第 9 章　傅里叶级数

本章将讨论把一个周期函数展开成三角级数的问题. 这一理论不仅在数学中有重要价值, 而且在其他学科及工程技术上有广泛的应用.

9.1　三角级数 · 三角函数系的正交性

在现实生活中, 我们经常遇到周期函数, 正弦函数、余弦函数是常见而简单的周期函数. 例如, 单摆在振幅很小时的摆动可用函数

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

表示, 其中 y 表示动点的位置,t 表示时间,A 为振幅,ω 为角频率,φ 为初相. 又如交流电的电流强度 I 随时间的变化关系为

$$I = I_0\sin(\omega t + \varphi).$$

这两个函数都是 t 的周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 的周期函数, 它们所描述的周期现象称为简谐振动.

在实际问题中, 除了正弦函数外, 还会遇到非正弦的周期函数. 叠合若干个形式

$$\begin{aligned}&y_0 = A_0\sin\varphi_0, \quad y_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1),\\ &y_2 = A_2\sin(2\omega t + \varphi_2), \cdots, y_n = A_n\sin(n\omega t + \varphi_n)\end{aligned}$$

的量, 仍然是周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 的量. 如果取 $\omega t = x$ 为自变量, 那么就得到函数

$$y = \sum_{k=0}^{n} A_k\sin(k\omega t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k\sin(kx + \varphi_k).$$

对于自变量 x 来说, 是周期为 2π 的函数, 称它为 n 阶三角多项式,$A_k\sin(kx + \varphi_k)$ 称为第 k 次谐波 ($k = 0, 1, \cdots, n$). 一般地, 以 $A_k\sin(kx + \varphi_k)$ 为项作成的无穷级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k\sin(kx + \varphi_k)$$

称为**三角级数**. 显然, 如果这个级数在一个长度为 2π 的闭区间上收敛, 那么, 它的和函数 $f(x)$ 就是一个周期函数.

为了以后讨论方便起见, 我们将正弦函数 $A_n\sin(nx + \varphi_n)$ 按三角公式变形得

$$A_n\sin(nx + \varphi_n) = A_n\sin\varphi_n\cos nx + A_n\cos\varphi_n\sin nx,$$

并且令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0\sin\varphi_0$, $a_n = A_n\sin\varphi_n$, $b_n = A_n\cos\varphi_n$, 则 n 阶三角多项式就可写为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

而三角级数取形式

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

如果一个三角级数只有余弦项, 即 $b_k=0(k=1,2,\cdots)$, 则三角级数变为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,$$

称为**余弦级数**, 同样

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

称为**正弦级数**. 显然, 如果这些级数收敛, 那么, 前者是偶函数, 后者是奇函数.

如同对幂级数一样, 我们要讨论三角级数的收敛问题, 以及给定周期为 2π 的周期函数, 如何将它展开成三角级数. 以后会看到, 对于相当广泛一类的周期函数, 可以将其展开成三角级数. 我们首先讨论**三角函数系的正交性**.

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

称为**基本的三角函数系**. 容易验证, 基本三角函数系中任意两个不同的函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分为 0, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\qquad(n=1,2,3,\cdots),\tag{9.1.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\qquad(n=1,2,3,\cdots),\tag{9.1.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\qquad(n,m=1,2,\cdots),\tag{9.1.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\qquad(m,n=1,2,3,\cdots,m\neq n),\tag{9.1.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\qquad(m,n=1,2,3,\cdots,m\neq n).\tag{9.1.5}$$

以上等式, 都可以通过计算定积分来验证, 现将式 (9.1.4) 验证如下, 由三角函数中的积化和差公式有

$$\sin mx\sin nx=-\frac{1}{2}[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x],$$

当 $m\neq n$ 时, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}-\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.\end{aligned}$$

我们称这个函数系在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是正交的.

事实上, 区间 $[-\pi,\pi]$ 上的全体有界可积函数所组成的集合 A 在函数的加法及实数与函数的乘法运算下, 构成一个线性空间. 对于这个空间中的任意两个函数 f 和 g, 我们定义它们的内积为

$$\boxed{(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,,}$$

并定义 f 的范数为

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

则 A 就称为赋范线性空间. 两个向量 f 与 g 是正交的, 即指它们的内积为零. 所谓函数系是正交的, 即指这个函数系中任何两个不同的元素内积为零. 另外有

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,\mathrm{d}x=2\pi, \tag{9.1.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,\mathrm{d}x=\pi,\quad (n=1,2,\cdots), \tag{9.1.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi,\quad (n=1,2,\cdots). \tag{9.1.8}$$

那么容易看出函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots$$

不仅仅是两两互相正交, 而且它们之中的每一个元素的范数为 1. 因此, 这个函数系称为**单位正交系**.

习题 9.1

1. 证明:

   (1) $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\cdots$;

   (2) $\sin x,\sin 2x,\sin 3x,\cdots,\sin nx,\cdots$

   皆是 $[-\pi,\pi]$ 上的正交系; 但 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 不是 $[0,\pi]$ 上的正交系.

2. 证明本节中定义的内积 (f,g) 满足线性性质, 即

$$(c_1f_1+c_2f_2,g)=c_1(f_1,g)+c_2(f_2,g)\quad (c_1,c_2\text{为常数}).$$

3. 证明 $|(f,g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$.

9.2　函数展开成傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且能展开成三角级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{9.2.1}$$

一个自然的问题是系数 $a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots$ 与函数 $f(x)$ 之间的关系. 设式 (9.2.1) 右边的级数一致收敛于 $f(x)$. 将等式 (9.2.1) 沿区间 $[-\pi,\pi]$ 积分, 因为右边的级数可以逐项积分, 由式 (9.1.1), 式 (9.1.2) 及式 (9.1.6) 得到

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=a_0\pi,}$$

即

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

其次求 a_n, 用 $\cos nx$ 乘以式 (9.2.1) 两边. 再从 $-\pi$ 到 π 积分并由式 (9.1.2), 式 (9.1.3), 式 (9.1.5) 及式 (9.1.8) 得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=&\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\\=&a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=a_n\pi.\end{aligned}$$

于是得到

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\qquad (n=1,2,\cdots),$$

同样可得到

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\qquad (n=1,2,\cdots).$$

因此得到

$$\boxed{\begin{aligned}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\qquad (n=0,1,2,\cdots),\\b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\qquad (n=1,2,\cdots).\end{aligned}}\tag{9.2.2}$$

如果公式 (9.2.2) 中的积分都存在, 这时计算出来的系数 $a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots$ 称为函数 $f(x)$ 的傅里叶 (Fourier*) 系数, 所得到的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为函数 $f(x)$ 的**傅里叶级数**.

一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 的周期函数 $f(x)$, 如果它在一个周期上可积, 则一定可以作出 $f(x)$ 的傅里叶级数. 然而, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是否收敛? 如果它在一点 x 收敛, 它是否一定收敛于 $f(x)$? 一般来说, 这两个问题的答案都不是肯定的. 下面我们叙述狄利克莱 (Dirichlet) 收敛定理 (不证明).

定理 9.2.1 (狄利克莱收敛定理)　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 如果它满足

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点;

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上至多只有有限个严格极值点, 即 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段单调, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 并且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点},\\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点}.\end{cases}$$

* 傅里叶 (Fourier J B J, 1768~1830), 法国数学家.

△ **例 9.2.1**　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解　$f(x)$ 在点 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不连续, 在其他点连续, 满足狄利克莱定理的条件, 所以 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 并且当 $x=k\pi$ 时级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0.$

当 $x\neq k\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$. 计算傅里叶系数如下

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\quad (n=0,1,2,\cdots),\\b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\;\frac{-\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\\&=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$\begin{aligned}&\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right)\\=&\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x\\=&\begin{cases}f(x), & -\infty<x<+\infty, x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z},\\ 0, & x=k\pi, k\in\mathbb{Z}.\end{cases}\end{aligned}$$

□

例 9.2.2　设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数.

解　$f(x)$ 满足狄利克莱定理的条件, 它在 $x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 处不连续, 在其他点都连续. 先计算傅里叶系数

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\pi\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\,\mathrm{d}x\right)=-\frac{\pi}{2},\\a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\pi\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\pi \sin nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} x \sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{n}(1 - 2\cos n\pi) = \frac{1}{n}[1 - 2(-1)^n], \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

因此, 有

$$\begin{aligned} &-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1 - 2(-1)^n}{n}\sin nx\right] \\ &= \begin{cases} f(x), & x \neq k\pi, \\ 0, & x = (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}. \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 2k\pi, \end{cases} \end{aligned}$$ □

如果 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 并且是奇函数, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

这时 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

即 $f(x)$ 的傅里叶级数为正弦级数.

如果 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数并且是偶函数, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \\ b_n &= 0, \qquad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

这时, $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

即 $f(x)$ 的傅里叶级数为余弦级数.

例 9.2.3 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x$, 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

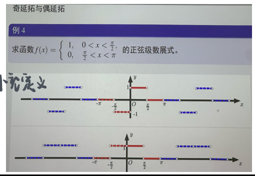
解 $f(x)$ 满足狄利克莱定理的条件, 它在点

$$x = (2k+1)\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

处不连续. 并且 $f(x)$ 为奇函数, 因此, $a_n = 0, (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

补充定义



奇延拓：正弦级数
偶延拓：余弦级数

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}\cos n\pi \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, \quad (n=1,2,\cdots),
\end{aligned}
$$

因此, $f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$
2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = \begin{cases} f(x), & (x\neq \pm\pi,\pm 3\pi,\cdots),\\ 0, & (x=\pm\pi,\pm3\pi,\cdots).\end{cases} \qquad \square
$$

例 9.2.4　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=|x|$, 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解　$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 所以 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛于 $f(x)$.

因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $b_n=0\,(n=1,2,\cdots)$,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \\
&= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots. \end{cases} \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi.
\end{aligned}
$$

因此, $f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$
f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x, \qquad x\in(-\infty,+\infty). \qquad \square
$$

习题 9.2

1. 设函数 $y=f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式由下列各式给出, 求出 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数:

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}, -\pi\leqslant x<\pi$.

(2) $f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi\leqslant x<0,\\ bx, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$ $(a,b$ 为常数且 $b>a>0)$.

(3) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi+x}{2}, & -\pi\leqslant x<0,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

2. 已知函数 $f(x)=x^2$.

(1) 将函数 $f(x)$ 在 $-\pi\leqslant x<\pi$ 内展开成余弦级数;

(2) 将函数 $f(x)$ 在 $0 \leqslant x < \pi$ 内展开成正弦级数;

(3) 将函数 $f(x)$ 在 $0 < x < 2\pi$ 内展开成傅里叶级数;

(4) 利用上面的展开式求下列级数的和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi \leqslant x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

4. 将函数 $f(x) = 3(0 < x < \pi)$ 展开成正弦级数, 并由此推出 $\dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

9.3 任意周期的周期函数的傅里叶级数

前面我们讨论了以 2π 为周期的周期函数的傅里叶级数. 显然, 上述结果很容易推广到一般的周期函数. 本节, 我们假设所讨论的周期函数的周期为 $2l$, 应用前面的结果, 经过自变量的变量代换, 我们有下面的定理.

定理 9.3.1 设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足狄利克莱收敛定理的条件, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 并且

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \\ &= \begin{cases} f(x), & x \text{ 为} f(x) \text{的连续点}, \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & x \text{为} f(x) \text{的间断点}. \end{cases} \end{aligned}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, 傅里叶展开式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \begin{cases} f(x), & x \text{为} f(x) \text{的连续点}, \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & x \text{为} f(x) \text{的间断点}. \end{cases}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

当 $f(x)$ 为偶函数时, 傅里叶展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\begin{cases}f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点},\\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点}.\end{cases}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

证明　作变量代换 $z=\dfrac{\pi x}{l}$, 于是区间 $[-l,l]$ 变为 $[-\pi,\pi]$, 设 $F(z)=f\left(\dfrac{lz}{\pi}\right)=f(x)$. 从而 $F(z)$ 是周期为 2π 的周期函数, 并且它满足狄利克莱收敛定理的条件. 从而, 有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)=\begin{cases}F(z), & z\ \text{为}F(z)\text{的连续点},\\ \dfrac{F(z^+)+F(z^-)}{2}, & z\text{为}F(z)\text{的间断点}.\end{cases}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz\mathrm{d}z,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nz\mathrm{d}z.$$

在上式中令 $z=\dfrac{\pi x}{l}$, 得

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\begin{cases}f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点},\\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点}.\end{cases}$$

定理的其余部分可类似地证明. □

例 9.3.1　将周期函数 $f(x)=x-[x]$ 展开成傅里叶级数, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解　因为

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x),$$

于是 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数, 即 $l=\dfrac{1}{2}$, 且除 $x=k(k\in\mathbb{Z})$ 外, $f(x)$ 连续.

