第8章　无穷级数

基本概念

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \in \mathbb{R})$ 部分和 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = A \ (A \in \mathbb{R})$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 否则称该级数发散.

级数收敛的必要条件: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

可加性: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也发散.

收敛级数任意增删、改变有限项, 任意加括号, 其和不变.

正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 某一加括号的级数收敛.

正项级数敛散性

比较判别法: 若 $0 \le a_n \le b_n$, 则有 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

简记为 大收敛 $\Rightarrow$ 小收敛, 小发散 $\Rightarrow$ 大发散

比较判别法的极限形式: 设 $a_n \ge 0$, $b_n > 0$, 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$, 则有:

当 $0 \le \lambda < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

当 $0 < \lambda \le +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

比值判别法: 设 $a_n > 0$, 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, 则有:

当 $0 \le \lambda < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

当 $\lambda > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

根值判别法: 设 $a_n > 0$, 若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, 则有:

当 $0 \le \lambda < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

当 $\lambda > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

积分判别法: 设 $a_n > 0$, $f(n) = a_n$, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续且单减, 则有:

积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性相同.

A. 正项级数习题

A.1 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \ (p>0)$ 的敛散性.

令 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$. 有 $f(n) = u_n$.

$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^p}\,d\ln x = \left.\frac{-1}{(p-1)(\ln x)^{p-1}}\right|_2^{+\infty} = \left.\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right|_0^{+\infty}$

故当 $0 < p \le 1$ 时, $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 原级数发散; $p > 1$ 时 $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 原级数收敛. $\square$

A.2 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln\ln n)^q} \ (p>0)$ 的敛散性.

当 $p=1$ 时, $f(x) = \frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$. $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{(\ln\ln x)^q}\,d\ln\ln x = \left.\frac{(\ln\ln x)^{1-q}}{1-q}\right|_3^{+\infty}$

当 $q > 1$ 时收敛, $0 < q \le 1$ 时发散.

当 $p > 1$ 时, 由 $x >> \ln x$. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ 与 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 敛散性相同. 同(1,2). $\int_3^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 原级数收敛.

当 $p < 1$ 时, 发散 (同A.1) $\square$

两个重要的级数

P-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p\le 1$ 时发散，$p>1$ 时收敛.

几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_0 q^n$，当且仅当 $|q|<1$ 时收敛，且当 $|q|<1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}a_0 q^n=\frac{a_0}{1-q}$.

Stirling公式

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\cdots\right)$$

任意项级数敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛，此时称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛；$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，此时称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

莱布尼茨法则：若交错级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 中 $a_n\ge a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则该级数收敛（仍需进一步判断绝对收敛）

比值判别法：对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda$，则有：

当 $0\le\lambda<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛；

当 $\lambda>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

Abel判别法：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，数列 $\{a_n\}$ 单调有界，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

狄利克雷判别法：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列有界，数列 $\{a_n\}$ 单调趋于0，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

E.1 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ 发散.

因为数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 单调趋于0，而 $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\right| = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n}2\cos k\sin\frac{1}{2}\right|$ 步长的一半

$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}-\sin\frac{2k-1}{2}\right)\right|$ 积化和差

$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{2n+1}{2}-\sin\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$ 的部分和有界，由狄利克雷判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$. 同乘 $\sin 1$（步长的一半）.

同上可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，故发散. □

E.2 设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 为一常数，$p>0$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^p}$ 的敛散性.

1° $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 而P-级数在 $p>1$ 时收敛.

由比较判别法，$p>1$ 时级数绝对收敛

2° 当 $0<p<1$ 时，先证 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta$ 的部分和有界.

部分和 $\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\cos k\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}$ 步长的一半

$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin(k\theta+\frac{\theta}{2})-\sin(k\theta-\frac{\theta}{2})\right)$ 积化和差

$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\sin(n\theta+\frac{\theta}{2})-\sin\frac{\theta}{2}\right)\le\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ 故有界 裂项

而当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n^p}$ 单调趋于0，故由狄利克雷判别法，原级数收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\theta|}{n^p}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\theta}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2n\theta}{2n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{2n^p}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 是P级数，而P-级数在 $0<p<1$ 时发散. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{2n^p}$ 发散.

由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right|$ 在 $0<p<1$ 时发散

综上，$0<p<1$ 时级数条件收敛. □

B.3 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 的敛散性. 消公式

$$u_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(n\pi+\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

由 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}}{\frac{\pi}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}=1$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散, 有原级数没有绝对收敛.

