微积分Ⅱ Calculus Ⅱ

第5章 多元函数微分学

二重极限

$\varepsilon-\delta$ 语言：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，恒有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$

解题时常将 $|f(x,y)-A|$ 放缩为 $M\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^{\,\alpha}$.

二重极限要求以任意方式趋近于点 (x_0,y_0)，故可取特殊线趋近 (x_0,y_0) 验证 $f(x,y)$ 极限不存在.

累次极限：有先后顺序

多元函数的连续性

定义：f 在 P_0 连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $P\in\mathbb{R}^n$ 且 $\rho(P,P_0)<\delta$ 时，有 $|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$.

$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=0$

有界闭区域连续函数性质

零点定理：函数 f 在 $G\in\mathbb{R}^n$ 上连续，有 $f(P_1)f(P_2)<0$，则存在 $P_0\in G$ 使得 $f(P_0)=0$.

介值定理：函数 f 在 $G\in\mathbb{R}^n$ 上连续，有 $f(P_1)<\mu<f(P_2)$，则存在 $P_0\in G$ 使得 $f(P_0)=\mu$.

有界性定理 / 最值定理

偏导数

多元函数在某点的所有分量的偏导数都存在，则在该点可偏导.

定义：$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 表示曲面上沿x轴的空间曲线在点 (x_0,y_0) 处切线 T_x 对x轴的斜率.

可偏导与连续的关系：设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $N_\delta(P_0)$ 内可偏导，且 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在 $N_\delta(P_0)$ 内有界，则函数 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续.

可偏导且偏导数有界 $\Rightarrow$ 连续

高阶偏导数：若二阶混合偏导数 f''_{xy} 与 f''_{yx} 在点 (x,y) 处皆连续，则 $f''_{xy}=f''_{yx}$.

全微分

全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$.（线性化）

其中 A、B 与 x,y 有关，与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

则 $dz=A\Delta x+B\Delta y$ 为点 (x,y) 处的全微分

连续、可偏导与可微的关系：

① 可微 $\Rightarrow$ 连续

② 可微 $\Rightarrow$ 可偏导，且 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

③ 可偏导、偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微（连续可微）

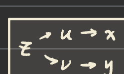
*** 高阶微分**

$d^nz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)=C_n^k\left(dx\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\left(dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-k} f(x,y)$.

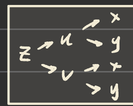
复合函数的偏导数

链式法则1：$z=f(u,v)$ $u=\varphi(x),\ v=\psi(x)$.

$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$

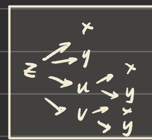


链式法则2：$z=f(u,v)$　$u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y)$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

链式法则3：$z=f(x,y,u,v)$　$u=\varphi(x,y)$　$v=\psi(x,y)$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

沿路径求导彻底！

一阶全微分的形式不变性：复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))=f(u,v)$ 的全微分可表示为：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

复合函数的高阶偏导数：按位求导，雨露均沾.

隐函数的偏导数

隐函数存在定理1/2：

由一个方程确定的隐函数：对方程两边分别求偏导，移项整理.

由方程组确定的隐函数：对每个方程求偏导，求解线性方程组.

A. 多元函数的连续性，可偏导性、可微性、连续可微性.

连续性：在某点处的极限与其函数值相等.　　可偏导性：对各自变量的偏导数存在(定义法)

可微性：误差是距离的高阶无穷小　　连续可微性：各偏导数在该点连续.

A.1 定义函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

讨论函数f在点(0,0)处的连续性，可偏导性、可微性、连续可微性

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy=0$, $\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le1$. 故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$. $f(x,y)$在(0,0)处连续.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0=f'_x(0,0)$　$\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0=f'_y(0,0)$. $f(x,y)$在(0,0)处可偏导

(3) $\boxed{w=f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}=f(x,y)$. $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\boxed{\lim\limits_{\rho\to0}\frac{w}{\rho}}=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0}\rho\cos\theta\sin\theta\sin\frac{1}{\rho^2}=0$　故$f(x,y)$在(0,0)处可微.

(4) $\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases} y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{2\cos^2\theta\sin\theta}{\rho}\cos\frac{1}{\rho^2}$ 不存在

所以 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在(0,0)处不连续，即 $f(x,y)$在(0,0)处不连续可微. □

A.2 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

讨论函数f在y轴上的连续性，可偏导性、可微性

(1) $\forall y_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to y_0}}(x^2+y^2)e^{-\frac{1}{x^2}}=0=f(0,y_0)$，故连续.

(2) $f'_x(0,y_0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x^2+y_0^2)\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0$.