先计算傅里叶系数

$[x]=0 \quad x\in(0,1).$

$$a_0=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(x-[x])\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=2\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]_0^1=0,$$

$$b_n=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,\mathrm{d}x=2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]_0^1=-\frac{1}{n\pi},$$

因此

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}=\begin{cases}x-[x], & x\neq k,\\ \dfrac{1}{2}, & x=k,\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos \boxed{nx}\,dx$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

习题 9.3

1. 已知函数 $y=f(x)$ 为周期函数, 它在一个周期内的表达式由下列各式给出, 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

   (1) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & 1<x<2, \\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3; \end{cases}$

   (2) $f(x)=1-x^2, \left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right);$

   (3) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x<3. \end{cases}$

2. 求函数 $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}, \\ 0, & \dfrac{l}{2}\leqslant x<l \end{cases}$ 的正弦级数, 并求出其和函数.

3. 已知 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=2+|x|, (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

   (1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;

   (2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和;

   (3) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

4. 设 $f(x)$ 满足 $f(x+\pi)=-f(x)$, 问此函数在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数具有怎样的特性?

5. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\pi)=f(x)$, 问此函数在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数具有怎样的特性?

6. 如果 $\varphi(-x)=\psi(x)$, 问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, $\beta_n(n=0,1,2,\cdots)$ 之间有何关系?

7. 将函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<h, \\ 0, & h<x<\pi \end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

8. 设有三角级数

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

   其中 $|\,a_n\,|\leqslant\dfrac{M}{n^3}, |\,b_n\,|\leqslant\dfrac{M}{n^3}(n=1,2,\cdots)$, $M>0$ 为常数, 证明上述三角级数一致收敛, 且可以逐项求导数.

第 10 章　常微分方程初步

函数是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系, 利用函数关系可以对客观事物的规律进行研究. 在大量实际问题中, 反映运动规律的量与量之间的关系往往不能直接写出来, 却比较容易建立这些变量和它们的导数之间的关系. 这种联系着自变量、未知函数以及它们的导数之间的关系, 数学上称之为微分方程. 微分方程建立后, 对它进行研究, 找出未知函数或研究其性质, 这就是解微分方程以及微分方程的解的定性研究. 本章主要介绍微分方程的一些基本概念和一些常用的微分方程的解法.

10.1　微分方程的基本概念

我们先从一个具体的例子谈起.

例 10.1.1　一曲线通过点(1, 4), 且在该曲线上任一点 $P(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2x$, 求此曲线的方程.

解　设所求曲线的方程为 $y = y(x)$. 根据导数的几何意义可知, 未知函数 $y = y(x)$ 应满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x, \tag{10.1.1}$$

把式 (10.1.1) 两端积分, 得

$$y = \int 2x\mathrm{d}x,$$

即

$$y = x^2 + C, \tag{10.1.2}$$

其中 C 是任意常数. 此外, 由于未知函数 $y = y(x)$ 经过 (1,4), 即 $x = 1$ 时, $y = 4$ 代入式 (10.1.2), 得 $C = 3$. 故所求曲线方程为 $y = x^2 + 3$. □

例 10.1.2 (生物种群的 Logistic 方程)　设某种生物种群的总数 $y(t)$ 随时间 t 而变化, 其变化率与 y 和 $(m - y)$ (其中 m 为容纳量) 的乘积成正比, 求 $y(t)$ 的表达式.

解　由题意, 所求的 $y(t)$ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky(m - y) \tag{10.1.3}$$

其中 $k > 0$ 为比例常数. 把式 (10.1.3) 改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(m - y)} = k\mathrm{d}t \quad (y > 0, y \neq m),$$

两边积分, 得

$$\frac{1}{m}\ln y - \frac{1}{m}\ln|m - y| = kt + \frac{1}{m}\ln|C|,$$

从上式可以求得

$$y=\frac{m}{1+C^{-1}\mathrm{e}^{-mkt}}.\qquad\square$$

容易看出,

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=m.$$

从这里我们可以看到一个有趣的结论: 生物种群的数量最终会趋于一个定值 (见图 10.1).

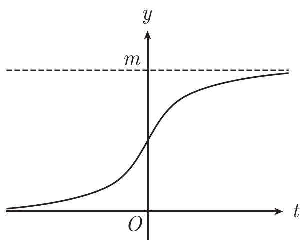


图 10.1

在上面这两个例子中, 式 (10.1.1) 以及式 (10.1.3) 是含有未知函数导数的等式. 一般说来, 一个表示未知函数、未知函数的导数以及自变量之间的关系的方程, 我们称之为**微分方程**. 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数或偏导数的阶数, 称为**微分方程的阶**. 例如方程 (10.1.1) 是一阶微分方程. 又如 $y''+2y'+y=x$, $x^3y'''+3x^2y''+xy'=\mathrm{e}^x$ 分别是二阶与三阶微分方程. 如果在微分方程中, 自变量的个数只有一个, 我们称这种微分方程为**常微分方程**(在本章中, 我们通常简称为**方程**或**微分方程**); 若自变量的个数为两个或两个以上, 我们称之为**偏微分方程**.

例如 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$ 是一个二阶偏微分方程的例子, 它以 $u=u(x,y,z)$ 为未知函数, 以 x,y,z 为自变量. 在本章中, 我们只讨论常微分方程及其解法.

一般说来, 形如

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{10.1.4}$$

n阶方程一般有n个独立的参数

的等式, 称作一个以 x 为自变量, 以 $y(x)$ 为未知函数的 n **阶常微分方程**.

在例 10.1.1 中, 我们发现, 如果把 $y=x^2+3$ 代入式 (10.1.1), 便把式 (10.1.1) 变成了恒等式. 此时我们称 $y=x^2+3$ 为式 (10.1.1) 的**解**.

一般地, 若 n 阶微分方程 (10.1.4) 有解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$, 其中 C_1, C_2, $\cdots$, C_n 是 φ 中 n 个独立的任意常数, 即 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 满足

$$\frac{D(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{D(C_1,C_2,\cdots,C_n)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_n}\\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n}\end{vmatrix}\neq0, \tag{10.1.5}$$

则称 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为方程 (10.1.4) 的**通解**.

我们举一个例子来说明, 例如我们容易验证 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的解; 又因为

$$\frac{D(y,y')}{D(C_1,C_2)}=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-1\neq0,$$

所以 C_1,C_2 是两个独立的任意常数, 故 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是方程 $y''+y=0$ 的通解. 另外, 我们也容易验证式 (10.1.2) 是式 (10.1.1) 的通解.

为了确定微分方程一个特定的解, 我们通常需要给出这个解所必须满足的条件, 这就是所谓的定解条件. 常见的定解条件是初始条件. 所谓 n 阶微分方程 (10.1.4) 的**初始条件**是指如下的 n 个条件:

当 $x=x_0$ 时, $y=y_0, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y_0^{(1)}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}=y_0^{(n-1)}$. 其中 $y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 都是常数.

求满足上述初始条件的微分方程 (10.1.4) 的解的问题, 称为**初值问题**.

在例 10.1.1 中, 式 (10.1.2) 是式 (10.1.1) 的通解; $y=x^2+3$ 是式 (10.1.1) 的满足初始条件: $x=1$ 时, $y=4$ (或者说 $y(1)=4$) 的解.

有时候通解不是用显函数的形式给出, 而是用一种隐函数的形式 $\Phi(x, y; C_1, C_2, \cdots, C_n)=0$ 给出. 这时我们把 $\Phi(x, y; C_1, C_2, \cdots, C_n)=0$ 称作微分方程的**隐式通解**或**通积分**.

10.2 一阶微分方程的初等解法

在求解微分方程的过程中, 人们发现, 并不是所有的微分方程的解都能用初等函数来表示. 例如: 对于一阶方程

$$y'=x^2+y^2,$$

刘维尔 (Liouville*) 于 1838 年证明了该方程是不能用初等积分法求解的, 即不可能用初等函数来表示这个方程的解. 事实上, 在实际应用中碰到的大部分微分方程, 其解都是不能用初等函数表示的. 但对于某些特殊类型的微分方程, 我们可以用初等函数来表示它们的解. 我们下面介绍的就是若干能用初等积分法来求解的方程的类型及其解法. 为了说明方便, 在本章中我们把 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 看成 $f(x)$ 的某一个原函数.

一阶微分方程的一般形式为: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x, y)$, 下面我们针对 $f(x, y)$ 的几种特殊形式来介绍一阶微分方程的解法.

10.2.1 变量分离方程

定义 10.2.1 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{10.2.1}$$

的微分方程, 称为**变量分离方程**(或称为**可分离变量的方程**), 其中 $f(x), g(y)$ 分别是关于 x, y 的连续函数.

若 $g(y)\neq 0$, 将方程 (10.2.1) 改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x,$$

这样我们就从形式上把微分方程 (10.2.1) 的变量分离出来了, 将上式两边积分, 得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C. \tag{10.2.2}$$

∗ 刘维尔 (Liouville J, 1809∼1882), 法国数学家.

这时, 由式 (10.2.2) 所确定的函数 $y=\phi(x,C)$ 满足方程 (10.2.1). 因而, 式 (10.2.2) 是式 (10.2.1) 的隐式通解.

需要注意的是: 若存在 y_0, 使得 $g(y_0)=0$, 则容易验证 $y=y_0$ 满足方程 (10.2.1), 此时若 $y=y_0$ 不包含在通解的表达式 (10.2.2) 中, 则称此解为式 (10.2.1) 的**奇解**, 我们要把这个解补上.

例 10.2.1 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}.$$

解 原方程化为

$$y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x,$$

两边积分, 得

$$\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2+\frac{C}{2},$$

所以原方程的通解为

$$y^2=x^2+C,$$

其中 C 为任意常数. 我们也可以把通解写成显函数形式 $y=\pm\sqrt{x^2+C}$. □

例 10.2.2 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\cos^2 y\sin x.$$

解 若 $\cos y\neq 0$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y}=-\sin x\mathrm{d}x,$$

两边积分, 得

$$\tan y=\cos x+C,$$

这就是原方程的通积分. 当 $\cos y=0$ 时, 即当 $y=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$ 时, 容易验证它也是原方程的解, 但它不包含在通解中. 所以原方程还有奇解 $y=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$. □

例 10.2.3 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x-y}$$

满足 $y(0)=0$ 的解.

解 原方程化为

$$\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x,$$

两边积分, 得原方程的通解为

$$\mathrm{e}^y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C.$$

将条件 $y(0)=0$ 代入上式, 解得 $C=\dfrac{1}{2}$. 所以

$$y=\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)-\ln 2$$

为满足题设条件的原微分方程的解. □

10.2.2　可化为变量分离方程的类型

在这里我们只介绍几种简单的类型.　线性组合：换元

(1) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c) \tag{10.2.3}$$

的微分方程.

令 $u=ax+by+c$, 则 $\mathrm{d}u=a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

从而方程 (10.2.3) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u).$$

容易看出, 这是可分离变量的方程. 若其通解为：$u=\varphi(x,C)$, 则方程 (10.2.3) 的通积分为

$$ax+by+c=\varphi(x,C).$$

例 10.2.4　求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+2y+1)^2.$$

解　令 $u=x+2y+1$, 则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

从而原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+2u^2,$$

这是一个可分离变量的方程, 其通解为

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u)+C,$$

所以原方程的通积分为

一阶齐次

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan[\sqrt{2}(x+2y+1)]+C.$$ □

(2) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{10.2.4}$$

的微分方程, 我们称之为**一阶齐次微分方程**.

