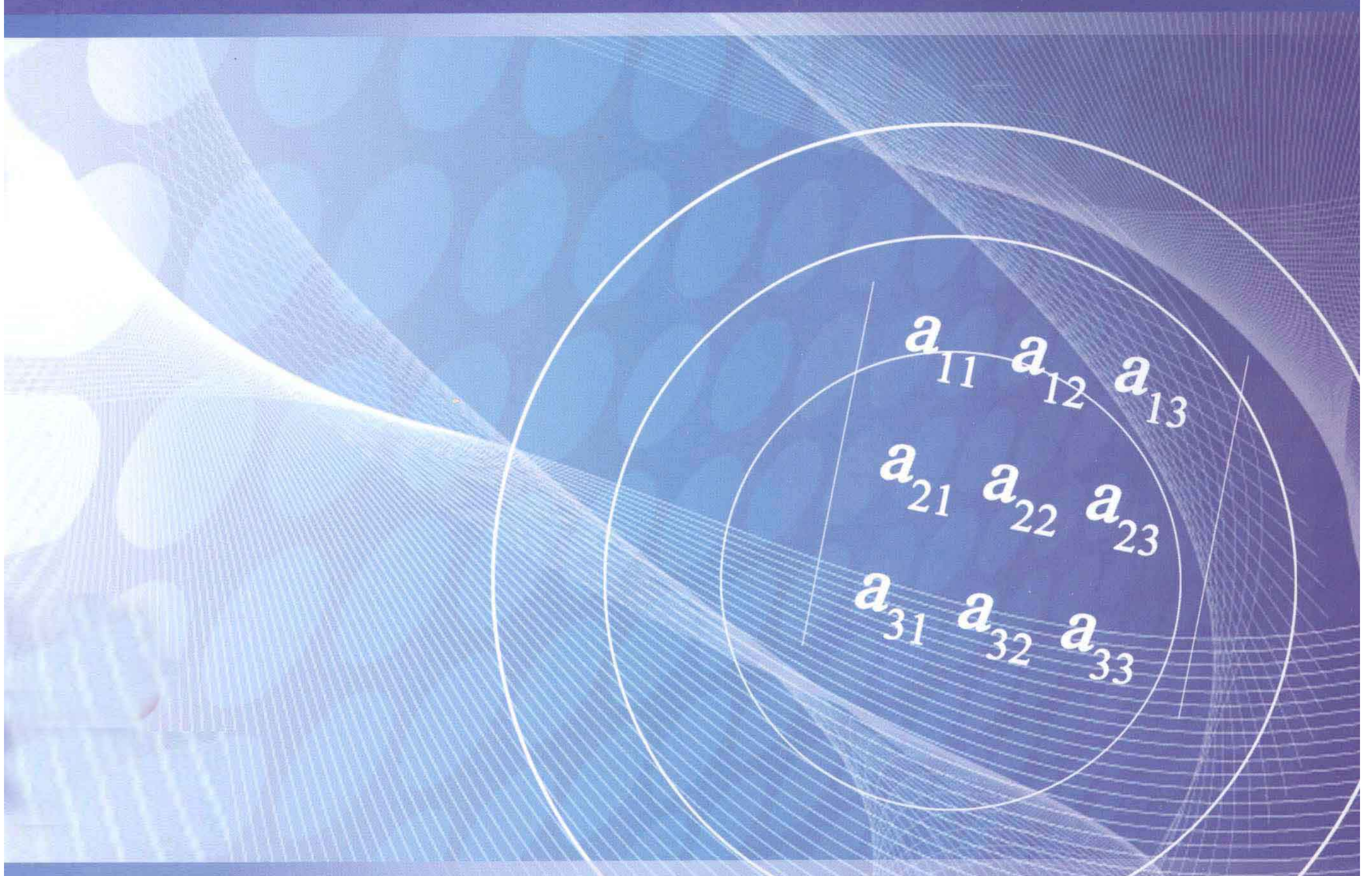
南京大学·大学数学系列

线性代数讲义

江惠坤 邵 荣 范红军 编



科学出版社

南京大学·大学数学系列

线性代数讲义

江惠坤　邵　荣　范红军　编

主讲：陈耀俊

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵和向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量以及矩阵的对角化、实二次型、线性空间与线性变换、内积空间. 本书作为大学数学的教材和参考书, 力求内容系统完整, 叙述简明, 推理详尽, 将抽象理论与具体例子相结合, 便于读者自学. 除系统介绍各个知识点的概念和有关性质以外, 还给出有代表性的例子并配有适量的习题. 附录中提供了计算线性代数问题的 Matlab 实验以及各章部分习题的答案或提示.

本书可用作高等院校非数学专业线性代数课程教材和参考书, 也可供相关人员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数讲义/江惠坤, 邵荣, 范红军编. —北京: 科学出版社, 2013

南京大学・大学数学系列

ISBN 978-7-03-037986-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①江… ②邵… ③范… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 135995 号

责任编辑: 黄 海 顾 艳 / 责任校对: 韩 杨
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 6 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2013 年 6 月第一次印刷 印张: 15 1/4
字数: 362 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

本书是根据南京大学公共数学第一层次的线性代数教材经多次修改而成. 内容是介绍线性代数的基础理论和基本演算方法，除了涵盖全国研究生入学统一考试对线性代数所要求的全部内容外，还包括线性空间和内积空间的基本内容，以满足对线性代数知识有较高要求的读者之需.

本书作为大学数学的教材和教学参考书，力求内容系统完整，叙述简明，推理详尽，将抽象理论与具体例子相结合，便于读者自学. 除系统介绍各个知识点的概念和有关性质以外，还给出有代表性的例子并配有适量的习题. 全书共分 7 章，前 5 章介绍线性代数的基本内容，第 6、第 7 章介绍抽象性较强的线性空间和内积空间的基本内容。在成书过程中，我们做了如下的考虑和安排：

第 1 章，将二、三阶行列式单列一节，以方便应用. 对 n 阶行列式，我们给出基于余子式和基于逆序数的两种定义，但本书全程采用第一种定义，对各个行列式性质给出了依据第一种定义的详细证明. 第 2 章，系统地介绍了有关矩阵和向量的各种概念、基本运算以及丰富的性质、方法和结果，使之成为研究多元问题的有力的运算工具. 第 3 章，详细地讨论了解一般线性方程组的问题，给出了高斯消元法的矩阵表示，即应用矩阵的 LU 分解去求解线性方程组，还简单介绍了具有实际应用背景的最小二乘法. 第 4 章，详细地讨论了特征值、特征向量、矩阵对角化问题，还介绍了矩阵的奇异值分解和若尔当标准形以及矩阵对角化在解微分方程中的一个应用. 第 5 章，讨论了实二次型的有关内容. 第 6 章，系统介绍了抽象的线性空间和线性变换概念、性质和处理方法. 第 7 章，介绍了内积空间的基本内容，特别对欧氏空间和酉空间上的重要结果给予以较为详细的讨论. 书后我们给出各章习题的答案或提示，附录中还介绍了应用 Matlab 软件解决线性代数问题的使用方法.

由于水平、能力所限，不当之处在所难免，希望同行、专家和广大读者批评指正.

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式是一个非常有用的数学工具, 不仅在数学的各个分支中要用它, 而且在数学以外的学科也经常用到它. 行列式更是线性代数中的一个基本内容和基本工具. 本章在介绍二、三阶行列式的基础上, 归纳给出一般 n 阶行列式的定义, 讨论行列式的基本性质, 给出它们在解线性方程组中的应用.

1.1　二阶与三阶行列式

本节内容是下一节内容的特例. 鉴于本节内容被应用的频率很高, 所以本书特别将其单独列出, 以应实际需要.

1.1.1　二阶行列式, 二元一次方程组

本节通过解线性方程组引进二阶行列式的概念及应用.

设有二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法求解. 为消去未知数 x_2, 两式分别乘以 a_{22}, a_{12} 得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}, \end{cases}$$

然后两式相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{1.2}$$

同样, 消去 x_1, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}, \tag{1.3}$$

于是, 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 有唯一的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.4}$$

这就是一般二元线性方程组 (1.1) 的求解公式. 为了便于记忆这个公式, 我们引进新的记号来表示结果 (1.4).

定义 1.1.1 (二阶行列式)　将 4 个可以进行乘法与加法运算的元素 a, b, c, d 排成两行两列, 引用记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{1.5}$$

并称之为**二阶行列式**. 行列式也可简记为 Δ、D 等.

从定义可以看出: 二阶行列式实际上是一个算式, 即从左上角到右下角的对角线 (主对角线) 上两元素相乘之后, 减去从右上角到左下角的对角线 (副对角线) 上两元素的乘积, 称之为计算二阶行列式的对角线法则.

注　这里 a, b, c, d 都是数，该行列式的计算结果就是一个数. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$$

这样, 方程组 (1.1) 的求解结果 (1.4) 就有下述便于记忆的形式: 记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $\Delta \neq 0$ 时, 则

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & b_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.6}$$

记忆方法:

(1) x_1, x_2 的分母相同, 其行列式由 (1.1) 中未知元系数按其原有的相对位置排成, 称为方程组 (1.1) 的系数行列式.

(2) x_1, x_2 的分子不同, 分别是把分母行列式中 x_1, x_2 的系数所在位置换成两个常数项, 并保持两数原有的上、下相对位置.

公式 (1.6) 要求 $\Delta \neq 0$, 当 $\Delta = 0$ 情形又如何呢? 式 (1.2) 和 (1.3) 可以写为

$$x_1\Delta = \Delta_1, \quad x_2\Delta = \Delta_2.$$

如果 $\Delta = 0$, 而 Δ_1, Δ_2 不都为零, 则无论 x_1 和 x_2 取什么值, 上面两式都不能同时成立, 故此时方程组 (1.1) 无解.

如果 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, 即同时成立

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0, \quad b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0.$$

于是

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}.$$

因而方程组 (1.1) 中的一个方程可由另一个方程乘以适当常数得到, 两个方程实质上成了一个方程, 但未知数却是两个, 因而方程组有无穷多组解.

综上所述, 可得

定理 1.1.1　对方程组 (1.1) 有如下结论:

(1) 若 $\Delta \neq 0$, 则方程组 (1.1) 有唯一的解: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

(2) 若 $\Delta = 0$, 但 Δ_1, Δ_2 不全为零, 则方程组 (1.1) 无解.

(3) 若 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, 则方程组 (1.1) 有无穷多组解.

例 1.1.1　解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - 3x_2 = -1. \end{cases}$$

解　因系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0.$$

故方程组有唯一的一组解:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-8}{-4} = 2, \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-4}{-4} = 1.$$ □

例 1.1.2　解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

故方程组有无穷多组解. 实际上, 方程组只含有一个方程 $x_1 + 2x_2 = -1$. 由此可知, 方程的解可表为 $x_1 = -(2x_2 + 1), x_2$ 可取任意值. □

例 1.1.3　讨论方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 4, \\ 6x_1 + 10x_2 = 2, \end{cases}$$

是否有解.

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

可见方程组无解. 事实上第一个方程与第二个方程是矛盾的. □

含有矛盾的方程的方程组称为**不相容的方程组**.

1.1.2　三阶行列式

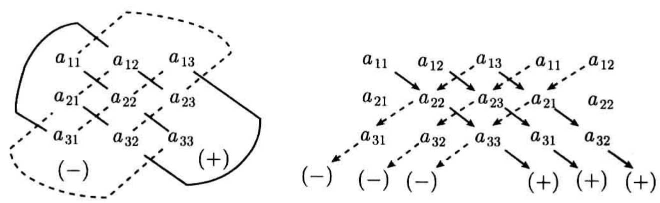
现在我们来推广 1.1.1 的结果

定义 1.1.2 (三阶行列式)　设有 9 个可以进行乘法和加法运算的元素排成三行三列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

并称之为**三阶行列式**，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为该行列式的元素.