$f'_y(0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}0=0$ 故 f 在 y 轴点上可偏导

(3) $w=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)-f'_x(0,y_0)\Delta x-f'_y(0,y_0)\Delta y=f(\Delta x,y_0+\Delta y)=(\Delta x^2+(y_0+\Delta y)^2)e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}$

$0\le\dfrac{w}{\rho}=\dfrac{((\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2)e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\rho}\le((\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2)\dfrac{\frac{1}{\rho}}{e^{\frac{1}{\rho^2}}}\to 0.$

由夹逼准则, $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{w}{\rho}=0$. 故 f 在 y 轴点上可微. □

二元函数的Taylor公式 $f(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y})^k f(a,b)+R_n$ $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(a+\theta\Delta x,b+\theta\Delta y)$ $\Delta x=x-a$, $\Delta y=y-b$ $(0<\theta<1)$

Lagrange 公式: $f(x,y)=f(a,b)+f'_x(\xi,\eta)(x-a)+f'_y(\xi,\eta)(y-b)$. $\xi=a+\theta(x-a)$, $\eta=b+\theta(x-b)$ $(0<\theta<1)$

n 阶 Maclaring 公式: $f(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y})^k f(0,0)+R_n$ $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(\theta x,\theta y)$ $(0<\theta<1)$

带Phano余项的Taylor公式: $f(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y})^k f(a,b)+o(\rho^n)$ $\Delta x=x-a$, $\Delta y=y-b$ $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

多元向量函数 🔗

偏导数的几何应用

空间曲线的切线与法平面:

1° 曲线以参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$ 形式给出.

要求曲线光滑: $\varphi'(t)$、$\psi'(t)$、$\omega'(t)$ 连续且不同时为0.

切线 l: $\dfrac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-\omega(t_0)}{\omega'(t_0)}$

法平面 π: $\varphi'(t_0)(x-\varphi(t_0))+\psi'(t_0)(y-\psi(t_0))+\omega'(t_0)(z-\omega(t_0))=0$

2° 曲线以一般式 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\H(x,y,z)=0\end{cases}$ 形式给出.

要求曲线光滑: F、H 连续可微且 $\dfrac{D(F,H)}{D(y,z)}$、$\dfrac{D(F,H)}{D(z,x)}$、$\dfrac{D(F,H)}{D(x,y)}$ 不全为0.

切线 l: $\dfrac{x-x_0}{\frac{D(F,H)}{D(y,z)}\Big|_{P_0}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{D(F,H)}{D(z,x)}\Big|_{P_0}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{D(F,H)}{D(x,y)}\Big|_{P_0}}$

法平面 π: $\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ F'_x(P_0) & F'_y(P_0) & F'_z(P_0)\\ H'_x(P_0) & H'_y(P_0) & H'_z(P_0)\end{vmatrix}=0$

空间曲面的切平面与法线:

1° 曲面以一般式 $F(x,y,z)=0$ 形式给出.

要求曲面光滑: F 连续可微, 且 F'_x, F'_y, F'_z 不全为0.

切平面 π: $F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0$.

法线 l: $\dfrac{x-x_0}{F'_x(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(P_0)}$

2° 曲面以参数方程: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ 形式给出.

要求曲面光滑: $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 连续可微, 且 $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 不全为0.

切平面 π: $\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0)\\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}=0$

法线 l: $\dfrac{x-x_0}{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}}$

B、设 $\vec{r}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$.

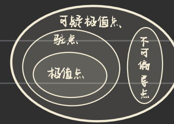
$E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u \qquad F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v \qquad G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$

$(A,B,C)=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$

有: $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{EG-F^2}$

极值与条件极值

极值的必要条件: $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$. 点 (x_0,y_0) 称为驻点.



极值判别法 I

极值判别法 II: f 二阶连续可微, 且 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$.

令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0) \qquad B=f''_{xy}(x_0,y_0) \qquad C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

(1) 若 $B^2-AC<0$, $A>0$, 则为极小值. (两小一大)

(2) 若 $B^2-AC<0$, $A<0$, 则为极大值.

(3) 若 $B^2-AC>0$, 则不是极值.

(4)* 若 $B^2-AC=0$, 则进一步讨论.

C.1 求函数 $f(x,y)=2(y-x^2)^2-\frac{1}{7}x^7-y^2$ 的极值.

由 $\begin{cases} f'_x=-8x(y-x^2)-x^6=0 \\ f'_y=4(y-x^2)-2y=0 \end{cases}$, 有驻点 $P_1(0,0)$, $P_2(-2,8)$.

$f''_{xx}=-8y+24x^2-6x^5 \qquad f''_{xy}=-8x \qquad f''_{yy}=2$

在 $(-2,8)$ 处, $A=224$, $B=16$, $C=2$ $B^2-AC<0$, $A>0$. 故 $f(-2,8)=-\frac{96}{7}$ 是极小值.