这种形式的方程, 也可以化为可分离变量的方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $ux=y$. 两边微分, 得

$$\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

从而方程 (10.2.4) 化为

$$f(u)=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}(f(u) - u),$$

这是可分离变量的方程. 若其通解为：$u = \varphi(x, C)$, 则方程 (10.2.4) 的通解为

$$\frac{y}{x} = \varphi(x, C).$$

例 10.2.5　解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{xy + x^2}.$$

解　原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} + 1},$$

因此这是一个齐次微分方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$y = ux, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

于是原方程变为

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u^2}{u + 1},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-u}{u + 1},$$

分离变量, 得

$$\left(1 + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad (u \neq 0)$$

两边积分, 得

$$u + \ln|u| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

所以原方程的通积分为

线性分式

$$y = C\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}.$$

□

(3) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{10.2.5}$$

的微分方程.

注意到当 $c_1 = c_2 = 0$ 时, 式 (10.2.5) 可化为齐次方程的形式. 所以下面只讨论 c_1, c_2 不全为零的情形.

当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时, 令

$$u = a_1x + b_1y + c_1, v = a_2x + b_2y + c_2,$$

则

$$\mathrm{d}u = a_1\mathrm{d}x + b_1\mathrm{d}y, \mathrm{d}v = a_2\mathrm{d}x + b_2\mathrm{d}y,$$

于是

$$\mathrm{d}x=\frac{b_2\mathrm{d}u-b_1\mathrm{d}v}{a_1b_2-a_2b_1},\mathrm{d}y=\frac{a_1\mathrm{d}v-a_2\mathrm{d}u}{a_1b_2-a_2b_1},$$

从而方程 (10.2.5) 可化为

$$\frac{a_1\mathrm{d}v-a_2\mathrm{d}u}{b_2\mathrm{d}u-b_1\mathrm{d}v}=f\left(\frac{u}{v}\right),$$

即

$$\left(a_2+b_2f\left(\frac{u}{v}\right)\right)\mathrm{d}u=\left(a_1+b_1f\left(\frac{u}{v}\right)\right)\mathrm{d}v.$$

这是一个齐次微分方程, 可用前面的方法加以求解.

当 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 时, 则存在某个常数 k, 使得 $(a_2,b_2)=k(a_1,b_1)$, 此时令 $u=a_1x+b_1y$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_1+b_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a_1+b_1f\left(\frac{u+c_1}{ku+c_2}\right),$$

此即为变量分离方程.

例 10.2.6　求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+1}{x+y-1}.$$

解　令 $u=x-y+1,v=x+y-1$, 则

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y,\mathrm{d}v=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$

解得

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u+\mathrm{d}v}{2},\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}v-\mathrm{d}u}{2},$$

所以原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{1-\frac{u}{v}}{1+\frac{u}{v}},$$

这是齐次微分方程, 再令 $z=\dfrac{u}{v}$, 则 $zv=u$, 两边微分, 得 $z\mathrm{d}v+v\mathrm{d}z=\mathrm{d}u$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=v\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v}+z=\frac{1-\frac{u}{v}}{1+\frac{u}{v}},$$

即

$$-\frac{(1+z)}{(1+z)^2-2}\mathrm{d}z=\frac{1}{v}\mathrm{d}v,$$

两边积分, 得

$$-\frac{1}{2}\ln|(z+1)^2-2|=\ln|v|+C,$$

代回原变量, 得原方程的通积分为

$$x^2-y^2-2xy+2x+2y=C_2,\text{其中}C_2=\pm\mathrm{e}^{-2c}.$$

□

例 10.2.7 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}.$$

解 易见原方程右边的分子分母中 x,y 的系数成比例. 令 $u=2x+y$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2+\frac{u+1}{2u-3}=\frac{5(u-1)}{2u-3},$$

这是一个可分离变量的方程, 解得

$$u-1=C\mathrm{e}^{2u-5x},$$

代回原变量, 得原方程的通积分为

$$2x+y-1=C\mathrm{e}^{2y-x}.$$

□

习题 10.2

1. 验证下列各函数是其对应微分方程的通解 (或通积分):

   (1) $y''-4y'+3y=0,\ y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$;

   (2) $(x-y+1)y'=1,\ y=x+C\mathrm{e}^y$;

   (3) $yy''=(y')^2,\ y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$.

2. 求以下列曲线簇为通解 (或通积分) 的微分方程:

   (1) $y=xC+C^2$;　(2) $x=C\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$;

   (3) $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$;　(4) $y=C_1\ln|x|+C_2$.

3. 解下列微分方程:

   (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln y$;　(2) $\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x+y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y=0$;

   (3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$;　(4) $(1+x)y\mathrm{d}x+(1-y)x\mathrm{d}y=0$.

4. 解下列微分方程:

   (1) $xy'-y\ln y=0$;　(2) $xy\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$;

   (3) $y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$;　(4) $y'=\mathrm{e}^{x+y}$;

   (5) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$;　(6) $x^2y^2y'+1=y$.

5. 求下列微分方程的通解:

   (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$;　(2) $(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$;

   (3) $xy'-y=x\tan\dfrac{y}{x}$;　(4) $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$;

   (5) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y,(x>0)$;　(6) $y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

6. 求下列微分方程的解:

   (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$;　(2) $(2x-4y+6)\mathrm{d}x+(x+y-3)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(2x+3y+4)\mathrm{d}x-(4x+6y+5)\mathrm{d}y=0$;　(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$.

7. 求解下列微分方程的初值问题:

(1) $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1$;　(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{y}\ln x,\ y(\mathrm{e})=1$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\cos x\cos 2y)^2,\ y(0)=0$;　(4) $y'=\dfrac{y}{x}\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right), y(1)=\mathrm{e}$.

10.3　一阶线性微分方程

考虑 if $Q(x)\equiv 0$

定义 10.3.1　形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{10.3.1}$$

的方程, 称为**一阶线性微分方程**. 当 $Q(x)\equiv 0$ 时, 称为**一阶齐次线性微分方程**; 否则, 称为**一阶非齐次线性微分方程**.

先来看齐次的情形 (即 $Q(x)\equiv 0$ 的情形), 此时方程 (10.3.1) 变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0,$$

$\frac{dy}{y}=-P(x)dx \to \int\frac{dy}{y}=\int -P(x)dx$

$\ln|y|=\int -P(x)dx$

$y=\pm e^{-\int P(x)dx+c_1}=\pm e^{c_1}e^{-\int P(x)dx}$

$\pm e^{c_1}\to C \qquad y=Ce^{-\int P(x)dx}$

这是一个可分离变量的方程, 容易求得它的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

现在我们来讨论非齐次线性微分方程 (10.3.1) 的通解的求法.

由于 $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\neq 0$, 在方程 (10.3.1) 的两边同时乘以 $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$, 并整理, 得

$$\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+\left(\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}P(x)y\right)\mathrm{d}x=\left(Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x,$$

即

$$\mathrm{d}\left(y\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

两边积分, 得

$$y\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=\int\left(Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+C,$$

所以方程 (10.3.1) 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int\left(Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\right). \tag{10.3.2}$$

注　如果我们将 y 视为自变量, 将 x 视为未知函数, 得到关于 x 的一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+P(y)x=Q(y), \tag{10.3.3}$$

则与方程 (10.3.1) 对应的方程 (10.3.3) 的通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(C+\int\left(Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y\right). \tag{10.3.4}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),\quad y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right) dx\right)$$

例 10.3.1 求解微分方程

$$(x+2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = \mathrm{e}^x(x+2)^3.$$

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x+2}y = \mathrm{e}^x(x+2)^2,$$

这是一阶非齐次线性微分方程, 由式 (10.3.2) 得原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{\int \frac{2}{x+2}\mathrm{d}x}\left(C + \int \left(\mathrm{e}^x(x+2)^2\mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x+2}\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\right) \\ &= (x+2)^2(C+\mathrm{e}^x). \end{aligned}$$

□

△ **例 10.3.2** 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x-y^2}.$$ 不是齐次的. 不是线性的. $x \leftrightarrow y$ 改写.

解 原方程不是关于未知函数 y 的线性微分方程, 但我们可以将它改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x-y^2}{y},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{y}x = -y,$$

由式 (10.3.4), 得原方程的通解为

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(C + \int (-y)\mathrm{e}^{-\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right) \\ &= y(C-y). \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y).$$

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int P(y)dy}\left(C + \int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy\right) \\ &= e^{\int \frac{1}{y}dy}\left(C + \int (-y)e^{-\int \frac{1}{y}dy}dy\right) \\ &= e^{\ln|y|}\left(C + \int -y\,e^{-\ln|y|}dy\right) \\ &= |y|\left(C - \int dy\right). \end{aligned}$$

$y>0.$ $\quad x = y(C-y)$

$y<0$ $\quad x = -y(C+y) = y(C_2 - y)$

另外, $y=0$ 也是原方程的解. □

下面我们介绍一类特殊的可化为一阶线性微分方程的微分方程, 即伯努利 (Bernoulli) 方程.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^\alpha \tag{10.3.5}$$

的方程, 称为**伯努利方程**. 其中 $P(x), Q(x)$ 为关于 x 的连续函数, $\alpha \neq 0, 1$, 是实常数.

当 $y \neq 0$ 时, 式 (10.3.5) 两边同时乘以 $y^{-\alpha}$, 得

$$y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x),$$

即

$$\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^{1-\alpha}) + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x),$$

令 $u = y^{1-\alpha}$, 则上式化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)P(x)u = (1-\alpha)Q(x),$$

这是关于函数 $u(x)$ 的一阶线性微分方程, 由此求出 $u(x)$, 再由 $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ 便可求得 $y(x)$.

注意, 当 $\alpha > 0$ 时, $y=0$ 也满足方程 (10.3.5), 若它不包含在通解中, 需把它补上.

例 10.3.3　求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-xy^2.$$

解　原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y=-xy^2,$$

这是 $\alpha=2$ 的伯努利方程. 令 $u=y^{-1}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程, 得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}u=x,$$

这是一阶线性微分方程, 求得其通解为

$$\begin{aligned}u&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(C+\int x\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{x}\left(C+\frac{1}{3}x^3\right)\\&=\frac{C}{x}+\frac{x^2}{3},\end{aligned}$$

代回原变量, 得原方程的通解为

$$\frac{1}{y}=\frac{C}{x}+\frac{x^2}{3}.$$

此外, $y=0$ 也是原方程的解. □

习题 10.3

1. 求解下列微分方程:

(1) $(1+x^2)y'-xy+1=0$;　(2) $\sin x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x-y)\cos x=0$;

(3) $y'\sin x-y\cos x=\cot x$;　(4) $y\mathrm{d}x-(x+y^3)\mathrm{d}y=0$;

(5) $y'=\dfrac{y}{y-x}$;　(6) $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$;

(7) $(x^2+1)y'+2xy=4x^2$;　(8) $(x-2xy-y^2)\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$;

(9) $y'+2xy=x\mathrm{e}^{-x^2}$;　(10) $3xy'-y-3xy^4\ln x=0$.

2. 求下列微分方程的通解:

(1) $y'-\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{x}{2}y^{-1}$;　(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=\sin xy^2$;

(3) $y'+\dfrac{1}{x}y=x^2y^6$;　(4) $(x^2y^3+xy)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2(\cos x-\sin x)$;　(6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=xy^5$.

3. 求下列微分方程的初值问题:

(1) $y=xy'+y'\ln y,\ y(1)=1$;　(2) $xy'-2y=x^3\mathrm{e}^x,\ y(1)=0$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}},\ y(0)=0$;　(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=8,\ y(0)=1$;

(5) $y\cos\dfrac{x}{y}\mathrm{d}x+\left(y-x\cos\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

4. 设 $y_0(x)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的解, $y_1(x),y_2(x)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的解, 证明:

(1) $y_0(x)+y_1(x)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的解;

(2) $y_1(x)-y_2(x)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的解.

10.4　全微分方程与积分因子

10.4.1　全微分方程

考虑一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 的对称写法: 地位相同 可能出现 $\begin{cases} y=y_0\text{是奇解} \\ x=x_0\text{是奇解} \end{cases}$ 都要补充.

