S(x)=\ln(1+x)$.

再由 a 的任意性知在 $(-1,1)$ 内都有

$$S(x)=\ln(1+x).$$ □

习题 8.4

1. 求下列级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\dfrac{\pi}{4^n}$.

2. 讨论下列函数列在所示区域内的一致收敛性:

(1) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$, $-\infty<x<+\infty$;

(2) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

(3) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$, (i) $-l<x<l$, (ii) $-\infty<x<+\infty$;

(4) $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{1+n^2x}$, $0<x<1$.

3. 讨论下列级数的一致收敛性:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+4n^4x^2}\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(1-\mathrm{e}^{-nx})}{n^2+x^2}\quad(0\leqslant x<\infty)$.

4. 试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在任何区间 $[1+\alpha,+\infty)$ 内一致收敛 $(\alpha>0)$.

8.5　幂　级　数

下面我们讨论一类特殊的函数项级数: **幂级数**, 即函数项级数的通项是 $(x-x_0)$ 的幂函数 $a_n(x-x_0)^n$, 也就是它具有形式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots.$$

幂级数是最简单的函数项级数, 它具有一些特殊的性质, 并且在一些实际问题中以及对数学本身都有着广泛的应用.

8.5.1　幂级数的收敛半径

现在我们讨论幂级数的收敛性, 即对于一个给定的幂级数, 它在哪些点收敛, 哪些点发散. 先看一个例子, 幂级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

在 $(-1,1)$ 内收敛于函数 $\dfrac{1}{1-x}$, 而当 $|x|\geqslant 1$ 时, 这个幂级数发散. 从这个例子可以看到这个幂级数的收敛域是一个区间. 事实上, 这个结论对于一般的幂级数也是成立的. 为了简单起见, 我们只讨论形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$ x=0时一定收敛.

的幂级数. 而对于一般的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 可以通过一个变换 $t=x-x_0$ 化为上面形式的幂级数来讨论.

定理 8.5.1 (阿贝尔 (Abel) 定理)　(1) 如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x_1(\neq 0)$ 处收敛, 则对满足不等式 $|x|<|x_1|$ 的一切 x, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 x 处都绝对收敛.

(2) 如果级数在点 $x_2(\neq 0)$ 处发散, 则对于满足不等式 $|x|>|x_2|$ 的一切 x, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 x 处都发散.

证明　(1) 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. 因而序列 $\{ a_n x_1^n \}$ 必有界, 即存在 $M > 0$, 使

$$|a_n x_1^n| \leqslant M, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

于是对于一个满足不等式 $|x| < |x_1|$ 的固定点 x, 有

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n. \quad < M$$

由于 $\left|\dfrac{x}{x_1}\right| < 1$, 因而等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$ 收敛. 由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) 反设存在一点 x_3 满足 $|x_3| > |x_2|$, 使级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ 收敛. 则由 (1) 的结论知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ 绝对收敛, 这与假设矛盾. □

由定理 8.5.1 可以看出, 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_1 (\neq 0)$ 处收敛, 则区间 $(-|x_1|, |x_1|)$ 属于收敛域, 而若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_2 (\neq 0)$ 处发散, 则 $(-\infty, -|x_2|) \bigcup (|x_2|, +\infty)$ 属于发散域.

设已给幂级数在数轴上既有收敛点 (不仅是原点) 也有发散点. 现在从原点沿数轴向右方走, 最初只遇到收敛点, 然后就只遇到发散点. 因此存在这两部分的一个分界点 P. 这两部分的分界点 P 可能是收敛点也可能是发散点. 从原点出发沿数轴向左方走情况也是如此. 原点左方的分界点记为 P'. 由 Abel 定理知点 P 与 P' 到原点的距离相等 (见图 8.3).

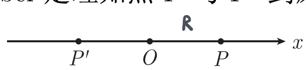


图 8.3

收敛区间

记 $R = |OP| = |OP'|$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内收敛, 而在 $(-\infty, -R) \bigcup (R, +\infty)$ 内发散, 而在 $x = \pm R$ 点, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可能收敛也可能发散. 如果从原点出发, 所遇到的点都是收敛点, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 这时我们认为 $R = +\infty$. 还有一种情况就是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 只在点 $x = 0$ 收敛, 而当 $x \neq 0$ 时发散, 此时我们认为 $R = 0$. 由上面的说明, 我们得到下面的定理.

定理 8.5.2　对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 存在一个非负实数 R(R 可为 $+\infty$), 使

(1) 当 $|x| < R$ 时, 幂级数绝对收敛;

(2) 当 $|x| > R$ 时, 幂级数发散;
(3) 当 $x = R$ 或 $x = -R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

定理中的非负数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**, 开区间 $(-R, R)$ 称为该幂级数的**收敛区间**. 所有收敛点构成的集合称为该幂级数的**收敛域**. 如果 $0 < R < +\infty$, 根据幂级数在 $x = \pm R$ 点处收敛的情况可知它的收敛域是 $(-R, R), [-R, R), (-R, R]$ 及 $[-R, R]$ 这四个区间之一.