$\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有 $\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}<\dfrac{\pi}{2}$

故 $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 在 $n>N$ 时单减, $u_n\geq u_{n+1}$. 且 $\lim_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$

由莱布尼茨定理, 原交错级数条件收敛. □

幂级数敛散性

对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 若 $\ell=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, 则 $R=\ell^{-1}$ 称为幂级数的收敛半径.

收敛区间 $(-R,R)$ 是开区间, 收敛域是否包含端点需要进一步讨论.

收敛区间上一致连续, 可逐项求导/积分, 端点则不然, 要单独讨论.

C.1 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)}$, $x\in(-1,1)$. 求出 $f(x)$, 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}.\qquad f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}\triangleq xS(x).$$

$$\int_0^x S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}.$$ 形变神不变!

$$\text{而}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(2m)!!}{(2m+1)!!}x^{2m+1}=4x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(2m)!!}{(2m+1)!!}x^{2m+1}=4x+f'(x)$$

故有 $f''(x)=x[x(4x+f'(x))]'=x(8x+f'(x)+xf''(x))$

整理得 $f''(x)-\dfrac{x}{1-x^2}f'(x)=\dfrac{8x^2}{1-x^2}$.

故 $f'(x)=e^{-\int-\frac{x}{1-x^2}dx}\left(C+\int\frac{8x^2}{1-x^2}e^{\int-\frac{x}{1-x^2}dx}dx\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(C_1+4\arcsin x-4x\sqrt{1-x^2})$

由 $f'(0)=0$, 有 $C_1=0$. 故 $f'(x)=4\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\right)$

$$f(x)=2\arcsin^2x-2x^2+C_2.$$

由 $f(0)=0$, 有 $C_2=0$ 故 $f(x)=2\arcsin^2x-2x^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^{2(n+1)}=f\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)$$ $\dfrac{(2n)!!}{2^n}=n!$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)=2\arcsin^2\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)-1=\frac{\pi^2}{8}-1$$ □

Taylor级数

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 Taylor 级数: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$, $x\in N_\delta(x_0)$

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ $\qquad -\infty<x<+\infty$

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $\qquad -\infty<x<+\infty$

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}$ $\qquad -\infty<x<+\infty$

$\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$ $\qquad -1<x<1$

$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$ $\qquad -1<x\leq1$

$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ $\qquad -1\leq x\leq1$

$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$ $\qquad -1<x<1$

偷偷用 Taylor

D.1 (Taylor 在正项级数中) 讨论实数 p 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^p$ 的敛散性的影响.

由 $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, 有 $x-\sin x=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$.

故有 $\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{1}{6n^3}$

$\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^p\sim\left(\frac{1}{6n^3}\right)^p=\frac{1}{6^p}\cdot\frac{1}{n^{3p}}$.

由 p-级数的敛散性知, 当 $p>\frac{1}{3}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}}$ 收敛, 原级数收敛

当 $p\le\frac{1}{3}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}}$ 发散, 原级数发散. □

D.2 (Taylor 在任意项级数中) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-n\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

$u_n=2-n\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}$, 令 $t=\frac{1}{n}$, 有 $u_t=2-\frac{\sin t}{t}-\cos t=\frac{2t-\sin t-t\cos t}{t}$

由 Taylor 展开, $u_t=\frac{2t-\left(t-\frac{1}{6}t^3+o(t^3)\right)-t\left(1-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\right)}{t}=\frac{\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^3+o(t^3)}{t}=\frac{2}{3}t^2$.

故由比较判别法, 原级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$ 同敛散. 故原级数绝对收敛. □

D.3 (利用 Taylor 级数的幂级数求和). 求下列幂级数的和函数: (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

(1) 当 $x=0$ 时, $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n=0$

当 $x\ne0$ 时, $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+1-x$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\frac{(n+1)n(n-1)+(n+1)-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\frac{n+1}{(n+1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\frac{-1}{(n+1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\frac{n-1}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\quad(x\ne0).\quad=\sum_{n=2}^{\infty}(-x)^n\frac{n-1}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n+1}\frac{1}{(n-1)!}+(e^{-x}-1)+\frac{1}{x}(e^{-x}-1+x)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+(e^{-x}-1)+\frac{1}{x}(e^{-x}-1+x)$$

$$=e^{-x}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\quad(x\ne0)$$

(2) 当 $-1<x\le1$ 时, $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(-1<x\le1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x^{n+1}}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=(-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=-x(-\ln(1+x))-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=x\ln(1+x)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+x\right)$$

$$=x\ln(1+x)+\ln(1+x)-x=(1+x)\ln(1+x)-x.$$

当 $x=-1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ □

广义积分敛散性

先找奇点！

1° 无穷限广义积分

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负可积，则 $\int_a^{+\infty} f(x)$ 收敛 $\Longleftrightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,+\infty)$ 有上界.