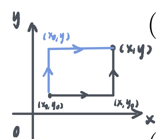
$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0. \tag{10.4.1}$$

定义 10.4.1　若存在可微函数 $\lambda(x,y)$, 使得 $\mathrm{d}\lambda(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 则 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 称为**恰当微分**, 称方程 (10.4.1) 为**全微分方程** (也称**恰当方程**).

易见, 若 $\mathrm{d}\lambda(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 则 $\lambda(x,y)=C$ 为方程 (10.4.1) 的隐式通解, 并且其所有解都包含在通解之中.

我们已经知道: $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 为恰当微分的充要条件是: $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, 这也是方程 (10.4.1) 为全微分方程的充要条件. 并且, $\lambda(x,y)$ 可由下面两式之一确定:

$$\lambda(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y, \tag{10.4.2}$$



或

$$\lambda(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y, \tag{10.4.3}$$

其中 (x_0,y_0) 可从 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 的公共定义域内任意取.

例 10.4.1　求微分方程 $\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x-(2y+x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解　这里 $P(x,y)=\mathrm{e}^{-y}$, $Q(x,y)=-(2y+x\mathrm{e}^{-y})$, 于是 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{e}^{-y}$, 因此这是一个全微分方程. 取 $x_0=0,y_0=0$, 得

$$\begin{aligned}\lambda(x,y)&=\int_0^x\mathrm{d}x+\int_0^y-(2y+x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y\\&=x-y^2+x\mathrm{e}^{-y}-x\\&=-y^2+x\mathrm{e}^{-y}.\end{aligned}$$

从而原方程的通积分为 $-y^2+x\mathrm{e}^{-y}=C$. □

多数情况下, 在判断出一个方程是全微分方程后, 往往采用 "分项组合" 凑全微分的方法来进行求解. 比如上例左边可化为

配凑

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x-(2y+x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y&=\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x-x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{-y}-y^2),\end{aligned}$$

于是原方程化为

$$\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{-y}-y^2)=0,$$

从而原方程的通积分为 $-y^2+x\mathrm{e}^{-y}=C$.

例 10.4.2　求解微分方程 $\left(\cos x+\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$.

解　这里 $P=\cos x+\dfrac{1}{y}$, $Q=\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}$, 并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},$$

于是原方程是全微分方程. 把方程重新 "分项组合", 得到

$$\cos x\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\left(\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)=0,$$

即

$$\mathrm{d}\sin x+\mathrm{d}\ln|y|+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=0,$$

亦即

$$\mathrm{d}\left(\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}\right)=0,$$

故原方程的通积分为

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=C.$$

这里 C 为任意常数. □

10.4.2　积分因子

有些微分方程本身不是全微分方程, 但通过在方程的两边同时乘上一个可微函数后可以化成全微分方程. 积分因子就是为了解决这个问题而引进的概念.

定义 10.4.2　如果存在连续可微函数 $\mu(x,y)$, 使得

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{10.4.4}$$

为全微分方程, 即存在可微函数 $v(x,y)$, 使得

$$\mu P\mathrm{d}x+\mu Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}v,$$

则称 $\mu(x,y)$ 为方程 (10.4.1) 的**积分因子**.

一般来说, 积分因子并不是唯一的. 因此, 在具体求解过程中, 由于积分因子的不同而使通解可能具有不同的形式. 由于方程 (10.4.4) 为全微分方程, 所以

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial y},$$

即

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu. \tag{10.4.5}$$

这是一个以 μ 为未知函数的一阶线性偏微分方程, 要想通过这个方程来求出积分因子是非常困难的. 尽管如此, 在一些特殊情形中, 我们还是可以想办法求出方程 (10.4.5) 的一个特解.

假设方程 (10.4.1) 具有只与 x 有关的积分因子 $\mu=\mu(x)$, 则由式 (10.4.5) 可得

$$-Q\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu(x),$$

如果 $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$ 是只与 x 有关的函数, 记 $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)=\phi(x)$，则上式可化为

$$\mathrm{d}\ \ln\mu(x)=-\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x=-\phi(x)\mathrm{d}x,$$

可求得

$$\mu(x)=\exp\left(-\int\phi(x)\mathrm{d}x\right).$$

综上所述, 我们有

定理 10.4.1 如果 $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q}=\phi(x)$, 则方程 (10.4.1) 具有积分因子

$$\mu(x)=\exp\left(-\int\phi(x)\mathrm{d}x\right).$$

类似地, 我们可以得到

定理 10.4.2 如果 $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=\varphi(y)$, 则方程 (10.4.1) 具有积分因子

$$\mu(y)=\exp\left(\int\varphi(y)\mathrm{d}y\right).$$

例 10.4.3 求解微分方程 $(\mathrm{e}^x+3y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$.

解 $P(x,y)=\mathrm{e}^x+3y^2$, $Q(x,y)=2xy$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y,\frac{\partial P}{\partial y}=6y.$$

所以

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q}=-\frac{2}{x},$$

故原方程有积分因子

$$\mu(x)=\exp\left(\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x\right)=x^2,$$

用 x^2 乘原方程两端, 得

$$x^2(\mathrm{e}^x+3y^2)\mathrm{d}x+2x^3y\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\mathrm{d}[(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x]+\mathrm{d}(x^3y^2)=0,$$

从而原方程的通积分为

$$(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x+x^3y^2=C. \qquad \square$$

有时, 我们也可以用观察法求得微分方程的一个积分因子. 此时, 我们往往可利用下列公式来观察出原方程的一个积分因子：

(1) $\mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$;

(2) $\mathrm{d}(x^2\pm y^2)=2(x\mathrm{d}x\pm y\mathrm{d}y)$;

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}$;

(4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}$;

(5) $\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$;

(6) $\mathrm{d}\left(\ln\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\dfrac{2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{x^2-y^2}$;

(7) $\mathrm{d}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\dfrac{2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{(x-y)^2}$.

例 10.4.4　求解微分方程 $(x^2\cos x-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

解　将方程变形为

$$x^2\cos x\mathrm{d}x+(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0,$$

两边乘以 $\dfrac{1}{x^2}$, 得

$$\cos x\mathrm{d}x+\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=0,$$

即

$$\mathrm{d}(\sin x)+\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0,$$

从而原方程的通积分为 $\sin x+\dfrac{y}{x}=C$, $x=0$ 是奇解. $\square$

习题 10.4

1. 判断下列微分方程是否为全微分方程 (其中 $f(x)$ 为连续可微函数)：

(1) $x^2(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2(1-2x^2)xy=f(x)$;

(2) $f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$;

(3) $\dfrac{f\left(\dfrac{y}{x}\right)}{x^2+y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0$.

2. 解下列微分方程：

(1) $(3x^2+4xy)\mathrm{d}x+(2x^2+2y)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(3y^2+y\sin(2xy))\mathrm{d}x+(6xy+x\sin(2xy))\mathrm{d}y=0$;

(3) $\dfrac{x^2y+1}{y}\mathrm{d}x+\dfrac{y-x}{y^2}\mathrm{d}y=0$;

(4) $y(3x^2-y^3+\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}x+x(x^2-4y^3+\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}y=0$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{x+y^2+3}$;

(6) $(\mathrm{e}^x\sin y-2y\sin x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=0$;

(7) $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$;

(8) $(y\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y=0$.

3. 确定常数 A, 使下列微分方程成为全微分方程并求解:

(1) $(x^2+3xy)\mathrm{d}x+(Ax^2+4y)\mathrm{d}y=0$;

(2) $\left(\dfrac{Ay}{x^3}+\dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(Ax^2y+2y^2)\mathrm{d}x+(x^3+4xy)\mathrm{d}y=0$;

(4) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}x+\dfrac{Ax+1}{y^3}\mathrm{d}y=0$.

4. 确定函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$, 使下述微分方程成为全微分方程并求解:

(1) $P(x,y)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x+y^2\mathrm{e}^{3x})\mathrm{d}y=0$;

(2) $(x^{-2}y^{-2}+xy^{-3})\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$;

(3) $P(x,y)\mathrm{d}x+(2x^2y^3+x^4y)\mathrm{d}y=0$;

(4) $(x^3+xy^2)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$.

5. 用积分因子法解下列微分方程:

(1) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+\left(2xy+xy^2+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(3x-2y+2y^2)\mathrm{d}x+(2xy-x)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(2xy+y^2)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$;

(4) $(y+xy+\sin y)\mathrm{d}x+(x+\cos y)\mathrm{d}y=0$;

(5) $(y+6xy^3-4y^4)\mathrm{d}x-(2x+4xy^3)\mathrm{d}y=0$;

(6) $3x^2y\ln y\mathrm{d}x+(2x^3+2y^3+3y^3\ln y)\mathrm{d}y=0$;

(7) $(x^4+y^4)\mathrm{d}x-xy^3\mathrm{d}y=0$;

(8) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x-x(2xy+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$;

(9) $x^2y\mathrm{d}x-(x^3+y^3)\mathrm{d}y=0$;

(10) $2xy^3\mathrm{d}x+(x^2y^2-1)\mathrm{d}y=0$.

6. 找出下列微分方程的积分因子并求其通解:

(1) $x\mathrm{d}y+(y+x^2y^4)\mathrm{d}x=0$;

(2) $y(y-x)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$;

(3) $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=(x^2+4y^2)\mathrm{d}x$;

(4) $(y-xy^2\ln x)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

10.5 解的存在唯一性定理*

前面我们讨论了一阶方程的解的初等积分法, 解决了几类特殊的方程求解问题. 但是, 我们应该指出, 对许多微分方程, 例如方程 $y'=x^2+y^2$, 不可能通过初等积分法求解. 而实际

问题中所需要的往往是要求满足某种初始条件的解. 因此, 对初值问题的研究就被提到了重要的地位. 这就产生了一个问题, 一个不能用初等积分法求解的微分方程是否意味着没有解呢? 或者说, 一个微分方程的初值问题在何种条件下一定有解呢? 当有解时, 它的解是否是唯一的呢?

我们很容易举出解存在而不唯一的例子. 例如方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{y}$$

过点 (0,0) 的解就是不唯一的. 一方面, 易见 $y=0$ 是方程的过点 (0,0) 的解. 另一方面, 容易验证 $y=x^2$ 也是方程的过点 (0,0) 的解.

本节介绍的存在唯一性定理圆满地回答了上面提到的问题, 它是微分方程理论中最基本的定理, 有其重大的理论意义.

我们首先引进一个定义.

定义 10.5.1　函数 $f(x,y)$ 称为在区域 D 上关于 y 满足**利普希茨** (Lipschitz†)**条件**, 如果存在常数 $L>0$, 使得不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$$

对于所有 $(x,y_1),(x,y_2)\in D$ 都成立. 其中 L 称为利普希茨常数.

考虑一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y). \tag{10.5.1}$$

定理 10.5.1 (皮卡 (Picard) 存在唯一性定理)　如果 $f(x,y)$ 在闭区域 $D:|x-x_0|\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$ 上连续且关于 y 满足利普希茨条件, 则方程 (10.5.1) 存在唯一的解 $y=\phi(x)$, 它在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上连续, 且满足初始条件 $\phi(x_0)=y_0$, 这里 $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$.

为了方便, 我们仅就 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 来证明. 下面我们分五个引理来证明这个定理.

引理 1　$y=\phi(x)$ 是方程 (10.5.1) 的定义在区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上, 且满足初始条件 $\phi(x_0)=y_0$ 的解, 当且仅当 $y=\phi(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上连续且满足

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x\quad(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h). \tag{10.5.2}$$

证明　由于 $y=\phi(x)$ 是方程 (10.5.1) 的解, 故

$$\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,\phi(x)).$$

两边从 x_0 到 x 积分, 得

$$\phi(x)-\phi(x_0)=\int_{x_0}^{x}f(x,\phi(x))\mathrm{d}x,(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h),$$

† 利普希茨 (Lipschitz R O S, 1832~1903), 德国数学家.