如果 $R = 0$, 收敛域只有 $x = 0$ 这一点. 如果 $R = +\infty$, 这时收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

下面我们来讨论幂级数收敛半径的求法, 有下面的定理:

定理 8.5.3　对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$$

则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & 0 < l < +\infty, \\ +\infty, & l = 0, \\ 0, & l = +\infty. \end{cases}$$

$R = \frac{1}{l}$ 即可

证明　显然当 $x = 0$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 不妨设 $x \neq 0$, 则有

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|.$$

(1) 如果 $0 < l < +\infty$, 根据达朗贝尔判别法知, 当 $l|x| < 1$, 即 $|x| < \dfrac{1}{l}$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 而当 $l|x| > 1$, 即 $|x| > \dfrac{1}{l}$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. 因而收敛半径 $R = \dfrac{1}{l}$.

(2) 当 $l = 0$ 时, 则对任何 $x \neq 0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = 0 < 1.$$

故级数在 x 处绝对收敛. 由 x 的任意性知, 幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 于是 $R = +\infty$.

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 对任意 $x \neq 0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = +\infty,$$

则当 n 充分大后有 $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| > 1$. 从而对任意 $x \neq 0$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散, 于是 $R = 0$.

□

例 8.5.1 求幂级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

考虑端点

的收敛半径与收敛域.

用系数比值判断 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}\right|=1$

解 因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{l}=1$,

当 $x=1$ 时, 级数成为交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

此级数收敛.

当 $x=-1$ 时, 级数成为

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots,$$

此级数发散. 因此收敛域为 $(-1,1]$. □

例 8.5.2 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$$

的收敛半径, 收敛区间与收敛域.

解 令 $t=(x+1)$, 则级数化为

先换元化为标准式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot 3\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=3.$$

还原

收敛半径为 $R=\dfrac{1}{3}$. 收敛区间为 $|x+1|<\dfrac{1}{3}$, 即 $\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$. 当 $x=-\dfrac{4}{3}$ 时, 级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+(-2)^n}{3^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 均收敛. 所以, 此时级数收敛. 当 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时, 级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^n n},$$

由于 $\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^n n}>0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^n n}}{\dfrac{1}{n}}=1.$$

由比较判别法的极限形式知, 此时级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $\left[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$. □

例 8.5.3　求幂级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

的收敛半径与收敛域.

解　因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

所以收敛半径 $R=+\infty$, 从而收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. □

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}e^{-nx}$

令 $e^{-x}=t$.　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}t^n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(1+\frac{1}{n})^{-n^2}|}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}=e^{-1}$

定理 8.5.4　对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l,$$

则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{l}, & 0<l<+\infty,\\ +\infty, & l=0,\\ 0, & l=+\infty.\end{cases}$$

这个定理的证明与定理 8.5.3 的证明完全类似, 我们这里将其略去.

8.5.2　幂级数的性质

我们首先考虑幂级数的四则运算, 设两个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1,R_2, 令 $R=\min\{R_1,R_2\}$, 则由收敛级数的基本性质有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,\quad(|x|<R)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n,\quad(|x|<R)$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2\\&\quad+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\quad(|x|<R)\end{aligned}$$

其中

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

当 $b_0 \neq 0$ 时, 在 $x=0$ 的适当邻域内, 两幂级数可以相除, 且商可以表示为幂级数, 即

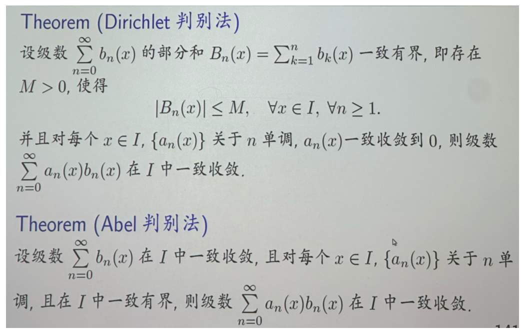
$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots .$$

其中系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots$ 可由关系式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

来确定. 比较等式两边同次幂的系数可得

$$a_0 = b_0 c_0,$$
$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1,$$
$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2,$$
$$\cdots\cdots$$


Theorem (Dirichlet 判别法)

设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和 $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$ 一致有界, 即存在 $M>0$, 使得

$$|B_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in I, \forall n \geq 1.$$

并且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, $a_n(x)$一致收敛到 0, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 中一致收敛.

Theorem (Abel 判别法)

设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 中一致收敛, 且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, 且在 I 中一致有界, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 中一致收敛.

由这些方程可以顺序地求出 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$.

相除后所得的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛区间可能比原来两级数的收敛区间小. Abel 判别法

内闭一致收敛性

下面我们来讨论幂级数的性质, 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R>0$, 则对任何正数 $b<R$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-b, b]$ 上一致收敛. 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=R$ 处收敛, 则幂级数在 $[0, R]$ 上一致收敛; 如果幂级数在点 $x=-R$ 处收敛, 则幂级数在 $[-R, 0]$ 上一致收敛. 利用这些事实, 我们可以得下面的一些结论.

定理 8.5.5 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

定理 8.5.6 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积, 并有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I).$$

定理 8.5.7 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad (|x|<R).$$

e.g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 收敛域 $[-1,1)$.

逐项求导后: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 在 -1 处不收敛.

端点处要单独讨论.

反复应用上述结论可得: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内具有任意阶导数.

例 8.5.4　求幂级数

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots$$

的和函数, 并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ 的值.