上述定义表明三阶行列式是由 6 个积的代数和构成, 每项都是不同行不同列的 3 个元素的乘积, 这 6 项及所带的符号可按下图所示对角线法则记忆:



凡用实线连接的三个数的积, 均冠以正号, 凡以虚线相连的三个数的积, 均冠以负号.

例如:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ & = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot (-2) \\ & = 2 + 0 + 4 - 8 + 0 + 6 = 4. \end{aligned}$$

利用二阶行列式的定义, (1.7) 的右端可以变形为

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ & = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ & = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

因此上述三阶行列式的值, 也可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

用公式 (1.8) 计算三阶行列式的值称为按行列式的第一行展开. **其规则是**: 首先式 (1.8) 右端的三项是三阶行列式中第一行的三个元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 分别乘以一个二阶行列式, 而这个二阶行列式是划去该元素所在的行与所在的列后留下的 4 个元素保持原有相对位置所组成; 其次, 每一项之前都要乘以 $(-1)^{1+j}$, 而 1 和 j 是 a_{1j} 的行标和列标. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4.$$

两种算法算出的结果相同.

类似地, 三阶行列式的值可以按第三行展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

读者不妨验证计算行列式的值是可以按任何一行或任何一列展开.

以下给出的是空间解析几何中用到的三阶行列式的四条基本性质:

(i) 若行列式的某两行 (列) 的对应元素成比例，则该行列式的值为 0.

(ii) 若行列式的某一行拆成两行元素之和，则该行列式可拆成两个行列式之和. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(iii) 行列式中任一行的公因子可以提出成为该行列式的因子. 例如:

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(iv) 两行 (列) 元素交换后，行列式的值差一个负号. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

现在, 将三阶行列式应用于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为方程组 (1.9) 的系数行列式. 类似于二元一次方程组, 在 (1.9) 的 3 个方程中, 以常数项 b_1,b_2,b_3 分别代替 x_1,x_2,x_3 的系数得到行列式:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

有如下结论:

定理 1.1.2 对方程组 (1.9), 有

(1) 若 $\Delta\neq 0$, 则方程组 (1.9) 有唯一解 $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

(2) 若 $\Delta=0$, 而 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ 不全为 0, 则方程组 (1.9) 无解.

(3) 若 $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, 则方程组 (1.9) 可能无解也可能有无穷多组解.

例 1.1.4 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=-1. \end{cases}$$

解 因系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0,$$

故方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{11}{8},$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{9}{8},$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-\frac{3}{4}.$$

□

例 1.1.5 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3=2, \\ 3x_1+6x_2+3x_3=3. \end{cases}$$

解 显然, 4 个行列式均为零, 即 $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$. 而方程组与方程 $x_1+2x_2+x_3=1$ 同解, 因此原方程组有无穷多组解, 其解可表示为: $x_1=1-2x_2-x_3$, 其中 x_2,x_3 可取任意值. □

例 1.1.6　解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+x_3=2. \end{cases}$$

解　易知系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

且

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

但该方程组无解, 因为方程组的三个方程是矛盾的. □

注　这个例子说明, 三元线性方程组与二元线性方程组的情况不同! 它不能用四个行列式的值都为零去判定方程组有无穷多组解. 本书将在第 3 章中详细讨论判定 n 元线性方程组有解无解的一般方法.

显然可以看出, 对于未知数个数等于方程个数的二、三元线性方程组利用行列式这个工具来求解 (如果有解) 十分简便, 结果也容易记忆. 我们自然联想到对未知数个数等于方程个数的 n 元 $(n>3)$ 线性方程组的求解, 是否也有类似的结果呢? 直接检验便可发现: 四阶和四阶以上的行列式如果沿用 "对角线法则" 来定义, 那么, 它们将失去二阶和三阶行列式的主要性质, 也没有类似于二阶、三阶行列式的应用 (二、三元线性方程组的求解公式). 但可以用按行 (或列) 展开的方法来定义更高阶的行列式. 下面我们用递归方法给出 n 阶行列式的定义并讨论它们的一般性质和应用.

1.2　n 阶行列式

1.2.1　n 阶行列式的定义

定义 1.2.1 (n 阶行列式)　设有 n^2 个可以进行加法和乘法运算的元素排成 n 行 n 列, 引用记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称它为n **阶行列式**，它是一个算式，有时也用记号 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 表示这个 n 阶行列式. 其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为该行列式的元素，其第一个足标 i 表示该元素在第 i 行，其第二个足标 j 表示该元素在第 j 列. 在本课程中，行列式的元素都是数 (实数或复数)，这时行列式是一个数值，该数值可归纳定义如下:

当 $n=1$ 时, 一阶行列式的值定义为 $D_1=\det(a_{11})=a_{11}$. 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \tag{1.10}$$

其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

而

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

并称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的**余子式**, A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**. 显然 M_{ij} 为一个 $n-1$ 阶的行列式, 它是在 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后得到的一个行列式.

由于 M_{1j} 是划去 D_n 中第一行元素 a_{1j} 所在行与列的元素后得到的余子式 ($j=1,2,\cdots,n$), 因而 A_{1j} 是 D_n 的第一行诸元素 a_{1j} 所对应的代数余子式. 按这一规则求行列式的值, 我们也称式 (1.10) 为行列式 D_n**按第一行的展开式**, 即行列式值等于它的第一行诸元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

今后, 用 A、B、C 等大写字母表示行列式 (1.10), 也表示它的值. 例如,

$$A=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}\quad(n>1).$$

从定义 1.2.1 可见, 行列式这个算式是由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的若干乘积构成的代数和式. 与二、三阶行列式类似, n 阶行列式的展开式 (1.10) 中共有 $n!$ 项, 每一项都是 D_n 的不同行不同列的 n个元素的乘积, 并且在所有的 n 项中, 带正号的项和带负号的项各占一半 ($\frac{n!}{2}$, 可根据定义, 用数学归纳法证明, 留给读者).

定义 1.2.1 是基于“余子式”的一种行列式定义, 下面介绍与之等价的基于“逆序数”的另一种行列式定义. 先介绍逆序数的概念.

定义1、把 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数按任意固定的顺序排成一排, 每一种这样的排法称作一个n**元排列**. 显然, 这 n 个数共有 $n!$ 个 n 元排列. 按照自然顺序排成的排列 $1,2,\cdots,n$ 称为**自然排列**. 定义2. 如果在排列 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 中有 s_i 排在 s_j 的前面, 但 $s_i>s_j$, 则这一对数与自然排列的顺序相反, 我们称这一对数 s_i,s_j 是排列 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 的一个**逆序**. 定义3 一个排列中的所有逆序的个数称为这个排列的**逆序数**. 排列 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 的逆序数记为 $\tau(s_1,s_2,\cdots,s_n)$. 于是有

$\tau(1,2,\cdots,n)=0$,

$\tau(s_1,s_2,\cdots,s_n)=$ (s_1 后面比s_1 小的数的个数) + (s_2 后面比s_2 小的数的个数) + $\cdots$ + (s_{n-1} 后面比s_{n-1} 小的数的个数). 例如,

若 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 为奇/偶数，则称排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为奇/偶排列、

定义4. 在一个 n-级排列中，交换两个数的位置，其余不变，称为该排列的一个对换.

对换：$j_1,\cdots,\underline{j_l},\cdots,\underline{j_k},\cdots j_n$

$j_1,\cdots,\underline{j_k},\cdots,\underline{j_l},\cdots j_n$

相邻对换：$j_1,\cdots,\underline{j_l j_{l+1}},\cdots j_n$

$j_1,\cdots,\underline{j_{l+1} j_l},\cdots j_n$

定理1. 对换改变排列的奇偶性

情形1. 做一次相邻对换 $j_1\cdots j_{l-1}\underline{j_l j_{l+1}}j_{l+2}\cdots j_n$

$\downarrow$

$j_1\cdots j_{l-1}\underline{j_{l+1}j_l}j_{l+2}\cdots j_n$

$\tau(j_1\cdots j_l j_{l+1}\cdots j_n) = \tau(j_1\cdots j_{l+1} j_l\cdots j_n)\pm 1$

情形2 做一次非相邻对换 $j_1\cdots \underline{j_l} j_{l+1}\cdots j_{l+s}\underline{j_k}\cdots j_n$

$j_1\cdots j_k j_{l+1}\cdots j_{l+s} j_l\cdots j_n$

这次非相邻对换可通过若干次相邻对换实现：

○ ○ ○ j_l △ △ △ j_k ○ ○ ○

s

交换 $\underbrace{2s+1}_{\text{奇数}}$ 次

○ ○ ○ j_k △ △ △ j_l ○ ○ ○

$\therefore \tau(j_1\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n) \neq \tau(j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)$

定理2. 任意一个 n-级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与排列 $1\,2\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，并且所做对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

证明：只需证明 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 可以经过一系列对换化为 $1\,2\cdots n$.

对 n 进行归纳. $n=2$ 时显然结论成立.

假设结论对 $n-1$ 级排列成立.

若 $j_n=n$，则 $j_1j_2\cdots j_n = j_1j_2\cdots j_{n-1}n$

$\because$ $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可经一系列对换变成 $12\cdots n$.

$\therefore$ $j_1j_2\cdots n \to 1\,2\cdots n$ 成立.

若 $j_n\neq n$，则先做一次 j_n, n 对换，原排列化为 $j_1' j_2'\cdots j_{n-1}'n$

转化为 $j_n=n$. 故成立.

$\because$ $1\,2\cdots n$ 是偶排列

$\therefore$ 若 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列，则只能通过奇数次对换把 $j_1j_2\cdots j_n$ 化为 $1\,2\cdots n$.

偶数同理.

$\tau(1,4,3,2)=3, \tau(4,3,2,1)=6,\ \tau(n,n-1,\cdots,2,1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.2.2(基于逆序数的 n 阶行列式)　设有 n^2 个可以进行加法和乘法运算的元素排成 n 行 n 列，引用记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称它为n **阶行列式**，它是一个算式，其结果定义为

$$D_n=\sum_{s_1,s_2,\cdots,s_n}(-1)^{\tau(s_1,s_2,\cdots,s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}. \quad = \sum_{s_1,s_2,\cdots,s_n}(-1)^{\tau(s_1,s_2,\cdots,s_n)} a_{s_1,1}a_{s_2,2}\cdots a_{s_n,n}$$

其中，$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 取遍 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列，$\sum$ 是对这 $n!$ 个排列求和. 容易发现，和式中的 $n!$ 项在不计正负号的情况下，其实是取遍在不同行不同列的 n 个元素的乘积.

可以证明定义1.2.2 与定义1.2.1 是等价的，但需要较多篇幅，此处从略. 本书全程采用基于“余子式”的行列式定义.

例 1.2.1　计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

之值.

解　按定义 1.2.1

$$\begin{aligned} A &= -2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad +3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 28-12+15=31. \end{aligned}$$

□

例 1.2.2　以下行列式称为下三角行列式 (当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线上方的元素全为 0)，按定义计算其值

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$A=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\cdots=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

□

同样可计算上三角行列式 (当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$, 即主对角线下方的元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地, 对角行列式 (当 $i\neq j$ 时, $a_{ij}=0$, 即主对角线以外的元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此可知三角行列式的值为主对角线上元素的乘积.