在 $(0,0)$ 处, $A=0$, $B=0$, $C=2$, $B^2-AC=0$. $f(0,0)=0$. 合理取值,使得一种情况恒>0, 一种恒<0.

取 $\varepsilon>0$, 当 $x=0$ 时, $f(0,y)=y^2$. 在点 $(0,0)$ 任意邻域内, 存在 $(0,\varepsilon)\neq(0,0)$, 使 $f(0,\varepsilon)>0$.

当 $y=x^2$ 时, $f(x,x^2)=-\frac{1}{7}x^7-x^4$. 在点 $(0,0)$ 任意邻域内, 存在 $(\varepsilon,\varepsilon^2)\neq(0,0)$, 使 $f(\varepsilon,\varepsilon^2)<0$.

故 $f(0,0)$ 不是极值. □

Lagrange 乘数法: 设函数 $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ 连续可微, 且 $\varphi'_z\neq0$. 函数 $f(x,y,z)$ 满足约束 $\varphi(x,y,z)=0$ 的条件极值在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 取得. 令 $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$,

则 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)=0 \\ F'_y=f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)=0 \\ F'_z=f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)=0 \\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

约束方程数量应小于自变量个数.

D. 条件极值与最值

D.1 求函数 $z=x^2+y^2-2x+6y$ 在闭区域 D: $x^2+y^2\le25$ 上的最值.

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2=2(x-1) \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2y+6=2(y+3)$. 驻点 $(1,-3)$ 是 D 内点.

考虑边界条件 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-2x+6y+\lambda(x^2+y^2-25)$

$$\begin{cases} F'_x=2x-2+2\lambda x=0 \\ F'_y=2y+6+2\lambda y=0 \\ F'_\lambda=x^2+y^2-25=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ y=-\frac{15}{\sqrt{10}} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-\frac{5}{\sqrt{10}} \\ y=\frac{15}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$z(1,-3)=-10$ $z(\frac{5}{\sqrt{10}},-\frac{15}{\sqrt{10}})=25-10\sqrt{10}$ $z(-\frac{5}{\sqrt{10}},\frac{15}{\sqrt{10}})=25+10\sqrt{10}$.

故最大值：$25+10\sqrt{10}$. 最小值：-10. □

D.2 求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在区域 $x^2+y^2\le z\le 1$ 上的最值.

由于 $f'_x=f'_y=f'_z=1$ 故在内部无可疑极值点.

a) 在边界 $x^2+y^2=z$ $(0\le z<1)$ 上.

令 $F(x,y,z,\lambda_1)=x+y+z+\lambda_1(x^2+y^2-z)$.

由 $\begin{cases}F'_x=1+2\lambda_1 x=0\\ F'_y=1+2\lambda_1 y=0\\ F'_z=1-\lambda_1=0\\ F'_{\lambda_1}=x^2+y^2-z=0\end{cases}$ 解得 $P_1(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

b) 在边界 $z=1$, $(x^2+y^2<1)$ 上. 令 $G(x,y,z,\lambda_2)=x+y+z+\lambda_2(z-1)$. $G'_x=G'_y=1\ne 0$. 无可疑极值点.

c) 在边界 $z=x^2+y^2$, $z=1$ 上.

令 $H(x,y,z,\lambda_3,\mu)=x+y+z+\lambda_3(x^2+y^2-z)+\mu(z-1)$.

$\begin{cases}H'_x=1+2\lambda_3 x=0\\ H'_y=1+2\lambda_3 y=0\\ H'_z=1-\lambda_3+\mu=0\\ H'_{\lambda_3}=x^2+y^2-z=0\\ H'_\mu=z-1=0\end{cases}$ $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$, $P_3(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

故 $f_{min}=\min\{f(P_1),f(P_2),f(P_3)\}=-\frac{1}{2}$ $f_{max}=\max\{f(P_1),f(P_2),f(P_3)\}=1+\sqrt{2}$. □

D.3 求函数 $z=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$ 上的最值.

$z'_x=2x-2xy^2=0$ $z'_y=4y-2x^2y=0$ D内部的可疑极值点 $(0,0)$, $(\pm\sqrt{2},\pm1)$.

在D的边界 $x^2+y^2-4=0$ 上, 令 $F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$.

$\begin{cases}F'_x=2x(1-y^2-\lambda)=0\\ F'_y=2y(2-x^2+\lambda)=0\\ F'_\lambda=x^2+y^2-4=0\end{cases}$ $(0,\pm2)$, $(\pm2,0)$, $(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}})$

$z(0,0)=0$, $z(\pm\sqrt{2},\pm1)=2$, $z(0,\pm2)=8$ $z(\pm2,0)=4$ $z(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}})=\frac{7}{4}$.

故 $z_{max}=8$ $z_{min}=0$. □

方向导数

方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}(P_0)=\lim\limits_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|}$.