1°

解　先考虑幂级数的收敛域. 任取 $x \neq 0$, 令

1° 求收敛域

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

这时有

跳了一项: $x, x^3, x^5 \cdots$ 故带 x

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} x^2 = x^2.$$

2° 系数比 / 带 x 比

所以当 $|x| < 1$ 时幂级数收敛. 当 $|x| > 1$ 时, 幂级数发散.

当 $x = 1$ 时, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, 此时级数收敛.

当 $x = -1$ 时, 幂级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, 此时级数收敛.

因此, 收敛域为 $[-1, 1]$. 设

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad x \in [-1, 1]$$

$S(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内可导, 并且

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

两边积分并注意到 $S(0) = 0$, 得

$$S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan x, \qquad -1 < x < 1.$$

又 $S(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 因此

$$S(x) = \arctan x, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

特别地,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$ □

习题 8.5

1. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^n(k\in\mathbb{N})$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$.

2. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{na^n}(a>0)$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)x^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^n+5^n)x^n$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-2)^n}{n^n}$.

3. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 3^n}$.

4. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$.

5. 设有级数 $(A)\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, $(B)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{4^{n-4}}x^n$. 已知 (A) 的收敛域为 $[1,5)$.

(1) 求 x_0;

(2) 求 (B) 的收敛半径.

6. 设 $a_1=a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, $(n=2,3,\cdots)$,

(1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径;

(2) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

8.6　泰 勒 级 数

前面我们讨论了幂级数的收敛域及其和函数性质. 现在我们研究一个相反的问题: 给定函数 $f(x)$, 要考虑它是否能在某点的附近展成幂级数, 即是否可以找到一个幂级数在这一点的附近收敛, 且其和函数就是给定的函数 $f(x)$.

假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $N_\delta(x_0)$ 内能展成幂级数, 即有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\qquad x\in N_\delta(x_0),\tag{8.6.1}$$

那么, 根据和函数的性质, 可知 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内应具有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}(x-x_0)^2+\cdots.$$

由此可得

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n.$$

于是

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),\qquad(n=0,1,2,\cdots).\tag{8.6.2}$$

这表明, 如果函数 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 有幂级数展开式 (8.6.1), 那么该幂级数的系数 a_n 由公式 (8.6.2) 确定, 即该幂级数必为

$$\begin{aligned}&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\end{aligned}\tag{8.6.3}$$

亦即展开式必为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\qquad x\in N_\delta(x_0).\tag{8.6.4}$$

幂级数 (8.6.3) 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**泰勒级数**, 式 (8.6.4) 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的**泰勒展开式**.

由上面的讨论知, 函数 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内能展成幂级数的充要条件是式 (8.6.4) 在 $N_\delta(x_0)$ 内成立. 即级数 (8.6.3) 在 $N_\delta(x_0)$ 内收敛, 且收敛于 $f(x)$.

下面我们讨论式 (8.6.4) 成立的条件.

定理 8.6.1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $N_\delta(x_0)$ 内具有任意阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展成泰勒级数的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\qquad x\in N_\delta(x_0),$$

这里 $R_n(x)$ 是 $f(x)$ 的泰勒公式的余项.

证明　$f(x)$ 的 n 阶泰勒公式为

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

其中

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$
$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

$R_n(x)$ 就是定理中所指的余项, $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 的泰勒级数前 $n+1$ 项的部分和. 因此, 根据级数收敛的定义有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad x \in N_\delta(x_0),$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x), \quad x \in N_\delta(x_0),$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in N_\delta(x_0). \qquad \square$$

特别地, 如果 $x_0 = 0$, 则泰勒级数变为

$$f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n. \tag{8.6.5}$$

这个级数称为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**. 如果 $f(x)$ 能在 $N_\delta(0)$ 内展开成 x 的幂级数, 则有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n, \qquad x \in N_\delta(0). \tag{8.6.6}$$

式 (8.6.6) 称为 $f(x)$ 的麦克劳林展开式.

下面我们来讨论如何将函数 $f(x)$ 展开成泰勒级数.

第一步 求出 $f^{(n)}(x_0)(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 如果有一个 n 使得 $f^{(n)}(x_0)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不能展成泰勒级数.

第二步 写出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

并求出收敛半径 R.

第三步 利用余项 $R_n(x)$ 的表达式

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}, \qquad (0 < \theta < 1)$$

考察当 $x \in N_R(x_0)$ 时, 余项 $R_n(x)$ 的极限是否为零. 如果为零, 则函数 $f(x)$ 在 $N_R(x_0)$ 内的泰勒展开式为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad x \in N_R(x_0).$$

例 8.6.1 将函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 显然 e^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有任意阶的导函数, 且

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)}|_{x=0} = 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

因而其麦克劳林级数为

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots, \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

又其余项 $R_n(x)$ 满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \theta\in(0,1)$$

对于任意取定的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0.$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

因此, e^x 的麦克劳林展开式为

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

□

例 8.6.2　将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解　$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有任意阶的导函数, 且

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k, & n=2k+1,\end{cases} \qquad k=0,1,2,\cdots.$$

于是得 $\sin x$ 的麦克劳林级数为

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots.$$

它的收敛半径为 $R=+\infty$, 且其余项 $R_n(x)$ 满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0, \quad (n\to\infty).$$

因此, $\sin x$ 的麦克劳林展开式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots, \quad (-\infty<x<+\infty).$$

□

同理, $\cos x$ 的麦克劳林展开式为

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

由于

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \qquad (-1<x<1).$$

等比级数

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ $\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$ $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$.

