Assignment 3*

Haopeng Shen[†]

December 13, 2024

*Due date:Dec 26th. Please scan your HW solution as PDF file, name it with "your name+ student ID+ HW1", and send it to Hongya's email:liuhongya@smail.nju.edu.cn. The assignment will be graded based on a "0", "1", "2", and "3". those who get "2" or above will be given full credit in the final evaluation for the "assignment" part.

[†]Business School, Nanjing University

1 第一题: New Keynesian Model

这一题是关于新凯恩斯模型的。
家庭的最优化问题如下:

$$\max_{C_t,N_t,B_t} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big(\frac{C_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \Big) Z_t \tag{1}$$

$$s.t.\ C_t + Q_t \frac{B_t}{P_t} = \frac{B_{t-1}}{P_t} + \frac{W_t}{P_t} N_t + \frac{\Pi_t}{P_t} \tag{2}$$

其中所有的字母代表的含义和课上一样（不清楚可以问）。消费束由不同种的消费品（variety j）合成

$$C_t = \left[\int_0^1 C_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \tag{3}$$

消费束的价格和不同消费品的价格关系为

$$P_t = \Big(\int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj \Big)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \tag{4}$$

厂商的生产函数为$Y_t(i) = AN_t(i)$。受到Calvo pricing的限制，企业每期有θ的概率不能重新设定价格。

1.1

列出家庭最优化问题的一阶条件。

1.2

请对相应的一阶条件对数线性化得到如下公式

$$\hat{w}_t = \sigma \hat{c}_t + \varphi \hat{n}_t$$

1.3

给定X_t作为花在购买各种类消费品（variety j）的总支出,家庭最大化消费束。**推导家庭对某一消费品的需求（$C_t(j)$）是由该消费品的价格（$P_t(j)$），消费束的价格（P_t），和消费束（C_t）本身（还有参数 ϵ）决定的（4分）**。如果无法推导出结论，请直接列出你记得的公式。

1.4

经过推导，我们把消费束当期价格P_t，前一期价格P_{t-1}和厂商重置的最优价格P_t^*联系起来：

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = \left[\theta + (1-\theta)(\frac{P_t^*}{P_{t-1}})^{1-\epsilon}\right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

请对其进行对数线性化，最终写出联系π_t和p_t^*,p_{t-1}的式子。

1.5

我们通过对数线性化厂商的最优价格设定条件，最终得出一个带预期的 Phillips curve。

$$\hat{\pi}_t = \lambda\hat{\phi}_t + \beta E_t\left\{\hat{\pi_{t+1}}\right\} \tag{5}$$

其中$\hat{\phi}_t$是厂商的实际边际成本。**还记得λ是θ的一个函数么？**（无需推导，但如果你不记得并且时间充裕，你可以推导）**λ是θ的增函数还是减函数？经济意义是什么？**

Assignment 3

Xi Xiang

2024.12.15

1 New Keynesian Model

家庭的最优化问题如下:

$$\max_{C_t,N_t,B_t} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) Z_t \quad (1)$$

s.t.

$$C_t + Q_t \frac{B_t}{P_t} = \frac{B_{t-1}}{P_t} + \frac{W_t}{P_t} N_t + \frac{\Pi_t}{P_t} \quad (2)$$

其中所有的字母代表的含义和课上一样（不清楚可以问）。消费束由不同种的消费品（variety j）合成

$$C_t = \left(\int_0^1 C_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \quad (3)$$

消费束的价格和不同消费品的价格关系为

$$P_t = \left(\int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad (4)$$

厂商的生产函数为 $Y_t(i) = AN_t(i)$。受到 Calvo pricing 的限制, 企业每期有 θ 的概率不能重新设定价格。

1.1

列出家庭最优化问题的一阶条件。

解

$$\begin{aligned}
\{C_t\}: &\quad \lambda_t = Z_t C_t^{-\sigma} \\
\{N_t\}: &\quad \lambda_t w_t = Z_t N_t^{\varphi} \\
\{B_t\}: &\quad Q_t = 1/R_t = \beta \mathbb{E}_t \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{P_t}{P_{t+1}}
\end{aligned}$$

□

1.2

请对相应的一阶条件对数线性化得到如下公式

$$\hat{w}_t = \sigma \hat{c}_t + \phi \hat{n}_t$$

解 由

$$w_t = \frac{W_t}{P_t} = \frac{N_t^{\varphi} Z_t}{C_t^{-\sigma} Z_t} = N_t^{\varphi} C_T^{\sigma}.$$