对一般行列式, 按照行列式的递推定义来计算通常是很烦琐甚至是不可行的. 因此我们有必要讨论行列式的性质, 利用这些性质去简化计算.

定义 1.2.3 (转置行列式)　设

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\qquad A'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

我们称 A' 为行列式 A 的**转置行列式**. 显然, A' 是行列式 A 的行与列互换之后所得的行列式. 通常 A 的转置行列式也用 A^{T} 来表示.

1.2.2　n 阶行列式的性质

定理 1.2.1　*行列式与它的转置行列式的值相等.*

证明　先证明行列式可以按它的第一列展开，即设 $A=|a_{ij}|_{n\times n}$, 证明 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}$.

事实上，我们可以对行列式的阶 n 用归纳法. $n=2$ 时结论显然成立；现假设结论对 $n-1$ 阶行列式都成立，考察

$$A=a_{11}M_{11}+\sum_{k=2}^{n}a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}, \tag{1.11}$$

行列式的性质

性质1、行列式与其转置行列式的值相等.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明: $\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$ = 左 = 右.

• 一个重要表达式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (*)$$

其中 A_{ij} 是包括 a_{ij} 的项中提取公因子 a_{ij} 后的和式. $(1\le j\le n)$

性质2、一行的k倍可以提到行列式外面

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明: 由(*) 左 $= ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}$
$= k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})$ = 右.

性质3、一分为二

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明: 左 $=(a_{i1}+b_{i1})A_{i1}+(a_{i2}+b_{i2})A_{i2}+\cdots+(a_{in}+b_{in})A_{in}$
$=(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})+(b_{i1}A_{i1}+\cdots+b_{in}A_{in})$
= 右.

性质4、若 $a_{il}=a_{kl}$, $1\le l\le n$, 则有行列式为0.
有两行元素一样, 行列式值为0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ 第i行 \\ \\ 第k行 \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

证明: 在第i行中取一项: $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$

在第k行取对应一项: $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$

发生了对换. 故这两项绝对值相同, 符号相反.
故共有 $\frac{n!}{2}$ 对这样的项配对, 值之和为0.

性质5、有两行元素成比例, 行列式的值为0　证明: 性质2、性质4 ⇒

性质6、把一行的倍数加到另一行, 行列式值不变　证明: 性质3、性质5 ⇒

性质7、把行列式中的两行互换, 行列式反号.

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jl} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jl} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

证：<法一> 定义法：左取一项：$(-1)^{\tau(l_1\cdots l_i\cdots l_j\cdots l_n)} a_{1l_1}\cdots \underset{(\text{第}i\text{行})}{a_{il_i}}\cdots \underset{(\text{第}j\text{行})}{a_{jl_j}}\cdots a_{nl_n}$

右取对应一项：$(-1)^{\tau(l_1\cdots l_j\cdots l_i\cdots l_n)} a_{1l_1}\cdots a_{jl_j}\cdots a_{il_j}\cdots a_{nl_n}$

发生了对换，故绝对值相同，符号相反。

<法二>
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+a_{i1} & a_{j2}+a_{i2} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{j1} & -a_{j2} & \cdots & -a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+a_{i1} & a_{j2}+a_{i2} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{性质二}}{\underset{\text{提}-}{=}} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<法三> 构造
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{性质二}}{\underset{\text{性质四}}{=}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

- 一个重要表达式：A_i是什么？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

余子式：元素 a_{ij} 的余子式是指划去 i 行 j 列元素后剩余 $(n-1)^2$ 个元素按原排法构成的 $n-1$ 级行列式

引理1.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$
其中 $a_{n1}=a_{n2}=\cdots=a_{n,n-1}=0$
$a_{nn}=1$
即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

证：$\text{左} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}\cdot 1 = \sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1})} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}} = \text{右}$

定理3. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ A_{ij}称为元素 a_{ij} 的代数余子式

证：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

令 $(a_{i1}\cdots a_{ij-1}\ a_{ij}\ a_{ij+1}\cdots a_{in}) = (0\cdots 0\ 1\ 0\cdots 0)$，有

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\text{换}n-i\text{次}}{=} (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$\to\to\to$ 换 $n-j$ 次

$$= (-1)^{2n-(i+j)}\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & & \end{vmatrix} = (-1)^{2n-(i+j)} M_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

性质8. 设 $a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，有 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} a, & i=j \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

$i=j$ 时显然成立（一个重要表达式）

$i\neq j$ 时，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

第j行

第j行元素	$a_{j1}\ a_{j2} \cdots a_{jn}$	$a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}$
代数余子式	$A_{j1}\ A_{j2} \cdots A_{j2}$	$A_{j1}\ A_{j2} \cdots A_{jn}$

右 由性质8 $= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$

行列式的计算

[例1] P15 例1.2.3

[例2] 已知4阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. 求 $3A_{11} + A_{12} + 5A_{13} + 2A_{14}$.

原式 $= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6A_{13} = \cdots$

[例3] P15 例1.2.4

[例4] 求行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ 的值.

性质8的应用: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到第}i\text{行}]{\text{第1行的}-a_i\text{倍}} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ -a_1 & x_1-a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & x_2-a_2b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix}$ 按第1行展开

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i - a_ib_i) + \sum_{i=1}^{n}\Big(a_ib_i \prod_{1\le k\le n,\, k\neq i}(x_k - a_kb_k)\Big).$$

其中 M_{1k} 是 a_{1k} 的余子式. 由归纳假设, $M_{1k}(k=2,3,\cdots,n)$ 可以按第一列展开，记 M_{1k} 中 $a_{i1}(i=2,3,\cdots,n)$ 的代数余子式为 $(-1)^{(i-1)+1}M_{1k,i1}$, 代入 (1.11) 得

$$A=a_{11}M_{11}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}a_{1k}a_{i1}(-1)^{i+k+1}M_{1k,i1}. \tag{1.12}$$

现在把 A 按它的第一列形式展开为

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}=a_{11}M_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}, \tag{1.13}$$

并将 $M_{i1}(i=2,3,\cdots,n)$ 按它的第一行展开，记 M_{i1} 中 $a_{1k}(k=2,3,\cdots,n)$ 的代数余子式为 $(-1)^{(k-1)+1}M_{i1,1k}$, 代入 (1.13) 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}&=a_{11}M_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}\sum_{k=2}^{n}a_{1k}(-1)^{(k-1)+1}M_{i1,1k}\\&=a_{11}M_{11}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}a_{i1}a_{1k}(-1)^{i+k+1}M_{i1,1k}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

注意到 $M_{i1,1k}=M_{1k,i1}$, 其中 $M_{1k,i1}$ 是余子式 M_{1k} 中元素 $a_{i1}(i=2,3,\cdots,n)$ 的余子式. 比较 (1.12) 与 (1.14) 即得 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}$, 即证得 A 可按它的第一列展开.

再证 $A=A'$.

仍然对行列式的阶应用归纳法. $n=2$ 时, $A=A'$ 显然成立. 假设 $A=A'$ 对 $n-1$ 阶行列式成立，对 n 阶行列式，将 A' 按它的第一行展开:

$$A'=a_{11}N_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}N_{1i},$$

其中 $N_{1i}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A' 划去第一行与第 i 列后的子行列式. 由归纳法的假设, $N_{1i}=N'_{1i}\ (i=1,2,\cdots,n)$, 而 $N'_{1i}=M_{i1}(i=1,2,\cdots,n)$, 于是有

$$A'=a_{11}N'_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}N'_{1i}=a_{11}M_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}.$$

上式右边正是 A 按它的第一列展开的表达式. 从而 $A=A'$ 对一切 n 阶行列式都成立. □

注　由定理 1.2.1 可知，行列式对行所具有的性质同样适用于列，反之也是.

定理 1.2.2　*对调两行 (列) 的位置, 行列式的值相差一个负号, 即*

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

证明 分三种情况讨论:

情况 1: 第一行与第二行交换. 设 $A=|a_{ij}|_{n\times n}, B$ 为将 A 的第一行与第二行交换后所得行列式. 按定义将 A 展开,

$$A=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}.$$

对 M_{1k} 按第一行展开, 写为

$$M_{1k}=\sum_{i=1}^{k-1}a_{2i}(-1)^{i+1}M_{1k,2i}+\sum_{i=k+1}^{n}a_{2i}(-1)^{i}M_{1k,2i}.$$

其中 $M_{1k,2i}(i\neq k)$ 是 M_{1k} 中元素 a_{2i} 的余子式, 将 M_{1k} 的表示式代入 A 的展开式得

$$A=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k-1}a_{2i}a_{1k}(-1)^{i+k}M_{1k,2i}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_{2i}a_{1k}(-1)^{i+k+1}M_{1k,2i}.$$

另一方面, 按定义将 B 展开,

$$B=\sum_{i=1}^{n}a_{2i}(-1)^{1+i}M_{2i}.$$

对 M_{2i} 按第一行展开, 写为

$$M_{2i}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{1k}(-1)^{k+1}M_{2i,1k}+\sum_{k=i+1}^{n}a_{1k}(-1)^{k}M_{2i,1k}.$$

其中 $M_{2i,1k}(i\neq k)$ 是 M_{2i} 中元素 a_{1k} 的余子式, 将 M_{2i} 的表示式代入 B 的展开式得

$$B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}a_{1k}a_{2i}(-1)^{i+k}M_{2i,1k}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}a_{1k}a_{2i}(-1)^{i+k+1}M_{2i,1k}.$$

由于 $M_{2i,1k}=M_{1k,2i}$, 比较 A 与 B 右端的 $a_{1k}a_{2i}$ (分$k<i$与$k>i$) 的系数, 它们恰好差一个负号. 于是得 $A=-B$.

情况 2: 任意相邻两行交换. 只要逐次按第一行展开直到余子式的前两行是交换行, 利用情况 1 的结果即得所需结论.

情况 3: 任意两行交换. 设该两行中间有 k 行, 则可经过 $2k+1$ 次相邻行交换回到原行列式的状态. 利用情况 2 的结果, 两行交换后的行列式与原行列式相差 $(-1)^{2k+1}=-1$ 倍, 即为所需结论. □

由定理 1.2.2 易得

推论 1.2.3 两行 (列) 相等的行列式的值为 0.

推论 1.2.4 行列式可以按任一行 (列) 展开.

定理 1.2.5 行列式的任一行 (列) 元素的公因子可以提到行列式外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

该性质也可以表述为: 用数 k 去乘行列式的某一行 (列), 其结果就等于用数 k 去乘这个行列式.

证明　由推论 1.2.4 将行列式按第 i 行展开, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} ka_{ij}A_{ij} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□

由定理 1.2.5 不难得到:

推论 1.2.6　*若行列式某两行 (列) 对应元素成比例, 则行列式的值为零.*

证明　设第 i 行与第 j 行成比例, 即

$$\frac{a_{i1}}{a_{j1}} = \frac{a_{i2}}{a_{j2}} = \cdots = \frac{a_{in}}{a_{jn}} = k$$

亦即

$$a_{i1} = ka_{j1}, a_{i2} = ka_{j2}, \cdots, a_{in} = ka_{jn}.$$

于是将第 i 行元素的公因子 k 提到行列式外 (定理 1.2.5), 第 i 行与第 j 行的元素就对应相等, 故行列式为零 (推论 1.2.3). □

定理 1.2.7　*若行列式的第 i 行 (列) 的每一个元素都可以表示为两数的和, 则该行列式可以表示为两个行列式之和, 即*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明

$$\text{左边} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}A_{ij} = \text{右边}.$$

□

定理 1.2.8　*将行列式的任意一行 (列) 乘以数 k 加到另一行 (列) 上去, 行列式的值不变.*

证明 设第 j 行乘以 k 加到第 i 行, 不失一般性, 设 $j > i$. 由定理 1.2.7 和推论 1.2.6 得:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□

定理 1.2.9 行列式任一行 (列) 的元素与另一行 (列) 元素的代数余子式对应乘积之和为零. 即, 若设 $A = |a_{ij}|_{n\times n}$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} A, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$\left(\text{或} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} A, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \right)$$

证明 $i = j$ 时, 由推论 1.2.4 即得 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = A$; $i \neq j$ 时, 有

$$A + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (a_{jk} + a_{ik})A_{jk}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{(定理 1.2.8)}} A$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)$. □

上述性质对简化行列式的计算有很大作用. 在下一节将通过一些典型的例题, 介绍行列式计算的一些常用方法.