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

上式两边从 0 到 x 积分, 可得

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad (-1 < x \leqslant 1).$$

端点讨论

利用 e^x 的麦克劳林展开式可得 $a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的麦克劳林展开式

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x \ln a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

由例 8.5.4 及泰勒展开式的唯一性可得

$$\mathrm{arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

例 8.6.3 将函数 $f(x) = (1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数, 其中 m 为任意实数.

解 $f(x)$ 的各阶导数为

$$\begin{aligned} &f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \\ &f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \\ &\cdots\cdots \\ &f^{(n)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

所以

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \cdots,$$

于是泰勒级数为

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots.$$

此级数相邻两项的系数之比的绝对值

$\sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{m-n}{n+1} \right| \to 1, \qquad (n \to \infty).$$

因此, 对于任何实数 m, 此级数在开区间 $(-1, 1)$ 内收敛.

要证明 $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, 需要利用余项的柯西形式, 我们这里不给出证明. 这样得到 $(1+x)^m$ 的泰勒展开式

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad (-1 < x < 1). \qquad \square$$

上面的公式称为二项展开式. 特别地, 当 m 为正整数时, 这就是初等代数中的二项式定理.

有了以上几个基本初等函数的泰勒展开式, 再利用幂级数的性质及运算, 我们就可以求出某些初等函数的泰勒展开式.

例 8.6.4　求函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的泰勒展开式.

解　$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\quad(-1<x\leqslant 1),$$

以 $(-x)$ 代替上式中的 x 得

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right)\qquad(-1\leqslant x<1),$$

因此

$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x}&=\ln(1+x)-\ln(1-x)\\&=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right)\quad(-1<x<1).\end{aligned}$$ □

例 8.6.5　将函数 $\sin x$ 展开成 $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数.

解　因为

$$\begin{aligned}\sin x&=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

而

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}-\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

所以

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\cdots\right)\quad x\in(-\infty,+\infty).$$ □

例 8.6.6　将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解　因为

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}\\&=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}.\end{aligned}$$

而

$-1<\frac{x-1}{2}<1$

$$\frac{1}{4\left(1+\dfrac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n,\quad (-1<x<3),$$

$-1<\frac{x-1}{4}<1$

$$\frac{1}{8\left(1+\dfrac{x-1}{4}\right)}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n,\quad (-3<x<5),$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2\cdot 4^{n+1}}\right)(x-1)^n,\quad (-1<x<3).\qquad \square$$

有了函数的幂级数展开式, 我们可以利用它进行近似计算.

例 8.6.7 计算 $\ln(1.2)$ 的近似值, 要求误差不超过 10^{-4}.

解
$$\ln(1.2)=\ln(1+0.2)=0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4+\cdots,$$
这是一个交错级数, 若取前 n 项, 则误差

$$R_n<\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1},$$

令

$$\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}<10^{-4}.$$

经计算 $n=4$ 满足要求. 于是取前四项, 每项取到小数点后五位, 得

$$\ln(1.2)\approx 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4\approx 0.18227.\qquad \square$$

例 8.6.8 计算 e 的近似值, 精确到 10^{-6}.

解
$$\mathrm{e}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}.$$

今取 $1+\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值, 则其误差

$$\begin{aligned}R_n&=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}=\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots m}\\&<\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k}=\frac{1}{n!n}.\end{aligned}$$

令 $\frac{1}{n!n}<10^{-6}$ 即 $n!n>10^6$. 经计算 $n=9$ 满足要求.

为了使 “四舍五入” 引起的误差与截断误差之和不超过 10^{-6}, 计算时应取到小数点后七位, 所以

$$\mathrm{e}\approx 1+\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n!}\approx 2.7182815.\qquad \square$$

例 8.6.9　求定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

解　由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数, 所以只能用近似计算来求此定积分.

因为

$$\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(2n+1)n!} + \cdots\right),\end{aligned}$$

这是一个交错级数, 其误差 R_n 满足

$$|\,R_n\,| \leqslant \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)n!}.$$

令 $\dfrac{1}{2^{2n+1}(2n+1)n!} < 10^{-4}$ 即 $2^{2n+1}(2n+1)n! > 10^4$, 经计算 $n = 4$ 满足要求. 于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!}\right) \approx 0.46127.$$ □

习题 8.6

1. 利用已知的初等函数的幂级数展开式, 求函数在 $x = 0$ 处的幂级数展开式, 并求展开式成立的区间:

(1) $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$;　　(2) e^{x^2};

(3) $\dfrac{1}{a+x}(a \neq 0)$;　　(4) $\cos^2 x$;

(5) $\ln(a+x)(a > 0)$;　　(6) $(1+x)\ln(1+x)$;

(7) $\ln(1+x-2x^2)$;　　(8) $\dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$;

(9) $\arctan x$;　　(10) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(11) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$;　　(12) $\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$.