比较判别法：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义且可积，有 $0\le f(x)\le g(x)$ $(a\le x<+\infty)$，则：

当 $\int_a^{+\infty} g(x)$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

当 $\int_a^{+\infty} g(x)$ 发散时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

比较判别法的极限形式：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义且可积，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$ $(0\le\lambda<+\infty)$，则：

当 $0\le\lambda<+\infty$，且 $\int_a^{+\infty} g(x)$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

当 $0<\lambda\le+\infty$，且 $\int_a^{+\infty} g(x)$ 发散时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散；

当 $0<\lambda<+\infty$ 时，两积分敛散性相同.

Cathy 判别法：设 $f(x)\ge 0$, $x\in[a,+\infty)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$ $(0\le\lambda\le+\infty)$，则有：

(1) 当 $0\le\lambda<+\infty$ 时，$p>1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(2) 当 $0<\lambda\le+\infty$ 时，$p\le 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

Abel 判别法：设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义且 $f(x), g(x)$ 满足：

(1) 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(2) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界.

则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛

狄利克雷判别法：设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义且 $f(x), g(x)$ 满足：

(1) 对 $\forall A>a$，积分 $\Phi(A)=\int_a^A f(x)dx$ 有界；

(2) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调趋于0.

则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛

例题

2° 无界函数广义积分

比较判别法：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义且可积，b 为奇点，且有 $0\le f(x)\le g(x)$ $(a\le x<b)$，则：

当 $\int_a^b g(x)$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

当 $\int_a^b g(x)$ 发散时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

比较判别法的极限形式：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义且可积，$f(x)\ge 0$, $g(x)>0$ $(a\le x<b)$，

且有 $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$ $(0\le\lambda\le+\infty)$，则：

当 $0\le\lambda<+\infty$，且 $\int_a^b g(x)$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

当 $0<\lambda\le+\infty$，且 $\int_a^b g(x)$ 发散时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散；

当 $0<\lambda<+\infty$ 时，两积分敛散性相同.

广义积分 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx$ 与 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow 0<p<1$

Cathy 判别法：设 $f(x)\ge 0$, $x\in[a,b)$，b 为奇点，若 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)=\lambda$ $(0\le\lambda\le+\infty)$，则有：

(1) 当 $0\le\lambda<+\infty$ 时，$0<p<1$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(2) 当 $0<\lambda\le+\infty$ 时，$p\ge 1$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

Abel判别法：设 $x=b$ 是 $f(x)$ 的奇点，且 $f(x)$, $g(x)$ 满足

(1) 广义积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛.

(2) $g(x)$ 在 (a,b) 上单调有界.

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 收敛

狄利克雷判别法：设 $x=b$ 是 $f(x)$ 的奇点，且 $f(x)$, $g(x)$ 满足

(1) 对 $\forall A\in(a,b)$，积分 $\Phi(A)=\int_a^A f(x)\,dx$ 有界；

(2) $g(x)$ 在 (a,b) 上单调，且 $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0$

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 收敛

例题

第 9 章　Fourier 级数

Fourier展开式　周期为 2π 的函数 $f(x)$，有 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

其中 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$，有 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$

其中 $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

狄利克莱收敛定理：$f(x)$ 周期为 2π，且在 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个第一类间断点外均连续，在 $[-\pi,\pi]$ 上有限个极值点，则 $f(x)$ 的 Fourier 展开式在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

例题 A.1

A.2（涉及延拓）已知函数 $f(x) = x^2$.

(1) 在 $-\pi \le x < \pi$ 内展开成余弦级数.

(2) 在 $0 \le x < \pi$ 内展开成正弦级数.

(3) 在 $0 \le x < 2\pi$ 内展开成 Fourier 级数.