1.2.3　n 阶行列式的计算

为方便起见, 我们把以数 k 乘以第 j 行 (列) 加到第 i 行 (列) 上的步骤记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$, 交换第 i 行 (列)与第 j 行 (列) 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$, 第 i 行 (列) 提出公因子 k 记为 $\frac{1}{k}r_i\left(\frac{1}{k}c_i\right)$. 以后均用此约定.

例 1.2.3 计算

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

解

$$A\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}\overset{r_3-2r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

□

例 1.2.4 当 $x \neq a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时, 计算行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x\\ x & a_2 & x & \cdots & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

解　从其余各行中减去第一行得

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x\\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0\\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=1,2,\cdots,n}{\overset{c_i\div(a_i-x)}{=\!=\!=\!=}}\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-x} & \dfrac{x}{a_2-x} & \dfrac{x}{a_3-x} & \cdots & \dfrac{x}{a_n-x}\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

由于 $\dfrac{a_1}{a_1-x}=1+\dfrac{x}{a_1-x}$, 所以把后面所有各列加到第一列得到

$$A=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x}{a_i-x}\right) & \dfrac{x}{a_2-x} & \dfrac{x}{a_3-x} & \cdots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left[1+\sum_{i=1}^{n}(\frac{x}{a_i-x})\right]\prod_{i=1}^{n}(a_i-x).$$

这里

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x).$$

□

由例 1.2.4 我们知道, 在计算 n 阶行列式时, 首先须观察行列式的元素特点, 然后再寻求解题方法.

例 1.2.5　证明

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证明　记行列式之值为 D, 则

$$D \xlongequal{(\text{定理 } 1.2.1)} \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_2 & b_1 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_3 & b_2 & c_1 & 0 & -d \\ a_4 & b_3 & c_2 & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(\text{定理 } 1.2.5)} (-1)^5\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix}=(-1)^5D=-D.$$

由此得 $D=0$.　□

在例 1.2.5 的行列式中, 第 i 行第 j 列的元素是第 j 行第 i 列的元素的负数, 即 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 这样的行列式称为**反对称行列式**. 例如

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

都是反对称行列式.

仿例 1.2.5 可以证明: 一切奇数阶的反对称行列式都等于零.

例 1.2.6　证明 n 阶范德蒙德 (Vandermonde) 行列式 $(n \geqslant 2)$

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

证明　将第 $n-1$ 行 $(-x_1)$ 倍加到第 n 行, 第 $n-2$ 行 $(-x_1)$ 倍加到第 $n-1$ 行, 这样依次下去, 最后将第 1 行 $(-x_1)$ 倍加到第 2 行, 得

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}.$$

按第一列展开, 并提出各列的公因子 $(x_i-x_1)(i=2,3,\cdots,n)$, 得到递推公式:

$$\begin{aligned} &D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ &\quad=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}\\ &\quad=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)D_{n-1}(x_2,x_3,\cdots,x_n). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ =&(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)D_{n-1}(x_2,x_3,\cdots,x_n)\\ =&(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)[(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)D_{n-2}(x_3,x_4,\cdots,x_n)]\\ =&\cdots\\ =&(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots\\ &(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$$

□

例 1.2.7　证明: $n+m$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.15}$$

证明　记

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

以 A_{ij} 记元素 a_{ij} 在行列式 A 内的代数余子式, 对任意给定的正整数 m, 关于 A 的阶数 n 利用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, 将 D_n 按第一行展开 D_1, 得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = a_{11}B = A\cdot B,$$

结论成立.

现设 A 为 $(n-1)$ 阶行列式时结论成立, 考虑为 n 阶的情形. 仍按第一行展开 D_n, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$
= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{12} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m2} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} + \cdots
$$

$$
+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n-1} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m,n-1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.
$$

将归纳假设用于右端的每一个行列式, 得

$$
\begin{aligned} D_n &= a_{11}A_{11}B + a_{12}A_{12}B + \cdots + a_{1n}A_{1n}B \\ &= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n})B = AB. \end{aligned}
$$

即结论对于 n 也成立. □

式 (1.15) 常简记为

$$
D_n = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|.
$$

类似可得

$$
D_n = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|.
$$

需要注意的是

$$
D_n = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} \neq |A| \cdot |B|.
$$

此种情形下, 可将 A 的每一列依次与其前面的 m 列逐列互换, 则互换 $n \times m$ 然后便转化为 (1.15) 的形式, 于是有

$$
\boxed{\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{nm}\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = (-1)^{nm}|A||B|.}
$$

1.2.4　*n* 元线性方程组的克莱姆 (Cramer) 法则

用行列式解线性方程组, 在本章开始已做了介绍, 但只局限解二、三元线性方程组. 下

NANJING UNIVERSITY 南京大学

克莱姆法则

定理4、若 $D\neq 0$，则线性方程组(*)有唯一的解：$x_j=\frac{D_j}{D}$，$j=1,2,\cdots,n$.

证明：首先验证(*)有解，方法是验证上式确实是(*)的解.

将上式代入第i个方程

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$$

有：　左 $=\frac{1}{D}(a_{i1}D_1+a_{i2}D_2+\cdots+a_{in}D_n)$

只需证　$a_{i1}D_1+a_{i2}D_2+\cdots+a_{in}D_n=Db_i$. ↙将第i列展开，出现 b_i.

$$左=a_{i1}(b_1D_{11}+b_2D_{21}+\cdots+b_nD_{n1})+a_{i2}(b_1D_{12}+b_2D_{22}+\cdots+b_nD_{n2})+\cdots+a_{in}(b_1D_{1n}+\cdots+b_nD_{nn})$$

$$\begin{aligned}=&\boxed{b_1a_{i1}D_{11}}+\cdots+\boxed{b_ia_{i1}D_{i1}}+\cdots+\boxed{b_na_{i1}D_{n1}}\\+&b_1a_{i2}D_{12}+\cdots+b_ia_{i2}D_{i2}+\cdots+b_na_{i2}D_{n2}\\+&\cdots+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots\\+&b_1a_{in}D_{1n}+\cdots+b_ia_{in}D_{in}+\cdots+b_na_{in}D_{nn}\end{aligned}$$

$$=b_1\sum_{k=1}^{n}a_{ik}D_{1k}+\cdots+b_i\sum_{k=1}^{n}a_{ik}D_{ik}+\cdots+b_n\sum_{k=1}^{n}a_{ik}D_{nk}$$

↙性质8

$$=0+b_iD+0=Db_i$$ 证毕.

其次验证(*)解的唯一性.

↙代入原方程并构造 D_j.

设 $x_j=c_j$，$j=1,2,\cdots,n$ 是(*)的任意解，下证 $c_j=\frac{D_j}{D}$，$j=1,2,\cdots,n$.

代入原方程组，有

$$\begin{aligned}a_{11}c_1D_{1j}+\cdots+a_{1j}c_jD_{1j}+\cdots+a_{1n}c_nD_{1j}&=b_1D_{1j}\quad 同乘 D_{1j}\\a_{21}c_1D_{2j}+\cdots+a_{2j}c_jD_{2j}+\cdots+a_{2n}c_nD_{2j}&=b_2D_{2j}\\\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots&\qquad\cdots\\a_{n1}c_1D_{nj}+\cdots+a_{nj}c_jD_{nj}+\cdots+a_{nn}c_nD_{nj}&=b_nD_{nj}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1\sum_{k=1}^{n}a_{k1}D_{kj}+\cdots+c_j\sum_{k=1}^{n}a_{kj}D_{kj}+\cdots+c_n\sum_{k=1}^{n}a_{kn}D_{kj}=\sum_{k=1}^{n}b_kD_{kj}$$ 性质8

$$\Rightarrow 0+\cdots+c_jD+\cdots+0=D_j$$ 证毕

注意1、注意2.

定理5、若线性方程组(1.17)有非零解，则其系数行列式为0.（必要条件）

解题时需代入检验.

面我们讨论 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.16}$$

的解.

与二、三元线性方程组相类似, 在一定条件下，(1.16) 的解可以用 n 阶行列式表示.

定理 1.2.10(克莱姆法则)　对于 n 元线性方程组 (1.16), 若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组 (1.16) 有解, 且解是唯一的, 这个解可用公式表示为

$$x_j=\frac{D_j}{D}, \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将 D 的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 换成方程组右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得到的行列式. 即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

证明　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为满足方程组 (1.16) 的任一组数，将第 1 个方程乘以 a_{1j} 的代数余子式 D_{1j}, 第 2 个方程乘以 a_{2j} 的代数余子式 $D_{2j},\cdots$, 第 n 个方程乘以 a_{nj} 的代数余子式 D_{nj}, 得

$$\begin{cases} a_{11}D_{1j}x_1+a_{12}D_{1j}x_2+\cdots+a_{1n}D_{1j}x_n=b_1D_{1j}, \\ a_{21}D_{2j}x_1+a_{22}D_{2j}x_2+\cdots+a_{2n}D_{2j}x_n=b_2D_{2j}, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}D_{nj}x_1+a_{n2}D_{nj}x_2+\cdots+a_{nn}D_{nj}x_n=b_nD_{nj}, \end{cases}$$

n 个方程相加得

$$\sum_{i=1}^n a_{i1}D_{ij}x_1+\sum_{i=1}^n a_{i2}D_{ij}x_2+\cdots+\sum_{i=1}^n a_{in}D_{ij}x_n=\sum_{i=1}^n b_iD_{ij}.$$

应用行列式的定理 1.2.9 即得

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}D_{ij}x_j=\sum_{i=1}^n b_iD_{ij}=D_j,$$

即

$$Dx_j = D_j.$$

所以得

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

从而说明若方程组 (1.16) 有解，则其解是唯一的.

另一方面，根据行列式展开的性质 (推论 1.2.4), 将

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

代入方程组，得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{D_{kj}}{D} \right) = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{kj} \right) = b_i,$$

满足方程组 (1.16). 从而证得定理的结论. □

再讨论方程组 (1.16) 的一个特殊情形, 方程组 (1.16) 右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_2 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

这样的方程组称为**齐次线性方程组**, 而方程组 (1.16) 就称为**非齐次线性方程组**. 它作为 (1.16) 的特例, 有广泛的应用, 在线性方程组理论中占有重要的地位.

显然, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 为 (1.17) 的解. 线性方程组的解若全为零就称为零解 (平凡解), 若不全为零就称为非零解. 因此, 齐次线性方程组必有零解, 右端不全为零的非齐次线性方程组的解都是非零解.

假设 (1.17) 的系数行列式 $D \neq 0$. 因此时有 $D_1 = D_2 = \cdots = D_n = 0$, 故由克莱姆法则, (1.17) 只有唯一零解. 因此, 若 (1.17) 具有非零解, 必须 $D = 0$, 也就是证得了如下定理:

定理 1.2.11 含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组 (1.17) 若有非零解, 则它的系数行列式等于零.