2. 求下列函数在指定点 x_0 处的幂级数展开式, 并求展开式成立的区间:

(1) $\sqrt{x^3}, x_0 = 1$;　　(2) $\ln x, x_0 = 1$;

(3) $\dfrac{1}{x}, x_0 = 3$;　　(4) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}, x_0 = -4$.

3. 将 $f(x) = \displaystyle\int_1^x (t-1)^2 \mathrm{e}^{t^2-2t}\mathrm{d}t$ 在 $x = 1$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛域.

4. 利用函数的幂级数展开式, 计算下列各式的近似值:

(1) $\sqrt[3]{70}$(误差不超过 0.001);

(2) $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$(误差不超过 0.001);

(3) $\ln 3$(误差不超过 0.0001).

5. 设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, 求出级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$ 的和.

6. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

8.7 广义积分的敛散性

前面我们讨论过广义积分的定义. 广义积分除根据定义和计算公式可以判别其敛散性外, 还可以直接根据被积函数的某些性质来判别其敛散性.

8.7.1 无穷限广义积分敛散性判别法

下面我们首先叙述无穷限广义积分的柯西收敛原理 (略去其证明).

定理 8.7.1 (柯西收敛原理) 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $R>a$, 使得当 $A_1, A_2>R$ 时, 恒有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

定义 8.7.1 (绝对收敛, 条件收敛) 若广义积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**; 若广义积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散, 而广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$**条件收敛**.

容易证明广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛必收敛. 下面我们给出非负函数的无穷限广义积分敛散的判别法.

可积、有界

定理 8.7.2 如果 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的非负可积函数, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界.

证明 必要性显然, 下面证明充分性. 事实上, 因为 $f(x)\geqslant 0$, $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调增加, 又 $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界, 故 $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是单调有界的函数, 知极限

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$ 单调有界

存在, 即广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

定理 8.7.3 (比较判别法)　设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义, 并且

非负函数

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \quad (a \leqslant x < +\infty),$$

又设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在任意区间 $[a,b]$ 上可积, 则有:

(1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; 大收敛 → 小收敛

(2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散. 小发散 → 大发散

证明　由 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ 及 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 得

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

这说明函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有上界. 由定理 8.7.2 即知广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 必发散. 因为如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 由定理的第一部分知 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 矛盾! □

定理 8.7.4 (比较判别法的极限形式)　设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义, $f(x) \geqslant 0$, $g(x) > 0$ $(a \leqslant x < +\infty)$. 又设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在任意区间 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty),$$

则有:

(1) 当 $0 \leqslant \lambda < +\infty$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0 < \lambda \leqslant +\infty$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

特别地, 当 $0 < \lambda < +\infty$ 时, 两个广义积分同时收敛或同时发散.

我们知道, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leqslant 1$ 时发散. 取 $g(x) = \frac{M}{x^p}(M > 0)$, 立即可得下面的广义积分的比较判别法.

定理 8.7.5　设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义, $f(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x < +\infty)$. 又设 $f(x)$ 在任意区间 $[a,b]$ 上可积. 则有:

(1) 如果存在常数 $M > 0$ 及 $p > 1$, 使得 $f(x) \leqslant \frac{M}{x^p}(0 < a \leqslant x < +\infty)$, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 如果存在常数 $M > 0$, 使得 $f(x) \geqslant \frac{M}{x}(0 < a \leqslant x < +\infty)$, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

用以上广义积分作为比较标准, 易得如下结论:

定理 8.7.6 (柯西判别法) 设 $f(x) \geqslant 0,\ x \in [a, +\infty)$, 若

$$\lim_{x \to +\infty} x^p f(x) = \lambda \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty),$$

$\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}$.

则有:

(1) 当 $0 \leqslant \lambda < +\infty,\ p > 1$ 时, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0 < \lambda \leqslant +\infty,\ p \leqslant 1$ 时, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

下面再介绍两个精细的判别法:

定理 8.7.7 (狄利克莱判别法) 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义且 $f(x), g(x)$ 满足下列两个条件:

(1) 对一切 $A \geqslant a$, 积分 $\phi(A) = \displaystyle\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界;

(2) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调趋于零,

则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 8.7.8 (阿贝尔判别法) 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 且 $f(x), g(x)$ 满足下列两个条件:

(1) 广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界,

则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

例 8.7.1 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{1 + x^n}\,\mathrm{d}x \quad (n \geqslant 2, a \in \mathbb{R})$ 的敛散性. $\left|\dfrac{\sin ax}{1+x^n}\right| \leq \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{x^2}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{1+x^n} dx = \underbrace{\int_0^1}_{\text{定积分}} + \int_1^{+\infty}$$

故考察 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$

收敛. 故原广义积分收敛

解 $+\infty$ 是唯一奇点. 由于 $x > 1$ 时

放缩 → $(\arctan x)'$.

$$\left| \frac{\sin ax}{1 + x^n} \right| \leqslant \frac{1}{1 + x^2},$$

因为 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 所以广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{1 + x^n}\,\mathrm{d}x\ (n \geqslant 2)$ 收敛. □

例 8.7.2 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^5}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} dx = \underbrace{\int_0^1}_{\text{定积分}} + \int_1^{+\infty}$$

0处是否有意义?

解 $+\infty$ 是此广义积分的唯一奇点, 且此广义积分与 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^5}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

要考虑端点是否有意义?
无意义要拆成两个部分.