设 $\vec{l}$ 的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, P_0 的坐标为 (x_0,y_0,z_0), 则

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0)=\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

可偏导 ⇒ 沿坐标轴的方向导数存在. 沿任意方向的方向导数存在 ⇏ 偏导数存在

方向导数存在条件及计算：f 在点 $P_0(x,y,z)$ 处可微, $\vec{l}=t(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则 f 在点 P_0 处沿 l 的方向导数存在,

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\cos\alpha+f'_y(x,y,z)\cos\beta+f'_z(x,y,z)\cos\gamma.$$

第6章　重积分

二重积分的定义　$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

几何意义：以闭区域D为底，曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

可积条件：$f(x,y)$ 在闭区域上连续 / 有界且间断点分布在有限条光滑曲线上.

二重积分的性质　(1) $\iint\limits_D d\sigma = \sigma(D)$　闭区域D的面积.

(2) 分离常数、加法分配、积分区域可加. 保向性.

(3) 估值：设函数 $f(x,y)$ 在D上,有 $m\le f(x,y)\le M$，则有 $m\le \frac{1}{\sigma(D)}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le M$.

(4) 绝对值性质：$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$

△(5) 对称性质：设D关于 $x=0$ 对称，若 $f(x,y)$ 关于 x 为奇函数，即 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$.

中值定理1：$D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界闭区域，函数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 在D上连续，且对 $\forall(x,y)\in D$，$g(x,y)\ge 0$（或 ≤ 0），

则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

取 $g(x,y)\equiv 1$，有 中值定理2：$D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界闭区域，函数 $f(x,y)$ 在D上连续

则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma(D)$.

二重积分的计算　直角坐标下的面积微元 $d\sigma = dxdy$.

累次积分：I. 先对 y，后对 x 的累次积分. x 作为自由变量 $(a\le x\le b)$，y 受 x 的约束 $\left(\begin{matrix}\text{上界 } y=y_1(x)\\ \text{下界 } y=y_2(x)\end{matrix}\right)$.

II. 先对 x，后对 y 的累次积分. y 作为自由变量 $(a\le y\le b)$，x 受 y 的约束 $\left(\begin{matrix}\text{上界 } x=x_1(y)\\ \text{下界 } x=x_2(y)\end{matrix}\right)$.

累次积分的技巧：交换积分次序.

A.1 计算累次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\cos y}{y}dy$.　$\frac{\cos y}{y}$ 的原函数不得初等函数.

$D=\{(x,y)\mid x\le y\le\sqrt{x},\ 0\le x\le 1\} = \{(x,y)\mid y^2\le x\le y,\ 0\le y\le 1\}$　先找积分区域

原式 $=\iint\limits_D\frac{\cos y}{y}dxdy = \int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\cos y}{y}dx = \int_0^1(\cos y - y\cos y)dy = \sin y - y\sin y - \cos y\Big|_0^1 = 1-\cos 1$　□

换元积分I、曲线坐标下的换元

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv$　其中 $J(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u' & x_v'\\ y_u' & y_v'\end{vmatrix}\ne 0$.　$d\sigma=|J(u,v)|dudv$ 是曲线坐标下的面积微元

技巧：平移坐标系 / 曲化直.

A.2 求曲线 $2x^2+2xy+y^2=1$ 所围成的平面区域的面积.

由 $2x^2+2xy+y^2=1 \Rightarrow x^2+(x+y)^2=1$.

令 $u=x$，$v=x+y$. 则原曲线方程化为 $u^2+v^2=1$　$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=1$

$S=\iint\limits_{u^2+v^2\le 1}dudv=\pi$.　□

A.3 计算由抛物线 $y^2=x$，$y^2=2x$ 以及双曲线 $xy=1$，$xy=2$ 所围平面D的面积 $\sigma(D)$.

由题　$1\le\frac{y^2}{x}\le 2$，$1\le xy\le 2$.　故令 $u=\frac{y^2}{x}$，$v=xy$.　$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}=\frac{1}{3u}$.

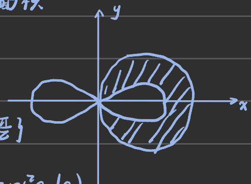
$\sigma(D)=\int_1^2 dv\int_1^2\frac{1}{3u}du=\frac{1}{3}\ln 2$　□

换元积分II、极坐标变换 / 广义极坐标变换

$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta\quad (x=a\rho\cos\theta,\ y=b\rho\sin\theta)$.