(4) 求级数的和：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

(1) 由题，$f(x) = x^2 \quad (-\pi \le x < \pi)$

$f(x)$ 是偶函数，有 $b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n^3}\left((nx)^2\sin(nx) - 2\sin(nx) + 2nx\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n$

$f(x)$ 的余弦级数为 $\frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx \quad (-\pi \le x < \pi)$　　且有 $f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx \quad (-\pi \le x < \pi)$

(2) 对 $f(x)$ 进行奇延拓，有 $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < \pi \\ -x^2 & -\pi < x < 0 \end{cases}$.

$f(x)$ 是奇函数，有 $a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n^3}\left(-(nx)^2\cos nx + 2nx\sin nx + 2\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)$

$f(x)$ 的正弦级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right]\sin nx \quad (0 \le x < \pi)$　　且有 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right]\sin nx \quad (0 \le x < \pi)$

(3) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8}{3}\pi^2$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}$

$f(x)$ 的 Fourier 级数为 $\frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi)$　　且有 $f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi)$

(4) 令 $f(0) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(n\times 0) = 0$　有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

令 $f(-\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(-n\pi) = \pi^2$　有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$　　故有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2$　　□

第10章 常微分方程初步

一阶初等微分方程

I. 可分离变量的方程：$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$ 　　两边积分为 $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$

注意奇解. 若 $\exists y_0$, 使得 $g(y_0)=0$, 则 y_0 为方程奇解，要补充定义.

II. 线性可分离变量方程：$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ 　令 $u=ax+by+c$，则 $du=adx+bdy$，方程可化为 I 型.

III. 一阶齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ 　令 $u=\frac{y}{x}$，则 $dy=udx+xdu$，方程可化为 $f(u)=\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，方程可化为 I 型.

IV. 线性齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ 　一般情况，令 $u=a_1x+b_1y+c_1$，$v=a_2x+b_2y+c_2$，$du=a_1dx+b_1dy$ 　$dv=a_2dx+b_2dy$

解出 dx, dy. 故有 $\frac{a_1dv-a_2du}{b_2du-b_1dv}=f(\frac{u}{v})$，方程可化为 III 型.

一阶线性微分方程

V. 形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的方程

其通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$.

VI. Bernoulli 方程：形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ 　$(\alpha\neq 0,1)$ 的方程.

令 $u=y^{1-\alpha}$，有 $\frac{du}{dx}+(1-\alpha)P(x)u=(1-\alpha)Q(x)$，后转化为 V 型.

VII. 全微分方程

一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 的对称写法：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

若存在可微函数 $\lambda(x,y)$，使得 $d\lambda(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则称 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 为恰当微分，$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为全微分方程.

高阶微分方程

I. 形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的方程，连续积分n次即可，每次积分会产生一个常数.

II. 形如 $f(x,y',y'')=0$ 的方程，不显含 y. 令 $y'=p(x)$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$. 化为 $f(x,p,\frac{dp}{dx})=0$

III. 形如 $f(y,y',y'')=0$ 的方程，不显含 x. 令 $y'=p(x)$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$. 化为 $f(y,p,p\frac{dp}{dp})=0$

二阶线性微分方程

I. 已知一个解：刘维尔公式：$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}$

II. 常数变易法：　对方程 $y''+P(x)y'+q(x)y=f(x)$，其导出方程通解为 $\bar{y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

则方程特解 $y^*=C_1(x)+C_2(x)$，其中 $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)= \\ C_2'(x)= \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)= \\ C_2(x)= \end{cases}$

III. 齐次线性常系数方程：特征根法：$y''+py'+qy=0 \Rightarrow \lambda^2+p\lambda+q=0$

有两不等实根 λ_1,λ_2，则 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

有两相等实根 λ，则 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$

有两复根 $\alpha\pm\beta i$，则 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

IV. 待定系数法：　对方程 $y''+P(x)y'+q(x)y=f(x)$，$f(x)=(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)e^{\mu x}$. $\mu, a_i\in\mathbb{R}$，则有形如

$y^*=x^k(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)e^{\mu x}$ 的特解.

其中 k 是 $F(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q=0$ 根的重数、$A_0,\cdots,A_m$ 为待定常数.

对方程 $y''+P(x)y'+q(x)y=f(x)$，$f(x)=[A_s(x)\cos\beta x+B_t(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$A_s(x)$, $B_t(x)$ 是 x 的 s/t 次多项式，

则有形如 　$y^*=x^k[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$ 的特解. ，$m=\max\{s,t\}$

其中 k 是 $\alpha+i\beta$ 为 $F(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q=0$ 根的重数、$P_m(x)$, $Q_m(x)$ 为待定多项式.