而

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^5}}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = 1$$

比较判别法的极限形式.

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{x}{\sqrt{1 + x^5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}\right)^5 + 1}} = 1,$$

所以广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^5}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 所以原式收敛. □

例 8.7.3　判别广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\quad(p>0)$ 的敛散性.

解　$+\infty$ 是唯一奇点. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^p\frac{\arctan x}{1+x^p}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\arctan x}{1+x^p}}{\frac{1}{x^p}}=\frac{\pi}{2}.$$

所以, 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散; 当 $p>1$ 时, 广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,dx\sim\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ □

例 8.7.4　证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

证明　令 $x=\sqrt{u}$, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$, 而 $\displaystyle\lim_{u\to0^+}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}=0$, 故 $u=0$ 不是奇点. $+\infty$ 是广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ 的唯一奇点.

收敛 × 单调有界　Abel.
有界 × 单调趋于0　狄利克莱.

因 $\displaystyle\left|\int_0^A\sin u\,\mathrm{d}u\right|\leqslant 2(0<A<+\infty)$, 即 $\displaystyle\int_0^A\sin u\,\mathrm{d}u$ 关于 $A\in(0,+\infty)$ 有界. 又 $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调, 且 $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{u}}=0$, 据狄利克莱判别法得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ 收敛, 故原式收敛.

下证原式非绝对收敛. 我们来证明 $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty}|\sin(x^2)|\,\mathrm{d}x$ 发散.

令 $x=\sqrt{u}$, 则 $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty}|\sin(x^2)|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin u|}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$, 因 $\pi\leqslant u<+\infty$ 时

$\boxed{\sin^2 x\le\sin x\le 1}$

$$\boxed{\left|\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right|\geqslant\frac{\sin^2 u}{\sqrt{u}}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{\cos 2u}{2\sqrt{u}}.$$

对于广义积分 $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos 2u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$, 因 $\displaystyle\left|\int_{\pi}^A\cos 2u\,\mathrm{d}u\right|\leqslant 2(\pi<A<+\infty)$, 即 $\displaystyle\int_{\pi}^A\cos 2u\,\mathrm{d}u$ 关于 $A\in(\pi,+\infty)$ 有界, 又 $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ 在区间 $(\pi,+\infty)$ 上单调, 且 $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{u}}=0$, 据狄利克莱判别法得 $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos 2u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ 收敛, 而广义积分 $\boxed{\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\ \text{显然发散}}$, 所以广义积分 $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ 发散, 据比较判别法即得广义积分 $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin u|}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ 发散. 因此, 结论正确. □

P-级数. 拆: $\int_0^1+\int_1^{+\infty}$

对于 $\displaystyle\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$, 我们有类似的判别法, 这里不一一赘述.

8.7.2　无界函数广义积分的敛散性判别法

对于无界函数的广义积分, 也有类似的敛散性判别法. 为了简便起见, 我们只就积分上限是奇点的无界函数广义积分来叙述, 其他类型的无界函数广义积分完全类似.

定理 8.7.9 (柯西收敛原理) 以 b 为奇点的广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<\eta_1<\delta, 0<\eta_2<\delta$ 时, 恒有

反移

$$\left|\int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

定理 8.7.10 (比较判别法) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义, b 为函数 $f(x), g(x)$ 的奇点, 并且

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x) \quad (a\leqslant x<b),$$

则有:

(1) 当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理 8.7.11 (比较判别法的极限形式) 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义, $f(x)\geqslant 0$, $g(x)>0$ $(a\leqslant x<b)$, 且

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda \ \ (0\leqslant\lambda\leqslant+\infty),$$

则有:

(1) 当 $0\leqslant\lambda<+\infty$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0<\lambda\leqslant+\infty$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

特别地, 当 $0<\lambda<+\infty$ 时, 两个广义积分同时收敛或同时发散.

我们知道, 广义积分 $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}\,\mathrm{d}x$ 和广义积分 $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x$ 当且仅当 $0<p<1$ 时收敛 $(p\leqslant 0$ 时不是广义积分), $p\geqslant 1$ 时发散. 所以我们容易得到下面的判别法. 与P-级数相反.

定理 8.7.12 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义, 且 $f(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x<b)$, $x=b$ 为 $f(x)$ 的奇点. 则有:

(1) 如果存在常数 $M>0$ 及 $0<p<1$, 使得 $f(x)\leqslant\dfrac{M}{(b-x)^p}(a\leqslant x<b)$, 则广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 如果存在常数 $M>0$, 使得 $f(x)\geqslant\dfrac{M}{b-x}(a\leqslant x<b)$, 则广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理 8.7.13 (柯西判别法) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义, 且 $f(x)\geqslant 0, x\in[a,b)$, b 为 $f(x)$ 的奇点, 若

$$\lim_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)=\lambda \ \ (0\leqslant\lambda\leqslant+\infty),$$

则有:

(1) 当 $0\leqslant\lambda<+\infty, 0<p<1$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0 < \lambda \leqslant +\infty, p \geqslant 1$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理 8.7.14 (狄利克莱判别法)　设 $x = b$ 是 $f(x)$ 的奇点, 且 $f(x), g(x)$ 满足下列两个条件:

(1) $\phi(A) = \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $a < A < b$ 上有界;

(2) $g(x)$ 在 (a, b) 上单调, 且 $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 8.7.15 (阿贝尔判别法)　设 $x = b$ 为 $f(x)$ 的奇点, 且 $f(x), g(x)$ 满足下列两个条件:

(1) 广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $g(x)$ 在 (a, b) 上单调有界,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

例 8.7.5　判别广义积分 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　由于 $x = 1$ 为函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}$ 的唯一奇点, 且

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

立方差公式

所以广义积分 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

例 8.7.6　判别广义积分 $\int_1^3 \frac{x}{(3-x)^p\sqrt{-x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　$x = 1, 3$ 为此广义积分的两个奇点. 拆!