该定理说明系数行列式 $D = 0$ 是齐次线性方程组 (1.17) 有非零解的必要条件. 在第 3 章中还将证明 $D = 0$ 是齐次线性方程组 (1.17) 有非零解的充分条件.

例 1.2.8 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

解 经简单计算得

$$D=\begin{vmatrix}2&1&3&-1\\1&3&2&0\\0&2&1&1\\3&-1&0&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_3]{r_1+r_3}\begin{vmatrix}2&3&4&0\\1&3&2&0\\0&2&1&1\\3&3&2&0\end{vmatrix}=12,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&1&3&-1\\-1&3&2&0\\1&2&1&1\\1&-1&0&-2\end{vmatrix}=24,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&0&3&-1\\1&-1&2&0\\0&1&1&1\\3&1&0&-2\end{vmatrix}=-12,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&0&-1\\1&3&-1&0\\0&2&1&1\\3&-1&1&-2\end{vmatrix}=0,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&1&3&0\\1&3&2&-1\\0&2&1&1\\3&-1&0&1\end{vmatrix}=36.$$

所以由克莱姆法则知:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{24}{12}=2,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-12}{12}=-1,x_3=\frac{D_3}{D}=0,x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{36}{12}=3.$$

□

以上解法在系数行列式 $D\neq 0$ 时才有效, 遇到 $D=0$ 就无法使用.

当 $D=0$ 时, 方程组有两种可能, 一是各方程间存在矛盾, 方程组无解; 另一种可能是有些方程重合, 即至少有一个方程不是独立的, 方程组就有无穷多组解. 例如 $\begin{cases}x_1+2x_2=1,\\2x_1+4x_2=3\end{cases}$ (两方程矛盾), $\begin{cases}x_1+2x_1=1,\\2x_1+4x_2=2\end{cases}$ (两方程重合). 当系数行列式 $D\neq 0$, 在用克莱姆法则求解时, 需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 尤其是当 n 较大时, 计算量非常大，计算时间非常长，有时不能用此方法去求解. 但克莱姆法则这一局限性并不影响它的重要性及其理论价值. 对于线性方程组的一般求解问题将在第 3 章中继续讨论.

例 1.2.9 问 λ 取何值时, 方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=0,\\\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\3x_1+\lambda x_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解?

解 由定理 1.2.11 知系数行列式应等于零, 即

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\\lambda&1&1\\3&\lambda&1\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=0.$$

得 $\lambda = 2$ 或 $\lambda = -1$. 此时，容易验证该方程组有非零解. 故当且仅当 $\lambda = 2$ 或 $\lambda = -1$ 时该方程组有非零解. □

习　题　一

1. 用对角线法则计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$,

其中 $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

2. 利用行列式解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2ax_1 - 3bx_2 + cx_3 = 0, \\ 3ax_1 - 6bx_2 + 5cx_3 = 2abc, \\ 5ax_1 - 4bx_2 + 2cx_3 = 3abc, \end{cases}$ $(abc \neq 0)$.

3. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 8 \\ 15 & 3 & 12 \\ 20 & 12 & 32 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & u & 0 & v \end{vmatrix}$.

4. 证明下列各式:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & ax & a^2 + x^2 \\ 1 & ay & a^2 + y^2 \\ 1 & az & a^2 + z^2 \end{vmatrix} = a(x-y)(y-z)(z-x)$;

(4) $D_n = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$

$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n;$

(5) $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}\ (a \neq b).$

5. 求出下列各方程的全部解:

(1) $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0;$ (2) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0;$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 4 & x^2 \\ 1 & -1 & 8 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$

6. 计算下列各题:

(1) 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式, 求 A_{32} 及 $A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}$;

(2) 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 求 x, y, z;

(3) $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

7. 计算下列 n 阶行列式 $(n \geqslant 2)$:

(1) $D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$; 按第n行展开 $= (-1)^{1+n} y^n + x^n$.

(2) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(4) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$;

(5) $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(6) $D_n = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

8. 用克莱姆法则解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + \omega y + \omega^2 z = \omega, \\ x + \omega^2 y + \omega z = \omega, \end{cases}$ 其中复数 $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

9. 问 λ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + \lambda x_2 = 0, \\ \lambda x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 仅有零解?

10. 问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解?

11. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + a x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + a x_3 + b x_4 = 0 \end{cases}$ 有非零解. 问 a, b 必须满足什么条件?

12. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x^2-2 & 3x-2 \\ 1 & x^3-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

线性代数第一章小结

行列式　余子式　代数余子式　三角行列式　对角行列式　转置　对调两行(列)

克莱姆法则

对角行列式的值等于对角线元素的乘积

$$D_n = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B| \qquad \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

沿第(i,j)元素展开时要乘$(-1)^{(i+j)}$!

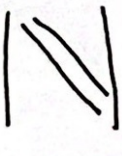
利用克莱姆法则要检验.

[题型1] $\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 计算：各行减第一行；各列$\div(a_i-x)$；各列加到第一列；沿第一列展开

[题型2] Vandermonde 行列式：$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$

[题型3] $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & u & 0 & v \end{vmatrix}$ 数字与0交替：行列对调化为对角阵.

[题型4] 双对角/三对角：递推关系！
先展开.

 或 .

[性质8应用] $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ 第1行$-a_i$倍加到第i行

打展 →

按第一行展开

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_ib_i) + \sum_{i=1}^{n}\left(a_ib_i \prod_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(x_k-a_kb_k)\right)$$

第 2 章　矩阵, 向量

本章系统介绍有关矩阵和向量的各种重要概念、基本运算规则和方法, 它们与行列式一起成为后续课程的重要基础和工具.

2.1　矩阵和 n 维向量的概念

定义1. **定义 2.1.1** (矩阵)　由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列数表，外加括号，写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

叫做 m 行 n 列矩阵, 简称 $\boldsymbol{m \times n}$**矩阵**. 这里用 $\boldsymbol{A}$ 表示定义中的矩阵. 这 $m \times n$ 个数叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素, a_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素. 元素都是实数的矩阵叫做**实矩阵**, 元素都是复数的矩阵叫做**复矩阵**. 本书的矩阵除特别说明外, 均指实矩阵, 并且用符号 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 或 $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ 表示全体 $m \times n$ 实矩阵的集合.

当 $m=n$ 时, $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶**方阵**. $m \times n$ 矩阵和 n 阶方阵可表示为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 也可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{A}_n$ 等.

定义2. **定义 2.1.2** (n 维向量)　n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

称为 n 维**向量**, 前者称为**行向量**, 后者称为**列向量**. $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为向量的第 i 个分量或坐标，分量都是实数的向量称为**实向量**, 实向量的全体用 $\mathbf{R}^n$ 表示; 分量都是复数的向量称为**复向量**, 复向量的全体用 $\mathbf{C}^n$ 表示. 本书中的向量除特别说明外, 均指实向量.

矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ 的第 i 行的元素所成的行向量 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 称为它的第 i 个行向量. 同样, 第 j 列元素所成的列向量 $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 称为它的第 j 个列向量.

今后, 以大写的黑体英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵, 以小写的黑体希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 等表示向量. 为了区分度, 行向量的各个元素之间可用逗号隔开，在区分度明显时，也可以用空格隔开.

所有元素都为零的矩阵称为**零矩阵**, m 行 n 列的零矩阵记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$. 所有分量都为零的向量称为**零向量**, 用希腊字母 $\boldsymbol{\theta}$ 表示, 有时也记为 $\mathbf{0}$.

下面介绍常用的几个特殊矩阵.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵, 如果当 $i\neq j$ 时, $a_{ij}=0$, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**. 为书写简洁起见, 也经常用 $\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 表示此对角矩阵 $\boldsymbol{A}$.

如果对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 $a_{11}=a_{22}=\cdots a_{nn}=k$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**数量矩阵**, 当 $k=1$ 时, 称为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$. 例如

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

分别是三阶数量矩阵和单位矩阵.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵, 如果当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**, 类似可定义**下三角形矩阵**

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

上三角形矩阵和下三角形矩阵统称为**三角形矩阵**.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵, 如果矩阵的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**. 如果矩阵的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ **为反对称矩阵**. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -7 \\ \frac{1}{2} & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

依次是对称矩阵和反对称矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行数和列数分别相同, 并且对应的元素也都相等, 则说这两个**矩阵相等**, 记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

如果行 (列) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的分量个数相同, 且对应分量也都相等, 则说这两个**向量相等**, 记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

定义3、**定义 2.1.3** (转置矩阵)　把 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行与列互换后得到一个 $n\times m$ 矩阵, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**. 记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

如果记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则由定义可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$. 例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

定义4、**定义 2.1.4** (方阵的行列式)　行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式, 记为 $|\boldsymbol{A}|$. 如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**非异矩阵**, 如果 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**奇异矩阵或退化矩阵**.

2.2　矩阵运算

2.2.1　矩阵的加法运算

定义5、**定义 2.2.1** (加法)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和定义为 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$, 记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

注意　只有当两个矩阵为同型矩阵时, 这两个矩阵才能进行加法运算. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

容易验证, 矩阵的加法满足下面运算规律:

(1) 交换律: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2) 结合律: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(3) 零矩阵: 对任一矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是同型矩阵).

(4) 负矩阵: 对任一矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 可定义 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$, 称 $-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵. 显然有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

由此, 定义矩阵的减法为: $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

例 2.2.1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 矩阵的数乘运算

定义6、**定义 2.2.2** (矩阵的数乘) 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 相乘的积定义为 $(ka_{ij})_{m\times n}$, 记为 $k\boldsymbol{A}$:

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

即: 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积是以 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素所得的矩阵.

例如, 若

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

则

$$2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法与数乘运算称为矩阵的**线性运算**. 它们满足下面的运算规律:

(1) 结合律: $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$;

(2) 分配律: $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}, \quad (k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$, 其中 k,l 均为实数, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵;

(3) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}; \quad 0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(4) (-1) 与 $\boldsymbol{A}$ 的乘积正是 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵 $-\boldsymbol{A}$.

注意1、由于行 (列) 向量可以看作一行 (列) 的矩阵, 因而定义 2.2.1 和定义 2.2.2 对于向量也是适用的.

例 2.2.2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解　在 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 两端同时加上 $(-3\boldsymbol{A})$ 得

$$-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 3\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}$$

两端再乘以 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 得 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$.　□

例 2.2.3 (方阵的数乘与其行列式)　已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是五阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=2$, 则 $|2\boldsymbol{A}|=2^5|\boldsymbol{A}|=32\times 2=64$.

注意2、一般，若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, k 为任意数，则有 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$.　□

2.2.3　矩阵的乘法运算

定义7. **定义 2.2.3** (矩阵的乘法)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times l},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 定义为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj},\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

前列后行

由定义知, 只有当 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时, 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义. 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 仍然是一个矩阵, 且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数相同, $\boldsymbol{C}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数相同. 例如, 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 3×4 矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 为 2×4 矩阵, 但 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 2.2.4　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7 & -9\\ -8 & 10\end{pmatrix}$, 求乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解　按定义 2.2.3,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -9\\ -8 & 10\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2\times 7+(-1)\times(-8) & 2\times(-9)+(-1)\times 10\\ -4\times 7+0\times(-8) & -4\times(-9)+0\times 10\\ 3\times 7+1\times(-8) & 3\times(-9)+1\times 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & -28\\ -28 & 36\\ 13 & -17\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

例 2.2.5　设 $\boldsymbol{A}=(a_1\,a_2\,\cdots a_n)$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

矩阵的乘法补充:

由矩阵乘法的定义:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\equiv\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

解

$$AB = (a_1\, a_2\, \cdots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n),$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}.$$

□

注 在例 2.2.4 中, 由于 $\boldsymbol{B}$ 的列数 2 与 $\boldsymbol{A}$ 的行数 3 不相等, 因而 $\boldsymbol{BA}$ 是没有意义的. 在例 2.2.5 中，虽然 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义, 但前者是 1×1 矩阵*, 而后者是 $n \times n$ 矩阵, 知 $n > 1$ 时两者是不可能相等的.