两边同时取对数，有

$$\ln w_t = \varphi \ln N_t + \sigma \ln C_t.$$

求导，有

$$\hat{w}_t = \varphi \ln \hat{n}_t + \sigma \ln \hat{c}_t.$$

□

1.3

给定 X_t 作为花在购买各种类消费品（variety j）的总支出, 家庭最大化消费束。推导家庭对某一消费品的需求 $C_t(j)$ 是由该消费品的价格 $P_t(j)$，消费束的价格 P_t，和消费束 C_t 本身（还有参数 ϵ）决定的。如果无法推导出结论，请直接列出你记得的公式。

解 由最大化问题

$$\begin{aligned}
&\max_{C_{t(j)}} \left[\int_0^1 C_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}j\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
&\text{s.t.} \quad X_t = \int_0^1 P_t(j) C_t(j) \mathrm{d}j
\end{aligned}$$

FOC

$$C_t(j)^{-\frac{1}{\varepsilon}} C_t^{\frac{1}{\varepsilon}} = \xi_t P_t(i).$$

我们有

$$C_t(j) = C_t(i) \left(\frac{P_t(i)}{P_t(j)}\right)^{\varepsilon}.$$

故

$$\begin{aligned}
X_t &= C_t(i) P_t(i)^{\varepsilon} \int_0^1 P_t(j)^{1-\varepsilon} \mathrm{d}j \\
&\Rightarrow C_t(i) = P_t(i)^{-\varepsilon} \frac{X_t}{\int_0^1 P_t(j)^{1-\varepsilon} \mathrm{d}j} \\
C_t &= \left(\int_0^1 C_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}j\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \cdots = \frac{X_t}{\left(\int_0^1 P_t(j)^{1-\varepsilon} \mathrm{d}j\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}
\end{aligned}$$

由

$$X_t = P_t C_t \Rightarrow P_t = \left[\int_0^1 P_t(j)^{1-\varepsilon}\mathrm{d}j\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

我们有

$$\begin{aligned} C_t(i) &= P_t(i)^{-\varepsilon}\frac{X_t}{\int_0^1 P_t(j)^{1-\varepsilon}\mathrm{d}j} = P_t(i)^{-\varepsilon}\frac{X_t}{P_t^{1-\varepsilon}} \\ &= \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon}\frac{X_t}{P_t} = \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} C_t. \end{aligned}$$

□

1.4

经过推导，我们把消费束当期价格 P_t，前一期价格 P_{t-1} 和厂商重置的最优价格 P_t^* 联系起来：

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = \left(\theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon}\right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

请对其进行对数线性化, 最终写出联系 π_t 和 p_t^*, p_{t-1} 的式子。

解 由上式, 我们有

$$\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon}.$$

两边取微分, 有

$$(1-\varepsilon)\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{-\varepsilon}(\mathrm{d}p_t - \mathrm{d}p_{t-1}) = (1-\theta)(1-\varepsilon)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}^*}\right)^{-\varepsilon}(\mathrm{d}p_t^* - \mathrm{d}p_{t-1}).$$

由 $\hat{x_t} = \dfrac{x_t - x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}x_t}{x}$, 且稳态时 $P_t = P_t^*$, 我们有

$$p\hat{p_t} - p\hat{p_{t-1}} = (1-\theta)(p\hat{p_t^*} - p\hat{p_{t-1}}).$$

即

$$\hat{\pi_t} = (1-\theta)(\hat{p_t^*} - \hat{p_{t-1}}).$$

□

1.5

我们通过对数线性化厂商的最优价格设定条件，最终得出一个带预期的 Phillips curve。

$$\hat{\pi}_t = \lambda\hat{\phi}_t + \beta E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\} \quad (5)$$

其中 $\hat{\phi}_t$ 是厂商的实际边际成本。还记得 λ 是 θ 的一个函数么？（无需推导，但如果你不记得并且时间充裕，你可以推导）λ 是 θ 的增函数还是减函数？经济意义是什么？

解

$$\lambda = \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta}.$$

是 θ 的减函数。

经济含义：无法改变价格的概率越高，即价格粘性越大，Phillips Curve 的斜率越平缓。λ 的值反映了价格调整频率对通胀率的影响。价格调整频率越高，λ 越小，实际边际成本对通胀率的影响也越小，通胀率更取决于预期。 □