记

$$I_1 = \int_1^2 \frac{x}{(3-x)^p\sqrt{-x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_2^3 \frac{x}{(3-x)^p\sqrt{-x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x.$$

根据定义, 当且仅当 I_1 和 I_2 都收敛时, 原广义积分收敛.

对于 I_1, $x = 1$ 是其唯一奇点,

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{(x-1)} \frac{x}{(3-x)^p\sqrt{-x^2+4x-3}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{(3-x)^p\sqrt{3-x}} = \frac{1}{2^p\sqrt{2}},$$

所以 I_1 收敛.

对于 I_2, $x = 3$ 是其唯一奇点,

$$\lim_{x \to 3^-} (3-x)^{p+\frac{1}{2}} \frac{x}{(3-x)^p\sqrt{-x^2+4x-3}} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

所以当 $p + \frac{1}{2} < 1$, 即 $p < \frac{1}{2}$ 时, I_2 收敛, 当 $p + \frac{1}{2} \geqslant 1$, 即 $p \geqslant \frac{1}{2}$ 时, I_2 发散.

综上所述, 原式仅当 $p < \dfrac{1}{2}$ 时收敛. □

8.7.3 Γ 函数与 B 函数

下面我们介绍理论和应用上都有重要意义的 Γ 函数与 B 函数.

一、Γ 函数

Γ 函数 (伽马函数) 的定义如下,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{s-1}\,\mathrm{d}t. \tag{8.7.1}$$

我们首先讨论 (8.7.1) 式右边广义积分的收敛性. 这个积分的积分区间为无穷, 又当 $s-1<0$ 时 $t=0$ 是被积函数的奇点. 为此, 我们讨论下面两个广义积分的收敛性.

$$I_1(s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{s-1}\,\mathrm{d}t, \quad I_2(s) = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

对于 $I_1(s)$, 当 $s \geqslant 1$ 时, $I_1(s)$ 是定积分; 当 $s<1$ 时, 因为

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1-s}\mathrm{e}^{-t}t^{s-1} = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{-t} = 1,$$

应用柯西判别法知: 仅当 $1-s<1$, 即 $s>0$ 时, $I_1(s)$ 收敛. 对于 $I_2(s)$, 因为

$$\lim_{t\to+\infty} t^2(\mathrm{e}^{-t}t^{s-1}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{s+1}}{\mathrm{e}^t} = 0,$$

所以 $I_2(s)$ 收敛. 由前面的讨论知道 Γ 函数的收敛域也即定义域为 $s>0$.

下面我们讨论 Γ 函数的几个重要性质:

(1) **递推公式** $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s>0)$.

证明 应用分部积分公式, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^s\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} t^s\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t}) \\ &= -t^s\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t = s\Gamma(s).\end{aligned}$$ □

根据此性质, 我们只要知道 $\Gamma(s)$ 在 $(0,1]$ 上的函数值就可求出 $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上任一点的函数值, 特别,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^0\,\mathrm{d}t = 1. \tag{8.7.2}$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!, \quad (n\in\mathbb{N}). \tag{8.7.3}$$

(2) $\lim\limits_{s\to 0^+} \Gamma(s) = +\infty$.

证明 因为

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad \Gamma(1) = 1,$$

所以, $\lim\limits_{s\to 0^+}\Gamma(s) = +\infty$. □

(3) **余元公式** $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin\pi s} \quad (0<s<1)$. (证明略去)

由余元公式可得

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}. \tag{8.7.4}$$

例 8.7.7　计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-4x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　令 $4x=t$, 则原式 $=\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.　□

例 8.7.8　计算 $\displaystyle\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^m\mathrm{d}x(m>-1,m\in\mathbb{R})$.

解　令 $\ln\dfrac{1}{x}=t$, $x=\mathrm{e}^{-t}$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, 则原式 $=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^m\mathrm{d}t=\Gamma(m+1)$.　□

二、B 函数

我们考虑下面的积分

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

当 $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$ 时，积分为正常的定积分. 当 $x<1$ 时, $t=0$ 为奇点; 当 $y<1$ 时, $t=1$ 为奇点.

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t=\int_0^{1/2}t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t+\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

$$\lim_{t\to 0^+}t^{1-x}\cdot t^{x-1}(1-t)^{y-1}=1.$$

因此, 当 $0<1-x<1$ 时, 即 $0<x<1$ 时, 广义积分 $\displaystyle\int_0^{1/2}t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ 收敛.

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^{1-y}\cdot t^{x-1}(1-t)^{y-1}=1.$$

因此, 当 $0<1-y<1$ 时, 即 $0<y<1$ 时, 广义积分 $\displaystyle\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ 收敛.