由此可知, 矩阵与矩阵相乘, 不成立交换律.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则说 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是可交换的. 例如, 若 $\boldsymbol{E}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵, $k\boldsymbol{E}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的数量矩阵, 则易于验证

$$\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{E}) = (k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A}.$$

可见, 单位矩阵及数量矩阵与任何同阶矩阵都是可交换的.

此外, 还需注意, 矩阵与矩阵相乘, 不成立消去律. 即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 时, 未必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC}$ 且 $\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{O}$ 时, 也未必成立 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

但 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$;

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

且 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}$, 但 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

以上所说的矩阵乘法不满足交换律和消去律, 是矩阵乘法区别于数的乘法的两个重要特点，但也有若干相同或相似的运算规律:

(1) 结合律: $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

(2) 数乘结合律: $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$, k 为数量.

---

* 当运算的最终结果是 1×1 矩阵 (a) 时, 可省去矩阵记号, 而把结果视作为数 a

(3) 分配律:　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$; $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.
此外, 还有 $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$. 当然, 所有这些等式中, 均需假定所遇到的和与积都有意义.

对于方阵, 可以利用矩阵乘法来定义方阵的幂和矩阵多项式的概念.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 定义 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\cdots$, $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$, 其中 k 为正整数, 这就是说 $\boldsymbol{A}^k$ 是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘. 称 $\boldsymbol{A}^k$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的k **次幂**. 显然, 它们仍为 n 阶矩阵. 再任取 $m+1$ 个实数 $a_0,a_1,\cdots,a_m$. 显然

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$$

仍为 n 阶矩阵. 称 $f(\boldsymbol{A})$ 为**矩阵多项式**.

若 $f(\boldsymbol{A})$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵多项式，且满足 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵方程 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{O}$ 的**根**或**解**，其中 $\boldsymbol{O}$ 为 n 阶零矩阵.

由于矩阵乘法适合结合律, 所以方阵的幂满足:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\qquad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl},$$

其中 $k,l=1,2,\cdots$. 又因矩阵乘法不满足交换律, 所以对任两个同阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 而言, 一般 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\\&=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,\\(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2.\end{aligned}$$

不过, 由于在矩阵 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 同阶时, 两者是可交换的, 因此有

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^2=(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2+2\lambda\boldsymbol{A}+\lambda^2\boldsymbol{E},\\&(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\lambda^2\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

其中 λ 是数.

例 2.2.6　由

$$f(x)=2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$$

可得

$$f(\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}).$$

一般地，由通常多项式经数乘、加法与乘法所得到的结果，对相应的矩阵多项式也有相同的结果. 特别地，通常多项式的因式分解结果同样适合于矩阵多项式. □

对于同阶方阵乘积的行列式, 我们有下面的公式:

例 2.2.7　证明　$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$, 记 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & \boldsymbol{O} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix},$$

由第 1 章例 1.2.7 可知 $D_{2n}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

在 D_{2n} 中以 a_{i1} 乘第 $n+1$ 行, a_{i2} 乘第 $n+2$ 行, $\cdots, a_{in}$ 乘第 $2n$ 行, 都加到第 i 行上去, 其中 $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} \end{vmatrix}=(-1)^n|\boldsymbol{C}|\cdot|-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{C}|,$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij}), c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$. 故 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 于是 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. □

反复运用这一结果, 不难得知, 对于任意有限多个同阶矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 成立

$$|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_k|.$$

2.2.4 转置矩阵的性质

矩阵的转置也是一种运算, 它具有下面性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A};\quad |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (k 是数);

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证明 前三式显然, 故只证 (4). 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times l},\qquad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n},$$

则

$$[(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}]_{ij}=[\boldsymbol{AB}]_{ji}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jl}b_{li},\ (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n).$$

另一方面, $[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]_{ij}$ 是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和, 亦即 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列与 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行对应元素乘积之和. 于是

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{ij}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{li}a_{jl}=[(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}]_{ij},\ (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n).$$

这就证明了 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. □

如果是三个矩阵相乘, 则

$$(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

一般地

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

例 2.2.8　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\4&5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解　法一:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\16&11\\28&19\end{pmatrix},$$

所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&16&28\\1&11&19\end{pmatrix}.$$

法二:

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&16&28\\1&11&19\end{pmatrix}.$$

□

2.3 分块矩阵

下面将介绍矩阵运算的一种有用的技巧 —— 矩阵的分块. 这种技巧在处理某些较高阶的矩阵时常常被用到. 下面通过例子说明如何分块及分块矩阵的运算方法.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 5 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&2&0&-3\\1&3&1&-2&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

用水平和垂直的虚线可以把它分隔成 4 块, 若记

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}2&0&-3\\1&-2&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{O}_{3\times2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

就可以把 $\boldsymbol{A}$ 看成由上面 4 个小矩阵所组成, 写作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{O}_{3\times2}&\boldsymbol{E}_3\end{pmatrix},$$

并称它是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 2×2 分块矩阵, 其中每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个子块. 显然, $\boldsymbol{A}$ 的 2×2 分块矩阵还可以有其他的分法.

一般对于一个 $m\times n$ 矩阵, 如果在行的方向分成 s 块, 在列的方向分成 t 块, 就得到 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $s\times t$ 分块矩阵. 记作

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc}n_1\text{列} & n_2\text{列} & \cdots & n_t\text{列}\end{array}\end{array}\begin{array}{l}m_1\text{行}\\ m_2\text{行}\\ \vdots\\ m_s\text{行}\\ \\ \end{array}$$

其中 $m_1+m_2+\cdots+m_s=m, n_1+n_2+\cdots+n_t=n$, 而 $\boldsymbol{A}_{kl}(k=1,2,\cdots,s;l=1,2,\cdots,t)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块.

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算相类似.

(1) 分块矩阵的加法. 设分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t},\qquad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{kl})_{s\times t},$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应的子块 $\boldsymbol{A}_{kl}$ 和 $\boldsymbol{B}_{kl}$ 都是同型矩阵, 则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{kl}+\boldsymbol{B}_{kl})_{s\times t}.$$

(2) 分块矩阵的数乘. 设分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t},$$

k 是数, 则

$$k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}.$$

(3) 分块矩阵的乘法. 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\qquad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}.$$

如果把 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别分块为 $r\times s$ 和 $s\times t$ 分块矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的列的分块法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分块法完全相同, 则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{kl})_{r\times t},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是 $r\times t$ 分块矩阵, 且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_{kl}&=\boldsymbol{A}_{k1}\boldsymbol{B}_{1l}+\boldsymbol{A}_{k2}\boldsymbol{B}_{2l}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ks}\boldsymbol{B}_{sl}\\ &=\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{B}_{il},\quad (k=1,2,\cdots,r;\ l=1,2,\cdots,t).\end{aligned}$$

用分块乘法求得的 $\boldsymbol{AB}$ 与不分块做乘法求得的 $\boldsymbol{AB}$ 是相同的.

设 $A=(a_{ij})_{m\times l}$, $B=(b_{ij})_{l\times n}$. 则A与B是可乘的.

若要对A与B进行分块，使AB变为相应分块阵的乘积，则A的列分块方式必须与B的行分块方式保持一致

$$\left(\begin{array}{c|ccc|cc|c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1l}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2l}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{ml}\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \hline b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn}\\ \hline b_{j+1,1} & b_{j+1,2} & \cdots & b_{j+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hline b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln}\end{array}\right)$$

在此前提，无论A的行和B的列如何分块，分块后的矩阵按照矩阵乘法定义总是可乘的

例 2.3.1　设

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\\1&0\\-1&1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解　把 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块成

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&O_2\\A_{21}&E_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}\\B_{21}\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}&O_2\\A_{21}&E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}\\B_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}\\A_{21}B_{11}+B_{21}\end{pmatrix}.$$

而

$$A_{11}B_{11}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix},$$

$$A_{21}B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix},$$

于是

$$AB=\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\\1&-2\\1&-1\end{pmatrix}.$$

□

(4) 分块矩阵的转置. $s\times t$ 分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $t\times s$ 分块矩阵, 如果记 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s}$, 则

$$B_{lk}=A_{kl}^{\mathrm{T}},\quad (l=1,2,\cdots,t;\ k=1,2,\cdots,s).$$

例如, 若 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\end{pmatrix}$, 则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_{11}^{\mathrm{T}}&A_{21}^{\mathrm{T}}\\A_{12}^{\mathrm{T}}&A_{22}^{\mathrm{T}}\\A_{13}^{\mathrm{T}}&A_{23}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

(5) 分块对角矩阵. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块, 其余子块都为零矩阵, 且在对角线上的子块都是方阵, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角矩阵, 也称**准对角矩阵**.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\3&4&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&4\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=(2)$, $\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}2&4\\0&-2\end{pmatrix}$.

矩阵按行分块和按列分块是两种常见的分块法 (设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$) :

(1) 按行分块 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots a_{in})$, $i=1,2,\cdots,m$.

(2) 按列分块

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n),$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

矩阵的乘法可先将矩阵按行, 列分块后再相乘.

例 2.3.2　设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n),$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_n\\\vdots & & \vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij} = \boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{\beta}_j = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}.$$

又设对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}_m = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 λ_i 为数. 则

$$\boldsymbol{\Lambda}_m \boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{m\times n} \boldsymbol{\Lambda}_n &= (\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 \boldsymbol{\beta}_1\ \lambda_2 \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \lambda_n \boldsymbol{\beta}_n). \end{aligned}$$

2.4　初等变换与初等矩阵

初等变换的过程就是求解线性方程组的过程.

应用矩阵处理各种问题时，经常采用一种重要方法，称作初等变换法，而施行初等变换的每一步都可以通过乘以一个初等矩阵去实现.

定义8. **定义 2.4.1** (初等变换)　下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

(1) 对调变换: 互换矩阵 i, j 两行 (列), 记作 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$.

(2) 数乘变换: 用任意数 $k \neq 0$ 去乘矩阵的第 i 行 (列), 记作 $kr_i (kc_i)$.

(3) 倍加变换: 把矩阵的第 i 行 (列) 的 k 倍加到第 j 行 (列), 其中 k 为任意数, 记作 $r_j + kr_i\ (c_j + kc_i)$.

定义9. **定义 2.4.2** (初等矩阵)　将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$, 做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵.

对应于三类初等行 (列) 变换, 有如下三种类型的初等矩阵.

(1) 初等对调矩阵

$$
\begin{array}{cl}
\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & & 1 & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & 1 & & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}, &
\begin{array}{l}
\\ \\ \longleftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \longleftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{cc}
\uparrow & \uparrow \\
\text{第}i\text{列} & \text{第}j\text{列}
\end{array} &
\end{array}
$$

即是将单位矩阵的第 i 行与第 j 行对调后所得矩阵.