$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta\quad\left(\iint_{D'} f(a\rho\cos\theta,b\rho\sin\theta)\,ab\rho\,d\rho\,d\theta\right)$ $d\sigma=\rho\,d\rho\,d\theta$ 是极坐标下的面积微元

A.4 设D是双纽线 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ 和圆 $x^2+y^2=2x$ 所围成的区域，求D的面积



令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$

双纽线方程: $\rho^2=2\cos2\theta$　　圆方程 $\rho=2\cos\theta$

$D_1=\{(\rho,\theta)\mid\sqrt{2\cos2\theta}\le\rho\le2\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$　$D_2=\{(\rho,\theta)\mid 0\le\rho\le2\cos\theta,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

$$\iint_D dxdy=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sqrt{2\cos2\theta}}^{2\cos\theta}\rho\,d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\,d\rho\right)=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-\cos2\theta)d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\,d\theta\right)$$

$$=-2\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1!!}{2!!}=\pi-1$$

□

三重积分的定义 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$

几何意义: 以曲面 $z=f(x,y)$ 为底, $z=g(x,y)$ 为顶的柱体的体积.

可积条件: $f(x,y,z)$ 在闭区域上连续 / 有界且间断点分布在有限条光滑曲面上.

三重积分的计算 直角坐标下的体积微元 $dV=dxdydz$

累次积分 I、先一后二（细杆型）$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iint_D d\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$

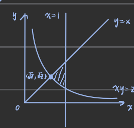
II、先二后一（切片面包型）$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dz\iint_{D(z)}f(x,y,z)d\sigma$ 注意 $D(z)$ 是关于z的函数.

关键要找对积分区域

B.1 计算三重积分 $\iiint_\Omega xy^2z^3\,dxdydz$，其中Ω为曲面 $z=xy$，平面 $y=x$，$x=1$ 和 $z=0$ 所围区域.

<法一> $\iiint_\Omega xy^2z^3dxdydz=\iint_D dxdy\int_0^{xy}xy^2z^3dz=\int_0^1dx\int_0^x dy\int_0^{xy}xy^2z^3dz=\cdots$

<法二>截面法: $\iiint_\Omega xy^2z^3dxdydz=\int_0^1dz\iint_D dxdy=\int_0^1dz\int_{\sqrt z}^1dx\int_{\frac{z}{x}}^x xy^2z^3dy=\cdots$



□

换元积分I、曲线坐标下的换元

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\iiint_{\Omega'}f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|\,dudvdw$.　其中在变换 $\Omega\to\Omega'$ 下要求一一对应.

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}\ne0,$$ $dV=|J(u,v,w)|\,dudvdw$ 是曲线坐标下的体积微元.

B.2 求积分 $\iiint_\Omega(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$. 其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x+y-z\le1,\ 0\le x-y+z\le1,\ 0\le y+z-x\le1\}$.

令 $u=x+y-z\quad v=x-y+z\quad w=y+z-x$.　$J(u,v,w)=\frac{1}{J(x,y,z)}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}}=-\frac14$.

故原式 $=\iiint_{\Omega'}uvw\cdot|-\frac14|\,dudvdw=\frac14\int_0^1u\,du\int_0^1v\,dv\int_0^1w\,dw=\frac{1}{32}$

□

换元积分III、柱坐标换元　需要投影

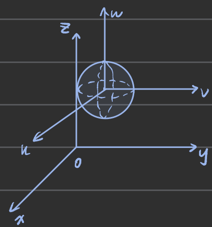
$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega'}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$　　$dV=\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$ 称为柱坐标下的体积微元.

换元积分III、球坐标换元 / 广义球坐标换元 注意 abc / 分段

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta$. $dV = r^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta$ 称为球坐标下的体积微元.

B.3 计算 $\iiint\limits_{\Omega} y^2 dxdydz$, 其中 Ω: $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2 \le 1$.

令 $x=u,\ y=v+1,\ z=w+2$. $J(u,v,w)=\dfrac{1}{J(x,y,z)}=1$ $\Omega'=\{(u,v,w)\mid u^2+v^2+w^2\le 1\}$.



$\iiint\limits_{\Omega} y^2\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} (v+1)^2\cdot|1|\,dudvdw = \iiint\limits_{\Omega'} (v^2+2v+1)\,dudvdw$

由奇偶性和对称性, $\iiint\limits_{\Omega'} 2v\,dudvdw = 0$.

原式 $= \iiint\limits_{\Omega'} (v^2+1)\,dudvdw = \iiint\limits_{\Omega'} v^2 dudvdw + \frac{4}{3}\pi$

令 $u=r\cos\theta\sin\varphi$ $v=r\sin\theta\sin\varphi$ $w=r\cos\varphi$.

原式 $= \iiint\limits_{\Omega''} r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\, drd\theta d\varphi + \frac{4}{3}\pi = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\cdot r^2\sin\varphi\, d\varphi + \frac{4}{3}\pi = 2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta\int_0^1 r^4 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\, d\varphi + \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{5}\pi$ □

重积分的应用

三重积分计算立体的体积 $V=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ = 直/柱/球坐标…

二重积分计算曲面的面积 有时可以用曲线积分I代替!