即

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x,(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h). \tag{10.5.3}$$

另一方面, 若 $y=\phi(x)$ 满足式 (10.5.2), 两边求导, 得到

$$\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,\phi(x)),(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h).$$

把 $x=x_0$ 代入式 (10.5.3), 得到 $\phi(x_0)=y_0$. 因此 $y=\phi(x)$ 是方程 (10.5.1) 满足初始条件 $\phi(x_0)=y_0$ 的解. □

我们现在来构造皮卡逐步逼近函数序列如下:

$$\begin{cases}\phi_0(x_0)=y_0,\\ \phi_n(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}f(t,\phi_{n-1}(t))\mathrm{d}t,(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h).\end{cases} \tag{10.5.4}$$

引理 2 对于所有的 n, 式 (10.5.4) 中的函数 $\phi_n(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义, 连续而且满足不等式

$$|\phi_n(x)-y_0|\leqslant b. \tag{10.5.5}$$

证明 我们采用数学归纳法来证明.

当 $n=1$ 时, $\phi_1(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}f(t,y_0)\mathrm{d}t$. 易见 $\phi_1(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义, 连续而且

$$\begin{aligned}|\phi_1(x)-y_0|&=\left|\int_{x_0}^{x}f(t,y_0)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(t,y_0)|\mathrm{d}t\\&\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b.\end{aligned}$$

所以原命题当 $n=1$ 时成立. 假设原命题当 $n=k$ 时成立, 即 $\phi_k(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义, 连续而且满足

$$|\phi_k(x)-y_0|\leqslant b,$$

由于

$$\phi_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi_k(t))\mathrm{d}t,$$

由归纳假设可知 $\phi_{k+1}(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义, 连续而且满足

$$|\phi_{k+1}(x)-y_0|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(t,\phi_k(t))|\mathrm{d}t\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b.$$

故原命题当 $n=k+1$ 时也成立. 由归纳原理可知引理 2 成立. □

引理 3 函数序列 $\{\phi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛.

证明 注意到函数项级数

$$\phi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\phi_k(x)-\phi_{k-1}(x)],(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h) \tag{10.5.6}$$

的部分和为

$$\phi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}[\phi_k(x)-\phi_{k-1}(x)]=\phi_n(x).$$

我们只需要证明级数 (10.5.6) 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛. 利用数学归纳法, 可以证明

$$|\phi_k(x)-\phi_{k-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k, x_0\leqslant x\leqslant x_0+h.$$

从而

$$|\phi_k(x)-\phi_{k-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{k-1}}{k!}h^k.$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{ML^{k-1}}{k!}h^k$ 收敛, 从而 $\{\phi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛. 引理 3 证毕.

现设

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\phi(x).$$

则 $\phi(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义, 连续且满足

$$|\phi(x)-y_0|\leqslant b.$$ □

引理 4　当 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 时, $\phi(x)$ 满足

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi(t))\mathrm{d}t.$$

证明　对式 (10.5.4) 两边取极限, 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)&=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,\phi_{n-1}(t))\mathrm{d}t\\&=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(t,\phi_{n-1}(t))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

即

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi(t))\mathrm{d}t.$$ □

引理 5　$y=\phi(x)$ 是方程 (10.5.1) 满足初始条件 $\phi(x_0)=y_0$ 的唯一解.

证明　假设 $y=\varphi(x)$ 也是方程 (10.5.1) 满足初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的解, 则

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\mathrm{d}t.$$

利用数学归纳法, 容易证明

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\phi_n(x)|&\leqslant\frac{1}{(n+1)!}ML^n|x-x_0|^{n+1}\\&\leqslant\frac{1}{(n+1)!}ML^nh^{n+1}.\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}ML^nh^{n+1}=0,$$

从而 $\{\phi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$, 由收敛函数的唯一性, 可知 $\varphi(x)=\phi(x)$. □

根据引理 1 到引理 5, 我们就证明了定理 10.5.1.

10.6 高阶微分方程

下面我们讨论高阶微分方程的解法, 主要介绍可降阶的高阶微分方程以及高阶线性微分方程的解法.

10.6.1 可降阶的高阶微分方程

(1) 形如

$$y^{(n)}=f(x) \tag{10.6.1}$$

的微分方程.

容易看到, 微分方程 (10.6.1) 的右端是只与 x 有关的函数. 令 $y_1=y^{(n-1)}$, 则式 (10.6.1) 化为

$$y^{(n)}=(y_1)'=\frac{dy_1}{dx} \quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=f(x).$$

解得 $y^{(n-1)}=y_1=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$, 即 $y^{(n-1)}=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$. 再令 $y_2=y^{(n-2)}$, 则上式化为

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

解得 $y^{(n-2)}=y_2=\displaystyle\int\left(\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right)\mathrm{d}x+C_2$. 按照这个方法一直继续下去, 连续积分 n 次, 便得到方程 (10.6.1) 的含有 n 个任意独立常数的解, 即通解.

例 10.6.1 求微分方程

$$y'''=x+\sin x$$

的通解.

解 对原方程两边连续积分 3 次, 得

$$y''=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1,$$

$$y'=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2,$$

$$y=\frac{1}{24}x^4+\cos x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$ □

(2) 形如

$$f(x,y',y'')=0 \tag{10.6.2}$$

的微分方程.

这种方程的特点是方程中不显含 y. 我们可采用如下方法把它化为一阶微分方程来求解. 令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 于是方程 (10.6.2) 化为

$$f\left(x, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

这是一个以 x 为自变量, 以 p 为未知函数的一阶微分方程, 若能解得其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, C_1)$. 而这又是一个以 x 为自变量, 以 y 为未知函数的一阶微分方程. 若能求得其通解为 $y = \psi(x, C_1, C_2)$, 这就是方程 (10.6.2) 的通解.

例 10.6.2　求微分方程

$$xy'' + y' = 4x$$

的通解.

$$\frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = 4.$$

解　令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程, 得

$$x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + p = 4x,$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{p}{x} = 4.$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int (Q(x)e^{\int P(x)dx})dx\right).$$

这是一阶线性微分方程, 由公式 (10.3.2) 得

$$p = 2x + \frac{C_1}{x},$$

$$p = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int (4e^{\int \frac{1}{x}dx})dx\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(C + \int 4x\,dx\right) = \frac{1}{x}(C + 2x^2)$$

$$= 2x + \frac{C}{x}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + \frac{C_1}{x},$$

两边积分, 得原方程的通解为

$$y = x^2 + C_1 \ln|x| + C_2.$$ □

例 10.6.3　求微分方程

$$(1 - x^2)y'' = (3x + 1)y'$$

满足初值条件

$$y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$$

的解.

解　令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 于是原方程化为

$$(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = (3x + 1)p.$$

这是一个可分离变量的方程, 分离变量后, 化成

$$\frac{1}{p}\mathrm{d}p = \frac{3x + 1}{1 - x^2}\mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{1}{p}\mathrm{d}p=\left(\frac{2}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x.$$

两边积分, 得

$$p=\frac{C_1}{(1+x)(1-x)^2}.$$

由初值条件 $y'|_{x=0}=1$, 即 $p|_{x=0}=1$ 代入上式, 得 $C_1=1$, 于是

$$p=\frac{1}{(1+x)(1-x)^2},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(1+x)(1-x)^2},$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}\right).$$

这又是一个可分离变量的方程, 解得

$$y=\frac{1}{4}\left(\ln|1+x|-\ln|1-x|+\frac{2}{1-x}\right)+C_2.$$

根据初值条件: $y|_{x=0}=1$, 代入上式, 得到 $C_2=\dfrac{1}{2}$, 故原方程满足初值条件的解为

$$y=\frac{1}{4}\left(\ln|1+x|-\ln|1-x|+\frac{2}{1-x}\right)+\frac{1}{2}.$$ □

(3) 形如

$$f(y,y',y'')=0 \tag{10.6.3}$$

的微分方程.

这种方程的特点是方程中不显含 x. 我们可采用如下方法把它化为一阶方程来求解. 令 $y'=p(y)$, 我们把 p 看成是 y 的函数, 则

$$\boxed{y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},}$$

于是方程 (10.6.3) 化为

$$f\left(y,p,p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)=0,$$

这是一个以 y 为自变量, 以 p 为未知函数的一阶微分方程, 若能解得其通解为 $p=\varphi(y,C_1)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$. 而这又是一个以 x 为自变量, 以 y 为未知函数的一阶微分方程. 若能求得其通解为 $y=\psi(x,C_1,C_2)$, 这就是方程 (10.6.3) 的通解.

例 10.6.4　求微分方程

$$y''=\frac{(y')^2}{y+(y')^2}$$

满足初值条件

$$y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=1$$

的解.

解　令 $y' = p(y), y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 于是原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{p}{y+p^2},$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int \left(Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\right)dx\right).$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} - \frac{1}{p}y = p.$$

$$y = e^{\int \frac{1}{p}dp}\left(C + \int p e^{\int(-\frac{1}{p})dp} dp\right)$$

把上式看成以 p 为自变量, 以 y 为未知函数的一阶线性微分方程, 其通解为

$$y = p(C_1 + p).$$

$$y = p(C_1 + p).$$

由初值条件：$y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$, 代入上式, 得 $C_1 = 0$, 于是

$$y = p^2,$$

$$y = p^2 \qquad y = y'^2$$

由此及初值条件, 可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}.$$

这是一个可分离变量的微分方程, 解得

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \qquad x = 2\sqrt{y} + C_2$$

$$x = 2\sqrt{y} + C_2,$$

根据初值条件 $y|_{x=0} = 1$ 代入上式, 得 $C_2 = -2$, 所以原方程满足初值条件的解为

$$x = 2\sqrt{y} - 2,$$

即

$$y = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2.$$

$$y'' = \frac{3}{4(1+t)} \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\boxed{2}+2t}$$

10.6.2　二阶线性微分方程

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d\left(\frac{\varphi'(t)}{2+2t}\right)}{dt}\cdot\frac{\varphi'(t)}{2+2t} = \frac{\varphi''(t)(1+t) - \varphi'(t)}{2(1+t)^2}\cdot\frac{1}{2(1+t)}$$

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$= \frac{\varphi''(t)(1+t) - \varphi'(t)}{4(1+t)^3} = \frac{3}{4(1+t)}$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x), \tag{10.6.4}$$

$$\frac{\varphi''(t)}{4(1+t)} - \frac{\varphi'(t)}{4(1+t)^2} = \frac{3}{4}$$

当方程右端 $f(x) \equiv 0$ 时, 对应的方程

$$\varphi''(t) - \frac{\varphi'(t)}{1+t} = 3(1+t).$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{10.6.5}$$

称为 n **阶齐次线性微分方程**. 否则称为 n **阶非齐次线性微分方程**.

在本节我们主要讨论二阶线性微分方程. 形如

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{10.6.6}$$

的方程称为**二阶线性微分方程**. 当方程右端 $f(x) \equiv 0$ 时, 对应的方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{10.6.7}$$

称为**二阶齐次线性微分方程**. 否则称为**二阶非齐次线性微分方程**.

一、朗斯基行列式与函数组的线性无关性

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的 $(n-1)$ 阶可微函数, 行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

称为 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 的朗斯基 (Wronski‡) 行列式.

设函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为齐次线性微分方程 (10.6.5) 的解, 它们在区间 $[a,b]$ 上有定义, 若其朗斯基行列式

$$W(x)=W(y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x))=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

则称 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上**线性相关**; 否则称它们在 $[a,b]$ 上**线性无关**.

下面介绍一个著名的公式, 即刘维尔公式.

定理 10.6.1 (刘维尔公式) 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程 (10.6.7) 的两个解, 则它们的朗斯基行列式满足

$$W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}, \tag{10.6.8}$$

其中 x_0 为 $[a,b]$ 上的任意一点.

证明 根据朗斯基行列式的定义

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} &= y_1'(x)y_2'(x)+y_1(x)y_2''(x)-y_2'(x)y_1'(x)-y_2(x)y_1''(x) \\ &= y_1(x)y_2''(x)-y_2(x)y_1''(x) \\ &= y_1(x)[-p(x)y_2'(x)-q(x)y_2(x)]+y_2(x)[p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)] \\ &= p(x)[y_2(x)y_1'(x)-y_1(x)y_2'(x)] \\ &= -p(x)W(x), \end{aligned}$$

‡ 朗斯基 (Wronski H J M, 1778~1853), 波兰数学家.