由上面的讨论可知当 $x>0$ 并且 $y>0$ 时，积分 $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ 收敛. 我们将这个积分所确定的二元函数称之为 B 函数 (贝塔函数), 记为

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

利用变量代换 $u=1-t$, 我们可以证明 B 函数的对称性，即

$$B(x,y)=B(y,x),\quad (x>0,y>0).$$

下面我们讨论一下 B 函数的其他形式.

(1) 设 $t=\dfrac{u}{1+u}$, $u=\dfrac{t}{1-t}$, 由 $t\to 0^+$ 时 $u\to 0^+$, $t\to 1^-$ 时 $u\to+\infty$, 则

$$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t. \tag{8.7.5}$$

(2) 设 $t=\sin^2 u$,

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}u\cos^{2y-1}u\mathrm{d}u=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}t\cos^{2y-1}t\mathrm{d}t. \tag{8.7.6}$$

三、Γ 函数与 B 函数的关系

关于 Γ 函数与 B 函数的关系我们有下面的定理.

定理 8.7.16

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad (x>0,y>0). \tag{8.7.7}$$

证明 在 Γ 函数的定义式中令 $t=\alpha u$, 其中 α 为任意给定的正数, u 为新的积分变量, 我们可得

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t=\alpha^x\int_0^{+\infty}u^{x-1}\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u.$$

从而有

$$\frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}=\int_0^{+\infty}u^{x-1}\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u,\quad (x>0,\alpha>0). \tag{8.7.8}$$

用 $x+y$ 代替上式中 x, 用 $1+\alpha$ 代替上式中 α, 即可得下面的等式

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+\alpha)^{x+y}}=\int_0^{+\infty}u^{x+y-1}\mathrm{e}^{-(1+\alpha)u}\mathrm{d}u.$$

上式两边同乘以 α^{y-1}, 再从 0 到 $+\infty$ 对变量 α 求积分, 得

$$\Gamma(x+y)\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^{y-1}}{(1+\alpha)^{x+y}}\mathrm{d}\alpha=\int_0^{+\infty}\alpha^{y-1}\left(\int_0^{+\infty}u^{x+y-1}\mathrm{e}^{-(1+\alpha)u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\alpha.$$

由式 (8.7.5) 可知上式左边的广义积分就是 $B(x,y)$, 可以证明上式右边的广义积分可以交换积分次序, 再由式 (8.7.8), 我们可得

$$\begin{aligned}\Gamma(x+y)B(x,y)&=\int_0^{+\infty}u^{x+y-1}\mathrm{e}^{-u}\left(\int_0^{+\infty}\alpha^{y-1}\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}u^{x+y-1}\mathrm{e}^{-u}\frac{\Gamma(y)}{u^y}\mathrm{d}u\\&=\Gamma(y)\int_0^{+\infty}u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\Gamma(y)\Gamma(x),\end{aligned}$$

两边同时除以 $\Gamma(x+y)$ 得证. □

由定理 8.7.16 及式 (8.7.4) 得 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)/\Gamma(1)=\pi$.

如果 m,n 是自然数, 则由式 (8.7.3) 有

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

例 8.7.9 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

解 令 $\frac{x}{1+x}=t$, 则 $x=\frac{t}{1-t}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$, 代入即得

$$原式=\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\qquad\square$$

例 8.7.10 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

解 据式 (8.7.6), $2x-1=n$, $2y-1=0$, $x=\dfrac{n+1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$, 所以

$$I=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)},\ (n>-1).$$

当 n 为偶数时, $I=\dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{n-2}{2}\cdots\cdots\dfrac{2}{2}\cdot\Gamma(1)}=\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}$;

当 n 为奇数时, $I=\dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}\cdots\dfrac{2}{2}\cdot\Gamma(1)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{n-2}{2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{(n-1)!!}{n!!}$. 即有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当}n\text{为偶数时},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当}n\text{为奇数时}.\end{cases}\qquad\square$$

与例 3.2.14 的结果一样.

习题 8.7

1. 判别下列广义积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int_1^{+\infty}\sin\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(8) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$;

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$;

(10) $\int_0^{+\infty}x^p\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$;

(11) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x$;

(12) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

(13) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\arctan x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$;

(14) $\int_1^{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\ln^3 x}$;

(15) $\int_0^{1}\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$;

(16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(17) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}\ln^{2}x}\mathrm{d}x$; (18) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{p}\ln^{q}x}$;

(19) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{p}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$; (20) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^{p}}\mathrm{d}x\ (p\in\mathbb{R})$;

(21) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\mathrm{d}x\ (0<p<1,0<q<1)$.

2. 设广义积分 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}f^{2}(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明广义积分 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

3. 讨论下列广义积分的绝对收敛和条件收敛:

(1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sec x)\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{p}\sin x}{1+x^{q}}\,\mathrm{d}x\quad(q\geqslant 0)$.

4. 利用 Γ 函数、B 函数计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{7}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^{2}}x^{2}\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}4^{-3x^{2}}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln^{3}x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x\ (\alpha>1)$; (6) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^{2}}\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N})$;

(7) $\displaystyle\int_{0}^{1}\sqrt{x-x^{2}}\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int_{0}^{a}x^{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$;

(9) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{3}}$; (10) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^{n}}}\ \ (n>0)$.