I. 参数形式 $x=x(u,v)$ $y=y(u,v)$ $z=z(u,v)$. $dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$ $=\sqrt{EG-F^2}$ 称为曲线坐标下的曲面面积微元(曲面微元)

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv \qquad A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \quad B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)} \quad C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

II. 直角形式 $z=f(x,y)$. $dS=\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy$ 称为直角坐标下的曲元微元.

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy$$

C. 例题

广义重积分

D. 计算 $\iint\limits_{D} e^{-(x+y)}dxdy$, 其中 D 为第一象限.

取 $D_a=\{(x,y)\mid 0\le x\le a,\ 0\le y\le a\}$. 则 原式 $=\lim\limits_{D_a\to D}\iint\limits_{D_a} e^{-(x+y)}dxdy = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-y}dy\int_0^a e^{-x}dx = \lim\limits_{a\to+\infty}(1-e^{-a})^2 = 1$ □

第7章 曲线积分 曲面积分

曲线积分I $\int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$ 称为第一类曲线积分 / 对弧长的曲线积分 ds 称为弧微分

性质：1) k为常数，有 $\int_C k f(x,y)\,ds = k\int_C f(x,y)\,ds$

2) $\int_C [f(x,y)\pm g(x,y)]\,ds = \int_C f(x,y)\,ds \pm \int_C g(x,y)\,ds$

3) $\int_C f(x,y)\,ds = \int_{C_1} f(x,y)\,ds = \int_{C_2} f(x,y)\,ds$ $(C=C_1+C_2)$

4) C上有 $f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\int_C f(x,y) \le \int_C g(x,y)$. 特别地，有 $\left|\int_C f(x,y)\,ds\right| \le \int_C |f(x,y)|\,ds$

5) $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\,ds$

6) $\int_C ds =$ C的弧长

I_C的计算 参数形式：$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$. $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$.

$I_C \longleftrightarrow$ 定积分 $\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$ 只能含一个变量!

I_C的应用：计算曲面面积.

A.1 求圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被两平面 $z=\pm y$ 所截的有限部分面积 S.

$S = 4\int_L y\,ds \xlongequal{x=\cos\theta,\ y=\sin\theta} 4\int_0^{\pi}\sin\theta\sqrt{(-\sin\theta)^2+\cos^2\theta}\,d\theta = 8$ □

A.2 计算曲线积分 $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$. 其中C为圆周 $x^2+y^2=ay$ $(a>0)$.

C的参数方程：$x=\rho(\theta)\cos\theta$ $y=\rho(\theta)\sin\theta$. 由 $x^2+y^2=ay \Rightarrow \rho(\theta)=a\sin\theta$.

故 $x=a\sin\theta\cos\theta$ $y=a\sin^2\theta$. $(0\le\theta\le\pi)$

$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta}\sqrt{a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2+4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} a\sin\theta\sqrt{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}\,d\theta = \int_0^{\pi} a^2\sin\theta\,d\theta = 2a^2$ □

曲线积分II $\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$ 称为第二类曲线积分 / 对坐标的曲线积分

性质 1) 2) 3) 同 I_C.

4) $\int_{C^-}\vec{F}(M)\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F}(M)\cdot d\vec{r}$

II_C的计算 参数形式 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$. $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$.

$II_C \longleftrightarrow$ 定积分 $\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt$.

$I_C \longleftrightarrow II_C$ 微分关系：$dx=\cos\alpha\,ds$，$dy=\cos\beta\,ds$，$dz=\cos\gamma\,ds$.

故 $\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta)\,ds$

Green公式 设有界闭区域D由分段光滑曲线c围成，函数 P、Q 在D上具有一阶连续偏导数.

$II_C \longleftrightarrow$ 二重积分 则 $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

技巧：补线使c成为单闭曲线.

挖洞使偏导数不连续的点单独讨论.

简单应用：$S = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$.

B.1 (挖洞) 计算 $\int_L \frac{e^x[(x\sin y - y\cos y)\,dx + (x\cos y - y\sin y)\,dy]}{x^2+y^2}$，其中L是包围原点的单闭曲线，逆时针方向.