(2) 初等倍乘矩阵

$$
\begin{array}{cl}
\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & k & & \\
& & & \ddots & \\
& & & & 1
\end{pmatrix}, &
\begin{array}{l}
\\ \\ \longleftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\uparrow \\
\text{第}i\text{列}
\end{array} &
\end{array}
$$

其中, $k \neq 0$ 是任意数. 即是将单位矩阵的第 i 个 1 换成 k $(k \neq 0)$ 后所得矩阵.

(3) 初等倍加矩阵

$$
\begin{array}{cl}
\boldsymbol{E}(i,j(k))=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & \cdots & k & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}, &
\begin{array}{l}
\\ \\ \longleftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \longleftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{cc}
\uparrow & \uparrow \\
\text{第}i\text{列} & \text{第}j\text{列}
\end{array} &
\end{array}
$$

即是将单位矩阵的第 i 行第 j 列的元素换成 k 后所得矩阵.

例 2.4.1　计算矩阵与初等矩阵的乘积:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

由此例可看出, 初等矩阵左 (右) 乘一个矩阵的结果是对这个矩阵做相应的初等行 (列) 变换.

一般地, 可给出初等变换与初等矩阵的关系. 左行右列

定理1、**定理 2.4.1** (初等变换与初等矩阵)　*设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以一个相应的 m 阶初等矩阵; 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以一个相应的 n 阶初等矩阵.*

证明　只需具体验证即可, 此处只举一种情形. 设 $\boldsymbol{A}$ 按行分块, 对 $\boldsymbol{A}$ 施行第三种初等行变换, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘 k 倍加到第 i 行上, 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i+kr_j} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}.$$

而

$$\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_i \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \ddots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}.$$

说明施行上述初等变换相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘一个相应的 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i,j(k))$, 其他情形可类似证明. □

注 注意定理说法中“相应”的含义, 具体来说, 就是

$\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}$: 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行互换;

$\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}$: 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 k;

$\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{A}$: 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以 k 加到第 i 行上;

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j)$: 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列互换;

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i(k))$: 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以 k;

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j(k))$: 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以 k 加到第 j 列上.

例如, 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, 将 1, 2 行互换, 则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}(1,2)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 左乘初等矩阵 $\boldsymbol{E}(1,2)$, 就达到了互换 1, 2 行的效果. 再如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+2c_3}\begin{pmatrix}5&0&1\\5&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(3,1(2))=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&1\\5&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

这是将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 3 列乘以 2 加到第 1 列的结果.

定义10、**定义 2.4.3** (行 (列) 等价矩阵, 等价矩阵) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$, 称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$**行等价**, 记作 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\boldsymbol{B}$; 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$, 称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$**列等价**, 记作 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{c}\boldsymbol{B}$; 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$, 称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$**等价**, 记作 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$. (对等)

矩阵之间的等价具有通常等价关系的下列3个性质:

(1) 自反性: $\boldsymbol{A}$ 与其自身等价;

(2) 对称性: 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价;

(3) 传递性: 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价.

由等价关系可以将矩阵分类, 我们将等价的矩阵作为一类. 在第 3 章中将看到, 具有行等价关系的矩阵所对应的线性方程组有相同的解.

为下面叙述方便，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素全为零的行 (列) 称为**零行(列)**，元素不全为零的行 (列) 称为**非零行(列)**.

零矩阵 0 也是梯形矩阵, 是标准形矩阵

定义1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵. 若 A 满足:

(1) 如果第 i 行(列)全为 0, 则对所有 $l>i$, 第 l 行(列)全为零.

(2) 如果 $A\neq 0$, 且从第 1 行(列)开始, 每行(列)第一个非零元素前面 0 的个数严格增加, 则称 A 是行(列)梯形矩阵.

(3) 每个非零行(列)的第 1 个非零元素是 1, 且所在列(行)的其余元素均为 0. 则称 A 是行(列)简化梯形矩阵. 简化

若 A 既是行简化, 又是列简化, 则 A 是标准形矩阵. $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ 阵的

如何把化一个矩阵用行初等变换化为行梯形矩阵?

首先检查第 1 列元素是否全为 0.

若不全为 0, 比如 $a_{11}\neq 0$, 则可将 a_{i1} $(2\le i\le m)$ 都变为 0.

对矩阵 A_1 重复该过程.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & A_1 & \cdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

定理2. **定理 2.4.2**(矩阵的化简)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则

(1) 存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 使 $\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$(即对 $\boldsymbol{A}$ 施行有限次的初等**行**变换) 成为 $m\times n$ 阶**行简化**梯形矩阵.

也存在 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t$(即对 $\boldsymbol{A}$ 施行有限次的初等**列**变换) 成为 $m\times n$ 阶**列简化**梯形矩阵.

(2) 可以经过有限次的初等**行**变换和初等**列**变换, 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形.

对 $m\times n$ 矩阵来说, 标准形个数为 $\min\{m,n\}+1$.

例 2.4.2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 可经下列行初等变换化为行简化梯形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+(-1)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+1\cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+(-2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

最后得到的这个矩阵已是一个行简化梯形矩阵. 与上面施行的行初等变换对应的初等矩阵为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

经计算得

$$P_4P_3P_2P_1A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-4&5\\1&3&-5&7\\2&3&-7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

2.5 矩阵的秩

矩阵的秩的概念是研究线性方程组理论的重要基础. 对于任一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来说, 也可用行列式理论来探讨 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的内在特性, 这就是矩阵的秩的概念.

定义12、**定义 2.5.1** (矩阵的子式) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 任取 $\boldsymbol{A}$ 的 k 行与 k 列 ($0<k\leqslant\min\{m,n\}$), 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 按原来顺序排成的 k 阶行列式, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**.

例如, 在 2×3 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&1\end{pmatrix}$$

中, 1 阶子式是由其中一个元素所构成, 共有六个 1 阶子式, 它的三个 2 阶子式是:

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&-3\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}2&-1\\-3&1\end{vmatrix}.$$

一般地, $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^kC_n^k$ 个. $C_m^k C_n^k$ 可写作 $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$

定义13、**定义 2.5.2** (矩阵的秩) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 如果 $\boldsymbol{A}$ 中至少存在一个非零的 r 阶子式 D, 且所有 $r+1$ 阶子式 (如果存在的话) 全为零, 则 D 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式, 数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**, 记为 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$(或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$). 并规定零矩阵的秩等于 0.

注 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子式的阶数不超过 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数的最小值, 所以 $0\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$. 又矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个子式必是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的某个子式的转置, 反过来也是如此, 而行列式的转置不改变它的值, 所以有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于它的阶数, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**, 由于 n 阶矩阵有且只有一个最高阶子式 $|\boldsymbol{A}|$, 故, $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 从而又得, $\boldsymbol{A}$ 为非异矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵. 上述概念和与之有关的直接结论归结为:

(1) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数;

(2) $0\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min(m,n)$;

(3) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$;

(4) 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$(即 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵) $\Longleftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0\Longleftrightarrow\boldsymbol{A}$ 非异.

例 2.5.1 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\5&0&4\\-1&3&-2\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&-9&3\\0&1&-3&4\\-2&-3&9&6\end{pmatrix}.$$

解 由于 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$; 由于 $\boldsymbol{B}$ 中最高阶子式为 3 阶, 共有 4 个, 全为零. 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant 2$, 又有二阶子式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 2$. □

对于行、列数较大的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 用秩的定义计算 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 有时要计算很多个子式的值, 工作量相当大. 因此, 我们想用初等变换来计算 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 因为初等变换能够把矩阵化为阶梯形, 且梯形矩阵的秩容易求出. 但初等变换能否保持矩阵的秩不变呢? 下面的定理给了我们肯定的回答.

定理3、**定理 2.5.1** *初等行、列变换不改变矩阵的秩.*

证明: 由于 $r(A^T)=r(A)$. 只需证明行初等变换不改变矩阵的秩.
设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $r(A)=r$, A经过一次行初等变换变为B、
设D是A的一个r级非零子式, 选自A的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行, 第 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列、
下证 $r(A) \le r(B)$

1°.2°. 如果初等变换是交换两行或用非零的数k乘以某行.
则在B中选取原来A中第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行在B中所在行, 以及第 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列
所构成的r级子式D', 是B的一个非零子式. 故 $r(A)=r\le r(B)$

3°. 根据以上讨论, 不妨假定D选自A的第 $1, 2, \cdots, r$ 行, 第 $1, 2, \cdots, r$ 列、
现设初等变换是把第i行的k倍加到第j行

情形1、$i, j < r$、
此时B中的第 $1, 2, \cdots, r$ 行, 第 $1, 2, \cdots, r$ 列构成一个r级子式D',
该r级子式D'相当于把D中的第i行的k倍加到第j行得到的.
故 $r(A)=r\le r(B)$.

情形2. $i, j \ge r+1$.
此时B中第 $1, 2, \cdots, r$ 行, 第 $1, 2, \cdots, r$ 列构成非零子式D.
故 $r(A)=r\le r(B)$

情形3. $i\le r$ 且 $j\ge r+1$
同情形2

情形4. $i \ge r+1$ 且 $j \le r$.

$$B=\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots\ a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jr}+ka_{ir} & a_{j,r+1}+ka_{i,r+1} & \cdots\ a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots\ a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{i,r+1} & \cdots\ a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \cdots\ a_{mn} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ j \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

$D_1 = D + kD_2 = D + k(-1)^{r-j}D_3$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,r} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \text{(不是子式)} \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,r} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \end{vmatrix} \text{(是B的一个子式)}$$

∵ D不为0 ∴ D_1、D_3 不全为0.
故至少存在一个r级非零子式 $r(A)=r\le r(B)$
综上, 定理3得证.

3).
前两种初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$,
阶子式 $\widetilde{D} \neq 0$. 这时就有
(1)$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i+kr_j} \boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 的第 i
非零子式, 从而有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \geqslant r$.
在行, 这时若 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行
$(\boldsymbol{B}) \geqslant r$; 若 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行是
$j_1 \ \cdots \ a_{m_1 j_r}$
$j_1 \ \cdots \ a_{j j_r}$,
$j_1 \ \cdots \ a_{m_r j_r}$
这一行调整到其应在的位
$= D \neq 0$, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \geqslant r$.
$\boldsymbol{A}$, 故也有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.
$\boldsymbol{B}$). □

如果行梯形矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 共有 k 个非零行, 则 $\boldsymbol{A}$ 的高于 k 阶的一切子式都等于零. 今设第 i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 行的第一个非零元的列码为 j_i, 即元素 $a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \cdots, a_{k,j_k}$ 都不等于

零, 则 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 k 阶子式 (上三角行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \cdots & a_{1,j_k} \\ 0 & a_{2,j_2} & \cdots & a_{2,j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,j_k} \end{vmatrix} = a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{k,j_k} \neq 0.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 k. 这样，我们就得到一个很有用的结论：

定理4、**定理 2.5.2**　行梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数.

推论1、**推论 2.5.3**　任一满秩矩阵都可以经过若干次初等行变换变为单位矩阵, 也可以经过若干次初等列变换变为单位矩阵.

∵ A 是可逆矩阵 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow$ A 是满秩矩阵.

∴ 推论1对任一可逆矩阵也成立.

由初等变换与初等矩阵之间的关系. 存在初等阵 $P_s,\cdots,P_2,P_1$, 使得

$$P_s\cdots P_2P_1A=E.$$

这表明　$A^{-1}=P_s\cdots P_2P_1$.