即

$$\frac{\mathrm{d}W(x)}{W(x)} = -p(x)\mathrm{d}x,$$

$$\ln|W(x_0)||_{x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x} p(x)dx$$

$$\frac{W(x)}{W(x_0)} = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$$

上式两边从 x_0 到 x 积分, 得

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}. \qquad \square$$

注　由刘维尔公式可得: 对于二阶齐次线性微分方程 (10.6.7) 的两个解 $y_1(x), y_2(x)$, 若存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得其朗斯基行列式 $W(x_0) = 0$, 则对于一切 $x \in [a,b]$, 有 $W(x) = 0$, 于是这两个解在 $[a,b]$ 上线性相关; 若存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得其朗斯基行列式 $W(x_0) \neq 0$, 则对于一切 $x \in [a,b]$, 有 $W(x) \neq 0$, 于是这两个解 $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关.

二、二阶齐次线性微分方程解的结构

我们首先来探讨二阶齐次线性微分方程 (10.6.7) 的解的结构.

定理 10.6.2　设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程 (10.6.7) 的两个解, 则

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

是方程 (10.6.7) 的解, 其中 C_1, C_2 是任意常数.

证明　由于 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程 (10.6.7) 的两个解, 则

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0,$$

并且

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0,$$

将 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 代入方程 (10.6.7) 的左边, 得

$$\begin{aligned}
&y'' + p(x)y' + q(x)y \\
=&[C_1y_1'' + C_2y_2''] + p(x)[C_1y_1' + C_2y_2'] + q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\
=&C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\
=&0.
\end{aligned}$$

这说明 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程 (10.6.7) 的解. $\square$

定理 10.6.3　设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程 (10.6.7) 的两个线性无关的解, 则

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

是方程 (10.6.7) 的通解, 其中 C_1, C_2 是两个独立的任意常数.

证明　由定理 10.6.2 以及微分方程通解的定义, 我们只需证明 C_1, C_2 是两个独立的任意常数即可. 因为 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程 (10.6.7) 的两个线性无关的解, 所以

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

由式 (10.1.5) 可知

$$\frac{D(y, y')}{D(C_1, C_2)} = W(x) \neq 0.$$

所以 C_1, C_2 为 y 中两个独立的任意常数, 故 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程 (10.6.7) 的通解. □

定理 10.6.3 可以推广到 n 阶齐次线性微分方程通解的结构.

定理 10.6.4 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关的解, 则此方程的通解为

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x),$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数.

一般来说, 要找到方程 (10.6.7) 的两个线性无关的解是比较困难的, 但如果我们能够设法 (例如用观察法) 找到一个解, 则我们可以用刘维尔公式求出另一个解, 从而求得方程 (10.6.7) 的通解.

多项式：$y=C_nx^n+\cdots+C_1x+C_0$ / $y=\sin kx$ / $\cos kx$ / $y=e^{kx}$ ⋯

例 10.6.5 求微分方程

$$xy'' - y' + (1-x)y = 0$$

的通解.

解 容易验证 $y_1 = \mathrm{e}^x$ 为原方程的一个解. 下面我们用刘维尔公式来求原方程的另一个特解 $y_2 = y_2(x)$. 先把原方程化为标准形式

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1-x}{x}y = 0,$$

由刘维尔公式, 有

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & y_2(x) \\ \mathrm{e}^x & y_2'(x) \end{vmatrix} = c_1\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x},$$

$\ln x$

化简后得到

$$y_2' - y_2 = c_1x\mathrm{e}^{-x},$$

$y_2' - y_2 = C_1 x e^{-x}$

这是一阶线性微分方程, 其通解为

$$\begin{aligned} y_2 &= \mathrm{e}^x\left[c_2 + c_1\int x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\right] \\ &= \mathrm{e}^x\left[c_2 - c_1\left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right)\right]. \end{aligned}$$

由于我们只需要求得一个特解, 因此, 不妨取 $c_1 = -4, c_2 = 0$, 从而得到原方程的另一个特解为

$$y_2 = 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}.$$

故原方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2(2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. □

注 注意到 y_2 的表达式中含有两个独立的任意常数, 因此它实际上是原方程的通解.

三、二阶非齐次线性微分方程解的结构

下面我们讨论二阶非齐次线性微分方程 (10.6.6) 解的结构.

定理 10.6.5　设 $y_1^*(x)$ 是非齐次线性微分方程 (10.6.6) 的一个特解, 又 $y_2^*(x)$ 是对应的齐次线性微分方程 (10.6.7) 的解, 则 $y^*(x)=y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是非齐次线性微分方程 (10.6.6) 的解.

证明　由假设条件可知

$$(y_2^*)''+p(x)(y_2^*)'+q(x)y_2^*=0,$$

并且

$$(y_1^*)''+p(x)(y_1^*)'+q(x)y_1^*=f(x),$$

所以

$$\begin{aligned}&(y^*)''+p(x)(y^*)'+q(x)y^*\\=&[y_1^*(x)+y_2^*(x)]''+p(x)[y_1^*(x)+y_2^*(x)]'+q(x)[y_1^*(x)+y_2^*(x)]\\=&[(y_1^*)''+p(x)(y_1^*)'+q(x)y_1^*]+[(y_2^*)''+p(x)(y_2^*)'+q(x)y_2^*]\\=&f(x)+0\\=&f(x).\end{aligned}$$

□

定理 10.6.6　设 $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ 是非齐次线性微分方程 (10.6.6) 的两个特解, 则 $y_1^*(x)-y_2^*(x)$ 是对应的齐次线性微分方程 (10.6.7) 的解.

证明　由假设条件可知

$$(y_1^*)''+p(x)(y_1^*)'+q(x)y_1^*=f(x),$$

并且

$$(y_2^*)''+p(x)(y_2^*)'+q(x)y_2^*=f(x),$$

上述两式相减, 得

$$(y_1^*-y_2^*)''+p(x)(y_1^*-y_2^*)'+q(x)(y_1^*-y_2^*)=0.$$

□

定理 10.6.7　设 $y^*(x)$ 是非齐次线性微分方程 (10.6.6) 的一个特解, 又 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是对应的齐次线性微分方程 (10.6.7) 的通解, 则

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x) \tag{10.6.9}$$

是非齐次线性微分方程 (10.6.6) 的通解.

证明　先证式 (10.6.9) 是方程 (10.6.6) 的解. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}&y''+p(x)y'+q(x)y\\=&[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]''+p(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]'\\&+q(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]+(y^*)''+p(x)(y^*)'+q(x)y^*\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + f(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

因此式 (10.6.9) 是方程 (10.6.6) 的解.

另一方面, 由于式 (10.6.9) 中的两个任意常数是独立的, 故它是方程 (10.6.6) 的通解. □

定理 10.6.8 设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 分别是非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

以及

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的解, 则函数 $y = y_1(x) + y_2(x)$ 是非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的解.

证明

$$
\begin{aligned}
& y'' + p(x)y' + q(x)y \\
={}& (y_1 + y_2)'' + p(x)(y_1 + y_2)' + q(x)(y_1 + y_2) \\
={}& [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + [y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\
={}& f_1(x) + f_2(x).
\end{aligned}
$$

□

定理 10.6.7 也可推广到 n 阶线性微分方程的情形.

定理 10.6.9 设 $y^*(x)$ 是非齐次线性微分方程 (10.6.4) 的一个特解, 又 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ 是对应的齐次线性微分方程 (10.6.5) 的通解, 则

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) + y^*(x)$$

是非齐次线性微分方程 (10.6.4) 的通解.

四、常数变易法

由定理 10.6.7 可知, 只要找到非齐次线性微分方程 (10.6.6) 的一个特解以及它所对应的齐次线性微分方程 (10.6.7) 的两个线性无关的解, 就能得到非齐次线性微分方程 (10.6.6) 的通解. 对于一般的线性微分方程来说, 要做到这两点也不是一件容易的事情. 但是, 如果我们能知道齐次线性微分方程 (10.6.7) 的两个线性无关的解, 那么, 在某些情况下, 我们可以通过所谓的 "常数变易法" 求得非齐次线性微分方程 (10.6.6) 的一个特解, 进而求出其通解.

假设 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次线性微分方程 (10.6.7) 的两个线性无关的解, 则由定理 10.6.3 可知, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程 (10.6.7) 的通解. 下面我们来寻求非齐次线性微分方程 (10.6.6) 的形如

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{10.6.10}$$

的特解 (注意我们将通解中的两个任意常数 C_1, C_2 分别换成了两个待定的函数 $C_1(x), C_2(x)$, 这就是 "**常数变易法**" 的由来).

为了找到函数 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$, 对式 (10.6.10) 两边求导, 得

$$(y^*)' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \underline{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)}, \tag{10.6.11}$$

由于我们的目的并不是要求出所有满足条件的 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$, 我们只需找到某两个 $C_1(x)$, $C_2(x)$, 使得 y^* 为方程 (10.6.6) 的解即可. 为此, 我们令

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{10.6.12}$$

加上这个条件的好处是可以避免在 $(y^*)''$ 的表达式中出现 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$ 的二阶导数. 这样一来, 我们就有

$$(y^*)' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x), \tag{10.6.13}$$

对上式两边再求一次导数, 得

$$(y^*)'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x), \tag{10.6.14}$$

将式 (10.6.10), 式 (10.6.13), 式 (10.6.14) 代入方程 (10.6.6) 并利用 $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ 以及 $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$ 化简, 得到

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{10.6.15}$$

联立式 (10.6.12) 与式 (10.6.15), 我们得到以 $C_1'(x), C_2'(x)$ 为未知函数的方程组

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}}$$

注意到上面方程组的系数矩阵行列式恰好是关于 $y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x)$. 由于 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (10.6.7) 的线性无关的解, 所以 $W(x) \neq 0$. 这意味着由这个方程组能唯一地解出未知函数 $C_1'(x)$ 与 $C_2'(x)$. 积分后, 便可以求出 $C_1(x), C_2(x)$. 于是我们就找到了方程 (10.6.6) 的一个形如 $y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ 的特解.

综上所述, 我们有

定理 10.6.10　若函数 $C_1(x), C_2(x)$ 满足方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \tag{10.6.16}$$

其中 $y_1(x), y_2(x)$ 为齐次线性微分方程 (10.6.7) 的两个线性无关的解, 则非齐次线性微分方程 (10.6.6) 有特解

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

上述结论也可以推广到 n 阶线性微分方程的情形.

定理 10.6.11 若函数 $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$ 满足方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \cdots\cdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x), \end{cases} \tag{10.6.17}$$

其中 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为齐次线性微分方程 (10.6.5) 的 n 个线性无关的解, 则 n 阶非齐次线性微分方程 (10.6.4) 有特解

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x).$$

例 10.6.6 求微分方程 $xy'' - y' + (1-x)y = 4x^2\mathrm{e}^x$ 的通解.

解 在例 10.6.5 中, 我们已经求得方程 $xy'' - y' + (1-x)y = 0$ 的通解

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2(2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}).$$

下面我们用常数变易法来求得方程 $xy'' - y' + (1-x)y = 4x^2\mathrm{e}^x$ 的通解. 先将原方程化为标准形式:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1-x}{x}y = 4x\mathrm{e}^x,$$

由方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)(2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}) = 0, \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)(\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x}) = 4x\mathrm{e}^x, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1'(x) = 2x + 1, \\ C_2'(x) = -\mathrm{e}^{2x}, \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} C_1(x) = x^2 + x, \\ C_2(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1(x) = x^2 + x + K_1, \\ C_2(x) = -\dfrac{1}{2}e^{2x} + K_2, \end{cases}$$

因此原方程的通解为

$$y = (x^2 + x + C_1)\mathrm{e}^x + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_2\right)(2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}).$$ □

常数变易法的思想还可以用于求解一阶线性微分方程的通解.

例 10.6.7 用常数变易法求一阶线性微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的通解.

解　由 10.3 节知, 原方程所对应的齐次方程

$$y' + P(x)y = 0$$

的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

把上式中的 C 换成未知函数 $C(x)$, 得

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{10.6.18}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{10.6.19}$$

将式 (10.6.18) 和式 (10.6.19) 代入原方程, 得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x),$$

即

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x),$$

亦即

$$C'(x) = Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

两边积分, 得

$$C(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C,$$

所以原方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right). \qquad \square$$

10.6.3　二阶线性常系数微分方程

在上一节中, 我们已经给大家介绍了二阶线性微分方程的解的结构. 我们发现对于一般的线性微分方程, 还是很难把其通解求出来. 但是, 如果所给的方程是二阶线性常系数微分方程, 则我们就比较容易求出其通解.