$P(x,y)=\frac{x\sin y-y\cos y}{x^2+y^2}e^x$ $\quad Q(x,y)=\frac{x\cos y-y\sin y}{x^2+y^2}e^x$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x\cos y-\cos y+y\sin y)(x^2+y^2)-2y(x\sin y-y\cos y)}{(x^2+y^2)^2}e^x=\frac{\partial Q}{\partial x}$

取 $\varepsilon>0$ 充分小，使曲线 $c: x^2+4y^2=\varepsilon^2$ 及其所围区域完全包含在 L 区域内。C的方向取逆时针方向.

$$\int_L \frac{e^x[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy]}{x^2+y^2}+\int_{c^-}\frac{e^x[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy]}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

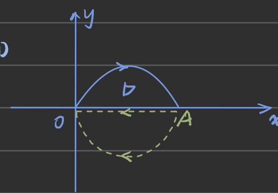
$$\int_{c^+}\frac{e^x[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy]}{x^2+y^2}$$

$$\xlongequal{x=\varepsilon\cos\theta,\ y=\varepsilon\sin\theta}\int_0^{2\pi}e^{\varepsilon\cos\theta}\left[-\sin\theta\left(\cos\theta\sin(\varepsilon\sin\theta)-\sin\theta\cos(\varepsilon\sin\theta)\right)+\left(\cos\theta\cos(\varepsilon\sin\theta)-y\sin(\varepsilon\cos\theta)\right)\right]d\theta$$

由 ε 的任意性，取 $\varepsilon\to0$. 有 原式 $=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=2\pi$. 故 $\int_L=2\pi$. □

E.2（补线）计算 $\int_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段.

记 $O(0,0)$, $A(\pi,0)$ $\quad \overline{AO}$ 与 L 合起来形成封闭曲线，所围区域为 D.



$P(x,y)=e^x(1-\cos y)$ $\quad Q(x,y)=e^x(\sin y-y)$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=e^x\sin y$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x(\sin y-y)$

由 Green 公式，$\int_{L+\overline{AO}} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$

左手正，右手负

$$=-\iint_D[-e^x(y-\sin y)-e^x\sin y]\,dxdy=\iint_D e^x y\,dxdy$$

$$=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}e^x y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^x\sin^2x\,dx=\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$$

又 $\overline{AO}$: $y=0$, $x:\pi\to0$, 则 $\int_{\overline{AO}}e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]=\int_{\pi}^{0}0\,dx=0$.

故原式 $=\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)-0=\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$ □

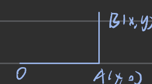
平面上 I_L 与路径无关 / $Pdx+Qdy$ 是恰当微分 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

技巧：沿某一条直线积分化简计算.

E.3（改变积分路径 / 找原函数）证明：$(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$ 在整个 xOy 平面上是某个函数的全微分，并找出它的一个原函数.

$P(x,y)=2x\cos y+y^2\cos x$ $\quad Q(x,y)=2y\sin x-x^2\sin y$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y+2y\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y$

故是恰当微分 沿 $O-A-B$ 进行积分，有



$$U(x,y)=\int_{\overline{OA}}(P+Q)\,dx+\int_{\overline{AB}}(P+Q)\,dy=\int_0^x 2x\,dx+\int_0^y 2y\sin x-x^2\sin y\,dy$$

$$=x^2+y^2\sin x+x^2\cos y-x^2=y^2\sin x-x^2\cos y.$$ □

曲面积分 I

$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 称为第一类曲面积分 / 对面积的曲面积分. dS 称为面积微元.

性质：1) 2) 3) 同上

4) $\iint_S dS=S$ 的面积

I_S 的计算

直角坐标：$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+g_x'^2+g_y'^2}\,dxdy$ $\quad$ D是投影

参数形式：$x=x(u,v)$ $\quad y=y(u,v)$ $\quad z=z(u,v)$

$I_S\leftrightarrow$ 二重积分 $\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$

$(E=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2 \quad F=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v' \quad G=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2)$

曲面积分II $\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iint_S \vec F(x,y,z)\cdot\vec n(x,y,z)\,dS=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\vec F(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

利用面积微元关系改写：$\cos\alpha\,dS=dydz$ $\cos\beta\,dS=dzdx$ $\cos\gamma\,dS=dxdy$.

故 $\iint_S \vec F\cdot\vec n\,dS=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$. 称为第二类曲面积分/对坐标的曲面积分

性质：$\iint_{S^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iint_{S^-} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

I_s的计算 $\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$

直角坐标：$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_{D_{xy}}[P(x,y,z(x,y))(-z'_x)+Q(x,y,z(x,y))(-z'_y)+R(x,y,z(x,y))]\,dxdy$

$I_s\leftrightarrow$二重积分 其中$\pm$取决于S的定向，即$\vec n$的指向. 亦可投影至D_{yz}. D_{zx}.

技巧：需要找到S的法向量.

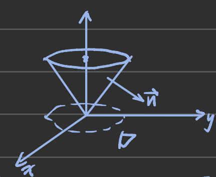
参数形式：$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$.

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_D(PA+QB+RC)\,dudv \quad A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \quad B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)} \quad C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

(A,B,C)与S同向取正，反向取负.

C. 轮换对称性、对称性、投影面积为0.

C.1 计算 $\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$. S: $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$的外侧. 没有轮换

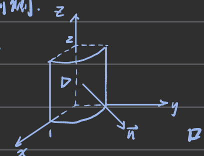


原式 $=-\iint_D\left[(y-\sqrt{x^2+y^2})\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+(\sqrt{x^2+y^2}-x)\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+(x-y)\right]dxdy$

$=2\iint_D (y-x)\,dxdy$

由对称性、D关于$x=0$与$y=0$对称. x,y为$\boxed{\text{奇函数}}$ 故 原式$=2\iint(y-x)dxdy=0$. □

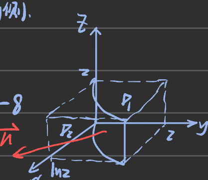
C.2 计算 $\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$. S: $x^2+y^2=1$ 被$z=0$、$z=2$所截的第一卦限内的前侧.



由$\boxed{\text{轮换对称性}}$，有 $\iint_S xdydz=\iint_S ydzdx$. 曲面在$xOy$平面内投影为一条线，故$\iint_S zdxdy=0$.

原式 $=2\iint_S ydzdx=2\iint_D\sqrt{1-x^2}\,dzdx=2\int_0^2dz\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\overset{x=\sin\theta}{=\!=}4\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\pi$. □

C.3 计算 $\iint_S -zdydz+zydzdx+e^x\sin(x+zy)dxdy$. S: $y=e^x$ $(1\le y\le 2,\ 0\le z\le 2)$的前侧.



曲面在xOy平面内投影为一条线，故$\iint_S e^x\sin(x+zy)dxdy=0$.

原式 $=\iint_S -zdydz+zydzdx=\iint_{D_1}-zdydz-\iint_{D_2}ze^x dzdx=-2\times2-\int_0^2dz\int_0^{\ln2}ze^xdx=-8$

前侧投影是负的 $\vec n$指向$-y$. □

Gauss公式 $\iint Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$.

$I_s\leftrightarrow$三重积分 例题 D.1 先曲面换元再Gauss公式

D.2 Gauss公式的挖洞法

是Green在维度上的推广：Green. $I_c\leftrightarrow$二重积分

Gauss. $I_s\leftrightarrow$三重积分

简单应用：$V=\frac{1}{3}\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_S xdydz=\iint_S ydzdx=\iint_S zdxdy$

Stokes公式 $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

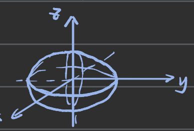
也可利用面积微元关系转化. $\cos\alpha\, dS = dydz$ ⋯ 🔗

是Green.在直曲上的推广：Green. 平面 $I_c \leftrightarrow$ 二重积分　平面的线面转化.

Gauss. 曲面 $I_s \leftrightarrow I_c$　曲面的线面转化

空间上 I_c: $\int_c Pdx + Qdy + Rdz$ 与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

D.3 (Gauss. 应用) 计算 $\iint_S (xy^2+y+z)\, dydz + (yz^2+xz)\, dzdx + (zx^2+5x^2y^2)\, dxdy$. 其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧



$P = xy^2+y+z$　　$Q = yz^2+xz$　　$R = zx^2+5x^2y^2$.　$\frac{\partial P}{\partial x} = y^2$　$\frac{\partial Q}{\partial y} = z^2$　$\frac{\partial R}{\partial z} = x^2$

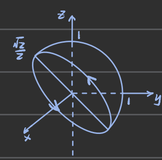
V 是 S 围成的有界闭区域　令 $x = ar\cos\theta\sin\varphi$　$y = br\sin\theta\sin\varphi$　$z = cr\cos\varphi$

原式 $= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$、

而 $\iiint_V x^2 dxdydz = \iiint_V (ar\cos\theta\sin\varphi)^2 \cdot abcr^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta = a^3bc\int_0^1 r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = a^3bc \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{3} \times \pi = a^3bc\frac{4}{15}\pi$

由对称性, $\iiint_V y^2 dxdydz = ab^3c\frac{4}{15}\pi$, $\iiint_V z^2 dxdydz = abc^3\frac{4}{15}\pi$　故原式 $= (a^2+b^2+c^2)abc\frac{4}{15}\pi$.　□

D.4 计算 $\oint_c ydx + zdy + xdz$, 其中 C 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. 从x轴正向看去为逆时针方向.



$P = y$　　$Q = z$　　$R = x$.　S 是 c 围成的有界闭区域

D 是 S 在 xOy 上的投影　$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\oint_c ydx + zdy + xdz = \iint_S (-1)dydz + (-1)dzdx + (-1)dxdy = -\sqrt{3}\iint_D dxdy = -\sqrt{3}\pi a^2$.　□