一、齐次线性常系数微分方程

我们首先来讨论方程

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{10.6.20}$$

其中 p, q 为给定的实数.

根据定理 10.6.3, 我们只需找到方程 (10.6.20) 的两个线性无关的解.

我们先来寻求方程 (10.6.20) 的形如 $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ 的解. 把 $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ 代入方程 (10.6.20) 得

$$\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} + p\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + q\mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

注意到 $\mathrm{e}^{\lambda x}\neq 0$, 上式等价于

$$\lambda^2+p\lambda+q=0, \tag{10.6.21}$$

因此我们有

定理 10.6.12　$y=\mathrm{e}^{\lambda x}$ 为方程 (10.6.20) 的解的充分必要条件是 λ 满足方程 (10.6.21).

我们把关于 λ 的方程 (10.6.21) 称为微分方程 (10.6.20) 的**特征方程**. 这是一个二次代数方程, 有两个根, 其每个根 λ 都对应微分方程 (10.6.20) 的一个特解 $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$. 下面我们针对方程 (10.6.21) 的根的情况来分别讨论微分方程 (10.6.20) 的通解.

定理 10.6.13　若方程 (10.6.21) 有两个不等的实根 λ_1,λ_2, 则方程 (10.6.20) 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

证明　由定理 10.6.12 可知, $\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 为方程 (10.6.20) 的两个特解. 又因为

$$W(x)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\\ \lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0,$$

所以 $\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 是方程 (10.6.20) 的两个线性无关的解, 由定理 10.6.3, 方程 (10.6.20) 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$ □

定理 10.6.14　若特征方程 (10.6.21) 有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$, 则方程 (10.6.20) 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

证明　此时方程 (10.6.20) 有一个特解 $y_1=\mathrm{e}^{\lambda x}$, 还需求出另一个特解 y_2. 由刘维尔公式, 得

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{\lambda x} & y_2(x)\\ \lambda\mathrm{e}^{\lambda x} & y_2'(x)\end{vmatrix}=c_1\mathrm{e}^{-px},$$

化简后得到

$$y_2'-\lambda y_2=c_1\mathrm{e}^{-(p+\lambda)x},$$

所以

$$y_2=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[c_2+c_1\int\mathrm{e}^{-(p+\lambda)x}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right],$$

即

$$y_2=\mathrm{e}^{\lambda x}(c_2+c_1x).$$

取 $c_2=0,c_1=1$, 得 $y_2=x\mathrm{e}^{\lambda x}$. 因此方程 (10.6.20) 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$ □

定理 10.6.15　若特征方程 (10.6.21) 有一对复根 $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $\lambda_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$, 其中 $\beta\neq 0$, 则方程 (10.6.20) 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

证明　由定理 10.6.12, $y_1=\mathrm{e}^{\lambda_1 x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x)$ 以及 $y_2=\mathrm{e}^{\lambda_2 x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x-\mathrm{i}\sin\beta x)$ 是方程 (10.6.20) 的两个复值函数解. 令

$$y_1^*=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2^*=\frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1-y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

又由定理 10.6.2, y_1^*,y_2^* 是方程 (10.6.20) 的两个解. 由于

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1^* & y_2^* \\ (y_1^*)' & (y_2^*)' \end{vmatrix}=\beta\mathrm{e}^{2\alpha x}\neq 0,$$

所以 y_1^*,y_2^* 为方程 (10.6.20) 的两个线性无关的解. 因此方程 (10.6.20) 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$ □

对于 n 阶齐次线性常系数微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_ny=0,$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是实数, 也可以用类似的方法求出其通解. 首先求出特征方程

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_n=0$$

的 n 个特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(允许有重根). 然后根据下表, 可写出每个特征根所对应的线性无关的特解.

特征根	对应的线性无关的特解
单实根 λ	$\mathrm{e}^{\lambda x}$
k 重实根 $\lambda(k>1)$	$\mathrm{e}^{\lambda x},x\mathrm{e}^{\lambda x},\cdots,x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$
单共轭复根 $\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$
m 重共轭复根 λ_1,λ_2 $=\alpha\pm\mathrm{i}\beta(m>1)$	$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,\cdots,$ $x^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,x^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$

例 10.6.8　求微分方程 $y''-3y'-4y=0$ 的通解.

解　原方程的特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda-4=0,$$

其特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=4$, 因此原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{4x}.$$ □

例 10.6.9　求微分方程 $y''+2y'+y=0$ 满足 $y|_{x=0}=2,y'|_{x=0}=1$ 的解.

解　所给微分方程的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+1=0,$$

它有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, 因此原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x},$$

将条件 $y|_{x=0}=2$ 代入通解, 得 $C_1=2$, 从而

$$y=(2+C_2x)\mathrm{e}^{-x},$$

于是

$$y'=(C_2-2-C_2x)\mathrm{e}^{-x},$$

将条件 $y'|_{x=0}=1$ 代入上式, 得 $C_2=3$. 所以原方程满足条件的解为 $y=(2+3x)\mathrm{e}^{-x}$. □

例 10.6.10 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

解 原方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+5=0,$$

它有一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=1\pm 2\mathrm{i}$. 因此所求通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$ □

例 10.6.11 求微分方程 $y^{(4)}+2y''+y=0$ 的通解.

解 原方程的特征方程为

$$\lambda^4+2\lambda^2+1=0,$$

即

$$(\lambda^2+1)^2=0,$$

因此 $\lambda=\pm\mathrm{i}$ 为特征方程的二重根. 故原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$ □

二、非齐次线性常系数微分方程

现在我们来讨论二阶非齐次线性常系数微分方程

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{10.6.22}$$

的求解问题. 根据前面几段的结果, 这个问题可视为已经解决了, 因为我们可以先求出方程 (10.6.22) 所对应的齐次方程的通解. 然后用常数变易法求得方程 (10.6.22) 的一个特解, 就求出了方程 (10.6.22) 的通解. 但是, 用常数变易法求方程 (10.6.22) 的特解往往比较烦琐, 而且必须经过积分运算. 下面我们来介绍当 $f(x)$ 为某些比较特殊的函数时求方程 (10.6.22) 的特解所采用的另一种方法, 即所谓的**待定系数法**. $y''+py'+qy=f(x)$

定理 10.6.16 设 $f(x)=(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)\mathrm{e}^{\mu x}$, 其中 μ 以及 $a_i\ (i=0,1,\cdots,m)$ 为实常数, 则方程 (10.6.22) 有形如
复

$$y^*=x^k(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)\mathrm{e}^{\mu x} \tag{10.6.23}$$

的特解, 其中 k 为 μ 是特征方程 $F(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q=0$ 根的重数(当 μ 不是特征根时, 规定 $k=0$), 而 $A_0,A_1,\cdots,A_m$ 为待定常数.

证明　(1) 当 $\mu=0$ 时,

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m.$$

我们考虑如下几种情况：

(i) $\lambda=0$ 不是特征方程 $F(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根, 即 $F(0)\neq 0$.

此时我们有 $q\neq 0$. 我们用 $y^*=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m$ 代入方程 (10.6.22) 的左边. 注意到在这种情况下方程 (10.6.22) 的左右两边都是关于 x 的 m 次多项式, 比较两边关于 x 的同次幂的系数, 即可确定 $A_0,A_1,\cdots,A_m$.

(ii) 若 $\lambda=0$ 为特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的单重根.

此时我们有 $q=0$, 且 $p\neq 0$. 我们用 $y^*=x(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)$ 代入方程 (10.6.22) 的左边. 注意到在这种情况下方程 (10.6.22) 的左右两边都是关于 x 的 m 次多项式, 比较两边关于 x 的同次幂的系数, 即可确定 $A_0,A_1,\cdots,A_m$.

(iii) 若 $\lambda=0$ 为特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的二重根.

此时我们有 $q=0$, 且 $p=0$. 我们用 $y^*=x^2(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)$ 代入方程 (10.6.22) 的左边. 注意到在这种情况下方程 (10.6.22) 的左右两边都是关于 x 的 m 次多项式, 比较两边关于 x 的同次幂的系数, 即可确定 $A_0,A_1,\cdots,A_m$.

(2) 当 $\mu\neq 0$ 时,

$$f(x)=(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)\mathrm{e}^{\mu x}.$$

令

$$y=z\mathrm{e}^{\mu x},$$

则

$$y'=\mathrm{e}^{\mu x}(z'+\mu z),$$

并且

$$y''=\mathrm{e}^{\mu x}(z''+2\mu z'+\mu^2 z),$$

于是方程 (10.6.22) 化为

$$z''+(2\mu+p)z'+(\mu^2+\mu p+q)z=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m, \tag{10.6.24}$$

这是一个常系数非齐次线性微分方程. 其特征方程为

$$G(u)=u^2+(2\mu+p)u+(\mu^2+\mu p+q)=0. \tag{10.6.25}$$

(i) $\lambda=\mu$ 不是特征方程 $F(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根, 即 $F(\mu)\neq 0$ 时.

此时我们有 $u=0$ 不是特征方程 $G(u)=0$ 的根, 即 $G(0)\neq 0$, 根据情形 (1)(i) 的讨论, 方程 (10.6.24) 有形如

$$z^*=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m$$

的特解, 从而方程 (10.6.22) 有形如

$$y^*=\mathrm{e}^{\mu x}(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)$$

的特解.

(ii) 若 $\lambda=\mu$ 为特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的单根.

此时我们有 $u=0$ 是特征方程 $G(u)=0$ 的单根, 根据情形 (1)(ii) 的讨论, 方程 (10.6.24) 有形如

$$z^*=x(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)$$

的特解, 从而方程 (10.6.22) 有形如

$$y^*=x\mathrm{e}^{\mu x}(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)$$

的特解.

(iii) 若 $\lambda=\mu$ 为特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的二重根.

此时我们有 $\mu^2+p\mu+q=0$, 并且 $2\mu+p=0$. 于是 $u=0$ 是特征方程 $G(u)=0$ 的二重根, 根据情形 (1)(iii) 的讨论, 方程 (10.6.24) 有形如

$$z^*=x^2(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)$$

的特解, 从而方程 (10.6.22) 有形如

$$y^*=x^2\mathrm{e}^{\mu x}(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)$$

的特解. □

例 10.6.12 求方程

$$y''-2y'-3y=(8x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

的通解.

解 原方程所对应的齐次线性常系数微分方程的特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ 有两个不同的实根 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$. 因此原方程所对应的齐次方程的通解为: $\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$. 下面我们来求原方程的形如 $y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ 的特解. 把 y^* 代入原方程, 化简得

$$[-8ax+(2a-4b)]\mathrm{e}^{-x}=(8x+2)\mathrm{e}^{-x},$$

比较两边对应项的系数, 得

$$\begin{cases}-8a=8,\\ 2a-4b=2.\end{cases}$$

由此解得 $a=-1, b=-1$. 于是原方程的通解为: $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-x(x+1)\mathrm{e}^{-x}$. □

更一般地, 我们有如下的结果:

定理 10.6.17 设 $f(x)=[A_s(x)\cos\beta x+B_t(x)\sin\beta x]\mathrm{e}^{\alpha x}$, 其中 α,β 为实常数, 而 $A_s(x)$, $B_t(x)$ 分别为 x 的 s 次, t 次多项式. 令 $m=\max\{s,t\}$, 则方程 (10.6.22) 有形如

$$y^*=x^k[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]\mathrm{e}^{\alpha x}$$

的特解, 这里 k 是 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 根的重数, $P_m(x),Q_m(x)$ 为关于 x 的 m 次多项式.

例 10.6.13　求方程 $y''+4y'+4y=\cos 2x$ 的通解.

解　原方程所对应的齐次线性常系数微分方程的特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ 有特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-2$, 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

下面来求原方程的一个特解. 因为 $\pm 2\mathrm{i}$ 不是特征根, 原方程有形如 $y=A\cos 2x+B\sin 2x$ 的特解, 将它代入原方程并化简, 得

$$8B\cos 2x-8A\sin 2x=\cos 2x,$$

比较两边同类项系数, 得 $A=0, B=\dfrac{1}{8}$. 于是 $y=\dfrac{1}{8}\sin 2x$, 故原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{8}\sin 2x.$$ □

10.6.4　欧拉方程*

形如

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

的 n 阶线性微分方程, 称为 n **阶欧拉方程**, 其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为常数, $f(x)$ 为连续函数.

在本段, 我们主要讨论二阶欧拉方程:

$$x^2y''+p_1xy'+p_2y=f(x). \tag{10.6.26}$$

我们可以通过适当的变量替换把上述方程化为常系数线性微分方程, 事实上, 我们令 $x=\mathrm{e}^t$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y=\frac{1}{x^2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\right]y,$$

代入方程 (10.6.26), 得

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\right]y+p_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y+p_2y=f(\mathrm{e}^t),$$

这是一个二阶常系数线性微分方程, 可以用前面提到的方法求解.

注　当 $x<0$ 时, 可令 $t=\ln|x|$, 其结论同上面一样, 在此不再赘述.

例 10.6.14　求解微分方程: $x^3y''-x^2y'+xy=x^2+1$.

解　原方程化为

$$x^2y''-xy'+y=x+\frac{1}{x},$$

这是一个二阶欧拉方程, 令 $x=\mathrm{e}^t$, 原方程化为

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\right]y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y+y=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}, \tag{10.6.27}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}.$$

上述方程所对应的齐次线性常系数微分方程的特征方程 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ 有重根 $\lambda_1=\lambda_2=1$.

下面来求这个方程的特解. 我们首先来求

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\mathrm{e}^t$$

的一个特解. 由于 $\lambda=1$ 是二重特征根, 上述方程有形如 $y_1=at^2\mathrm{e}^t$ 的特解, 代入后比较两边同类项系数, 可得 $a=\dfrac{1}{2}$. 其次, 我们再来求

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\mathrm{e}^{-t}$$

的特解. 由于 $\lambda=-1$ 不是特征根, 上述方程有特解 $y_2=b\mathrm{e}^{-t}$, 代入后比较两边同类项系数, 可得 $b=\dfrac{1}{4}$. 于是方程 (10.6.27) 的通解为

$$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t+\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t},$$

故原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2\ln|x|)x+\frac{1}{2}x\ln^2|x|+\frac{1}{4x}.$$

□

习题 10.6

1. 解下列微分方程：

(1) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$;　　(2) $x^2y^{(4)}+1=0$;

(3) $y''\tan x-y'+\csc x=0$;　　(4) $xy''=y'+\ln x$;

(5) $y''=\mathrm{e}^xy'^2$;　　(6) $yy''+(y')^2=y'$;

(7) $y''=1+(y')^2$;　　(8) $yy''-(y')^2=y'$.

2. 解下列微分方程的初值问题：

(1) $4\sqrt{y}y''=1, y(0)=y'(0)=1$;　　(2) $y^3y''=-1, y(1)=1, y'(1)=0$;

(3) $xy''-4y'=x^5, y(1)=-1, y'(1)=-4$;

(4) $1+(y')^2=2yy'',\ y(1)=1,\ y'(1)=-1$.

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $yy''+2(y')^2=0$;　　(2) $y^3y''-1=0$;

(3) $y''=1+2(y')^2$;　　(4) $y''=(y')^3+y'$;

(5) $y''=\sqrt{1+(y')^2}$;　　(6) $yy''-(y')^2=0$.

4. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''-2y'+3y=0$;　　(2) $2y''+y'-y=0$;

(3) $y''+8y'+16y=0$;　　(4) $y''+4y=0$;

(5) $3y'' + 2y' = 0$;　(6) $y'' - 4y' + 3y = 0$;

(7) $y'' - 2y' + y = 0$;　(8) $y'' - 6y' + 11y = 0$;

(9) $y''' - 8y = 0$;　(10) $y^{(4)} - 7y^{(3)} + 17y'' - 17y' + 6y = 0$.

5. 对于下列非齐次方程, 指出其特解的形式:

(1) $y'' - 4y = xe^{2x}$;　(2) $y'' + 9y = \sin 2x$;

(3) $y'' + 2y' + 9y = e^x \sin x$;　(4) $y'' - 2y' + y = 5xe^x$;

(5) $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$;　(6) $y'' - y' = x^2 - 1$;

(7) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$;

(8) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$.

6. 求解下列非齐次线性微分方程的通解:

(1) $y'' - 4y = e^{2x}$;　(2) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$;

(3) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \cos x$;　(4) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;

(5) $y'' - 2y = 2x(\cos x - \sin x)$;　(6) $y'' + y = \csc x$;

(7) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$;　(8) $y'' - 6y' + 10y = 5$;

(9) $y'' + y' = x^2 + 1$;　(10) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$;

(11) $y'' - 8y' + 16y = x + xe^{4x}$;　(12) $y'' - y = 4xe^x$;

(13) $y'' - 4y' + 3y = 3e^x \cos 2x$;　(14) $y'' + a^2 y = \sin x \ (a > 0)$;

(15) $y'' + 2y' - 3y = 3x + 1 + \cos x$;

(16) $y''' - 3y'' + 4y = 12x^2 + 48\cos x + 14\sin x$.

7. 求解下列欧拉方程:

(1) $x^2 y'' + \dfrac{5}{2} xy' - y = 0$;　(2) $y'' - \dfrac{1}{x} y' + \dfrac{1}{x^2} y = \dfrac{2}{x}$;

(3) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - 2\ln x$;　(4) $x^2 y'' + xy' - 4y = x^3$;

(5) $x^2 y'' - xy' + 4y = x \sin(\ln x)$;　(6) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x$.

10.7　微分方程应用举例*

利用微分方程求解实际问题的一般步骤是: 分析问题, 设所求未知函数, 建立微分方程, 确定初始条件; 求出微分方程的通解; 根据初始条件确定通解中的任意常数, 求出微分方程相应的特解. 在本节中, 我们将通过一些具体的实例说明微分方程的应用.

例 10.7.1　假设某种细菌的增长速度和当时的细菌数成正比. 如果过 3 小时细菌数即为原来的 2 倍, 那么经过 12 小时应有多少?

解　设在时刻 t 的细菌数为 $y(t)$, 其增长速度为 $\dfrac{dy}{dt}$, 由题意可得 $y(t)$ 所满足的方程为

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

其中 k 为一正的常数. 上述方程的通解为

$$y = Ce^{kt}.$$

假设 $t=0$ 时, 细菌数为 y_0, 则 $y=y_0e^{kt}$. 由题意: $y_0e^{3k}=2y_0$, 所以 $e^{3k}=2$, 经过 12 小时后, $y=y_0e^{12k}=16y_0$, 即此时细菌数为原来的 16 倍. □

例 10.7.2 假设降落伞张开后下降时所受空气阻力与降落伞的下降速率成正比; 又已知伞张开时($t=0$ 时)的速度为 0, 降落伞的质量为 m; 试建立降落伞下降时的速度 v 与时间 t 的关系式.

解 降落伞下降时受到重力 mg 以及阻力 $-kv$ (k 为正常数) 的作用, 其合力为 $mg-kv$, 根据牛顿第二定律可得

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt},$$

即

$$v' + \frac{k}{m}v = g,$$

这是一阶非齐次线性微分方程, 其通解为

$$v = e^{-\frac{k}{m}t}\left(C + \frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}\right),$$

又已知 $t=0$ 时, $v=0$, 代入上式, 得 $C=-\dfrac{mg}{k}$, 故降落伞下降时的速度 v 与时间 t 的关系式满足

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$ □

例 10.7.3 求级数 $1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n$ 的和函数.

解 设 $S(x)=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n$, 容易验证 $S(x)$ 满足方程

$$(1-x)S' = \frac{1}{2}S(x), S(0) = 1.$$

这是一个可分离变量的微分方程, 求得其解为

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$ □

例 10.7.4 一重量为 P 的火车在机车牵引力 F 的作用下, 沿水平铁轨行进, 在行进中所受到的阻力为 $W=a+bv$, 其中 a 和 b 是常数, v 是火车的速度, 试求开车后 t 时刻火车所走过的路程.

解 设开车后 t 时刻火车走过的路程为 S, 则

$$F - (a+bv) = \frac{P}{g}\frac{dv}{dt}, \frac{dS}{dt} = v,$$

即

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{bg}{P}\frac{dS}{dt} = \frac{g(F-a)}{P}, \tag{10.7.1}$$

并且 $S\big|_{t=0}=0, \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v\big|_{t=0}=0$. 容易求得方程 (10.7.1) 的通解为

$$S=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t}+\frac{F-a}{b}t.$$

将初值条件代入, 得

$$S=\frac{(F-a)t}{b}-\frac{P(F-a)}{b^2g}(1-\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t}).$$ □

习题 10.7

1. 平面曲线过点 $(2,3)$, 其每条切线在两坐标轴之间的部分都被切点平分, 求该曲线的方程.
2. 一平面曲线 l 过原点, 从 l 上任意一点 (x,y) 分别作平行于坐标轴的直线, l 将这两条直线和两坐标轴围成的矩形面积分割成两部分, 其中之一的面积为另一部分面积的 3 倍, 求 l 的方程.
3. 依牛顿冷却定律, 一高温物体的冷却速度与它周围的温度之差成正比, 设周围温度保持为 20 ℃, 最初此物体温度为 100 ℃, 在 20 分钟时其温度降至 60 ℃, 问需要多少时间此物体温度降至 30 ℃?
4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 若由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=1, x=t(t>0)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

   $$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)].$$

   试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 $y(2)=\dfrac{2}{9}$ 的解.
5. 证明级数 $1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ 的和函数 $f(x)$ 满足微分方程 $(1+x)f'(x)-\alpha f(x)=0$, 并求 $f(x)$.
6. 某池塘的规模最多只能供 1000 尾 A 类鱼生存, 因此 A 类鱼尾数的变化率与 $k(1000-k)$ 成正比, 这里 k 表示 A 类鱼尾数. 若开始时有 A 类鱼 20 尾, 当时的尾数的变化率为 9.8, 求 t 时刻 A 类鱼的尾数.
7. 某平面曲线的任一点处的切线垂直于此点与原点的连线, 求此曲线方程.
8. 已知曲线通过点 (3,1), 其在切点和 Ox 轴之间的切线段, 被切线与 Oy 轴的交点所平分, 求此曲线的方程.
9. 雪球以正比于它表面积的速度融化, 设开始时体积为 V_0, 求 t 时刻雪球的体积 V.
10. 一个质量为 m 的质点, 受常力 F 的作用. 设质点由静止开始运动, 求该质点的运动规律. 如果移动一分钟后, 在相反方向用 F_1 作用, 求此质点在一分钟后的运动规律.

参 考 文 献

陈仲. 1998. 大学数学 (上、下册). 南京: 南京大学出版社.
姜东平, 江惠坤. 2005. 大学数学教程 (上、下册). 北京: 科学出版社.
罗亚平, 等. 2000. 大学数学教程 (第一、二册). 南京: 南京大学出版社.
李忠, 周建莹. 2004. 高等数学 (上、下册). 北京: 北京大学出版社.
同济大学数学系. 2007. 高等数学 (上、下册). 6 版. 北京: 高等教育出版社.
王高雄, 等. 1991. 常微分方程. 2 版. 北京: 高等教育出版社.
(日) 小平邦彦. 2008. 微积分入门 I：一元微积分; 微积分入门 II：多元微积分 (An Introduction to Calculus). 裴东河译. 北京: 人民邮电出版社.
姚天行, 等. 2002. 大学数学. 北京: 科学出版社.
Dale Varberg, et al. 2008. Calculus (Eighth Edition) (影印版). 北京：机械工业出版社.
George B Thomas Jr. 2008. Thomas' Calculus (Tenth Edition) (影印版). 北京：高等教育出版社.
James Stewart. 2004. Calculus (Fifth Edition) (影印版). 北京：高等教育出版社.

(O-8140.01)

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-065848-7

9 787030 658487 >

定 价: 69.00 元

科学出版社互联网入口

南京分社: 025-86300576 销售: 010-64031535

南京分社 E-mail: nanjing@mail.sciencep.com

销售分类建议: 数学