现对分块矩阵 (A,E) 实施行初等变换, 目标是使 A 变为单位阵 E.

$$(A\ \ E)\xrightarrow{P_1}(P_1A\ \ P_1E)\xrightarrow{P_2}(P_2P_1A\ \ P_2P_1E)\to\cdots\xrightarrow{P_s}(\underbrace{P_s\cdots P_2P_1A}_{E}\ \ \underbrace{P_s\cdots P_2P_1E}_{A^{-1}}).$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

最后的矩阵是有二个非零行的梯形矩阵，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. □

例 2.5.3　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & \lambda & 0 \\ 1 & -5 & 6 & \mu \end{pmatrix}$, 且 $r(\boldsymbol{A})=2$, 求 λ 及 μ 的值.

解　对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\frac{1}{3}r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -4 & \lambda & 0 \\ 1 & -5 & 6 & \mu \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & -6 & 6 & \mu+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 6-2\lambda & \mu+2 \end{pmatrix}.$$

已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. 所以得 $\lambda=3,\ \mu=-2$. □

2.6　可逆矩阵与伴随矩阵

在数集中有加法, 减法, 乘法, 除法运算. 对于矩阵, 我们定义了加法, 减法, 数乘, 乘法运算，但没有除法运算. 其实在矩阵运算中，确实没有一般意义下的除法运算，但可以有特定意义下的除法运算，用逆矩阵的乘法来处理矩阵的除法. 在本节中, 我们将给出逆矩阵的概念、矩阵可逆的充要条件, 并介绍求逆矩阵的两个方法.

定义14、**定义 2.6.1** (逆矩阵)　对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果存在同阶方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**, 简称逆阵, 记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

注　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵是唯一的. 事实上, 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵, 则由逆矩阵定义知

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}.$$

可得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=(\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{CE}=\boldsymbol{C}.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵是唯一的.

由定义 2.6.1 可知，若 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在, 则 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 同时，容易验证单位矩阵 $\boldsymbol{E}$, 数量矩阵 $k\boldsymbol{E}(k\neq 0)$, 初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i,j),\boldsymbol{E}(i(k)),\boldsymbol{E}(i,j(k))$ 都是可逆的，它们的逆矩阵分别为

$$\boldsymbol{E}^{-1}=\boldsymbol{E};\quad (k\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{E};\quad (\boldsymbol{E}(i,j))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j);$$
$$(\boldsymbol{E}(i(k)))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);\quad (\boldsymbol{E}(i,j(k)))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j(-k)).$$

可逆矩阵还有下列基本性质:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$; 还有 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.　$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 数 $k\neq 0$, 则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.　$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}\cdot A^{-1}$

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(4) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆, 且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明　(1) 将等式 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 改写为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，由定义 2.6.1 即知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

由 $|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|=1$, 即得 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

(2) 因为

$$(k\boldsymbol{A})(k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=(k\cdot k^{-1})(\boldsymbol{AA}^{-1})=\boldsymbol{E},$$
$$(k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(k\boldsymbol{A})=(k^{-1}k)(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E},$$

所以 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) 因为

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AA}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

所以知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(4) 因为

$$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AEA}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E},$$
$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E},$$

所以知 $\boldsymbol{AB}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. □

性质 (4) 可推广到有限个同阶可逆矩阵的乘积, 即若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 都可逆, 则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{-1}=\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{A}_{k-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

例 2.6.1 试证明下列矩阵为可逆矩阵, 并求其逆矩阵:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 为对角矩阵, 其中 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为非零实数.

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}$, 其中 a,c 为非零实数.

证明 (1) 由于

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^{-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

所以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可逆, 且其逆矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}&&&\\&\lambda_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^{-1}\end{pmatrix}$.

(2) 根据可逆矩阵定义, 需要证明存在一个二阶矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$, 使 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{CB}$. 若 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{E}$, 则有

$$\begin{cases}ac_{11}=1,\\ac_{12}=0,\\bc_{11}+cc_{21}=0,\\bc_{12}+cc_{22}=1.\end{cases}$$

解得 $c_{11}=\dfrac{1}{a},\ c_{12}=0,\ c_{21}=-\dfrac{b}{ac},\ c_{22}=\dfrac{1}{c}$, 即

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a}&0\\-\dfrac{b}{ac}&\dfrac{1}{c}\end{pmatrix}.$$

而 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{E}$, 故 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵, 其逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$. □

例 2.6.2　设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程: $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})^{-1}$.

证明　由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=10\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{A},$$

立得

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right)=\boldsymbol{E}=\left(\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right)\boldsymbol{A}.$$

由逆矩阵定义知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$. 再由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})=6\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}),$$
$$\left(\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\right)(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\left(\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\right).$$

故，仍由逆矩阵定义知 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$. □

注　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也不一定可逆；即使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 一般 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$. 例如，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

易知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆, 但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不可逆；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 均可逆, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 也可逆, 但 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{C}^{-1}\neq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})^{-1}$.

为了讨论方阵的可逆性, 并在可逆的情形下寻求计算逆矩阵的方法, 我们引入一类非常重要的矩阵叫伴随矩阵.

定义16、**定义 2.6.2** (方阵的伴随矩阵)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵, A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则称矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

例 2.6.3　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

解　因为

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0&4\\1&6\end{vmatrix}=-4,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-2&5\\1&6\end{vmatrix}=17,\ A_{31}=\begin{vmatrix}-2&5\\0&4\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-3&4\\2&6\end{vmatrix}=26,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1&5\\2&6\end{vmatrix}=-4,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1&5\\-3&4\end{vmatrix}=-19,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-3&0\\2&1\end{vmatrix}=-3,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=-5,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1&-2\\-3&0\end{vmatrix}=-6.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}-4&17&-8\\26&-4&-19\\-3&-5&-6\end{pmatrix}.$$

□

例 2.6.4　证明: $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$

$$\boldsymbol{AA}^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|&0&\cdots&0\\0&|\boldsymbol{A}|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

同理可证

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

□

注　证明用到行列式的代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & i=j,\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

关系式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 很重要, 它不仅是下面定理证明的关键, 而且在一些涉及伴随矩阵的证明或计算中经常用到.

定理5、**定理 2.6.1** (矩阵可逆的条件)　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

证明　必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 即存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 使 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$, 则

$$|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1.$$

由定理5及 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 有 A 与 A^* 同时可逆或同时不可逆.

若 A 与 A^* 同时可逆, 则由 $AA^*=A^*A=|A|E$, 有:　由 $AA^*=|A|E$ 两边同乘 $(A^*)^{-1}$ 得到

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$　　$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A.$

求伴随阵的逆可直接求.

所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

充分性. 由例 2.6.4 可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 因为 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 所以

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right) = \left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

由逆矩阵的定义即知 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$. □

推论2. **推论 2.6.2**　*矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵.*

证明　由定义可知, 可逆矩阵和满秩矩阵都必须是方阵, 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 由于 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 所以由本定理立即得到本推论. □

推论3. **推论 2.6.3**　*设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$.*

证明　由 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{E}|$ 即得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = 1$, 所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 由定理 2.6.1 知 $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{B}^{-1}$ 都存在, 从而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1}, \\
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}.
\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵. □

推论 2.6.3 告诉我们, 判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 只需要验证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ 中一个等式成立即可. 定理 2.6.1 提供了求可逆矩阵的一种方法, 我们称之为**伴随矩阵法**.

例 2.6.5　判断下列矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 是否可逆. 若可逆, 求其逆矩阵.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -11 \end{pmatrix},$$

其中 a, c 为非零实数.

解　因为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -71 \neq 0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 再由例 2.6.3 已求得的 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$, 立即得到

[例] 设A是n阶方阵且满足 $|A| = -1$, $a_{nn} = 1$, A^*为A的伴随矩阵.
令 D_{nn} 为 A^* 中元素 A_{nn} 的代数余子式, 其中 A_{nn} 为 A 中元素 a_{nn} 的代数余子式. 求 D_{nn} 的值.

[解] <分析>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ & \cdots & \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow (A^*)^* = \begin{pmatrix} - & \cdots & - \\ & \cdots & \\ - & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix}$$

$\because |A| = -1$　故 $|A^*| = |A|^{n-1} = (-1)^{n-1}$. 从而 A^* 可逆

由 $AA^* = A^*A = |A|E$　$A^*(A^*)^* = (A^*)^*A^* = |A^*|E$.

故有　$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = \frac{1}{|A^*|}(A^*)^*$

即　$(A^*)^* = \frac{|A^*|}{|A|}A = |A|^{n-2}A$　拓展: $A^{*(2n+1)} = kA^*$

$\therefore D_{nn} = (-1)^{n-2}a_{nn} = (-1)^{n-2}$.　$A^{*(2n)} = kA$

所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*=\frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ \dfrac{-b}{ac} & c^{-1} \end{pmatrix}.$$

最后，因为 $|\boldsymbol{C}|=0$, 所以 $\boldsymbol{C}$ 不可逆. □

例 2.6.6　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

解　$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=10\neq 0$, 而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=10\boldsymbol{E}$, 即有 $\dfrac{1}{10}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{E}$, 从而

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{10}\boldsymbol{A}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{10} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{5} & 0 \\ \dfrac{3}{10} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

本题没有去计算 $\boldsymbol{A}^*$，而是利用公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 来计算 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$. 这是在处理遇到 $\boldsymbol{A}^*$ 的题目时常用的方法. 此外，若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则有 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$.

例 2.6.7　证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\,(n\geqslant 2)$ 阶方阵, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 这里 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

证明　(1) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由定理 2.6.1 中的求逆公式知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 从而 $|\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(2) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则一定有 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. 事实上, 若 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 两边右乘 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ 得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\cdot(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{O}$. 于是得到 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$. 这与 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$ 相矛盾. 故 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

综上 (1), (2) 得，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. □

对于准对角矩阵，很容易验证如下结果：在准对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{ss} \end{pmatrix}$$

中, 若 $\boldsymbol{A}_{ii}\ (i=1,2,\cdots,s)$ 都是可逆方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 也是可逆方阵, 其逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{ss}^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 2.6.8　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\3&4&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&4\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　$\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&&0\\&\boldsymbol{A}_{22}&\\0&&\boldsymbol{A}_{33}\end{pmatrix}$, 其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=2,\quad \boldsymbol{A}_{33}=\begin{pmatrix}2&4\\0&-2\end{pmatrix}$$

容易计算

$$\boldsymbol{A}_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{22}^{-1}=\frac{1}{2},\quad \boldsymbol{A}_{33}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&1\\0&0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

□

例 2.6.9　已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\1&0&4\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{b}=(5,1,1)^{\mathrm{T}}$. 问方程组是否有解? 若有, 求出其解.

解　因为 $|\boldsymbol{A}|=1\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 唯一. 因此在等式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, 即该方程组有唯一解. 用伴随矩阵法求得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}4&4&-3\\2&3&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix},$$

进一步计算得

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&-3\\2&3&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\11\\-5\end{pmatrix}.$$

□

矩阵的分解

根据初等变换与初等矩阵之间关系，定理2的后一个结论可以改写为：

定理6、设A为 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r$，则存在m阶初等矩阵 $P_s,\cdots P_1$ 以及n阶初等矩阵 $Q_1,\cdots,Q_t$ 使得

$$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

注意到初等矩阵都是可逆阵，可逆阵的乘积是可逆阵，我们有：

$$A=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}Q_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}$$

定理 2.6.1 不但给出了矩阵可逆的充分必要条件，也给出了求逆矩阵的伴随矩阵法. 但用伴随矩阵法求逆矩阵的主要意义在理论方面. 当 n 较大时，用伴随矩阵求逆矩阵，需计算 n^2 个 $n-1$ 阶行列式，计算量十分巨大，往往无法计算出结果. 下面介绍比较简便实用的方法 ——**初等变换法**.

推论4、 **定理 2.6.4** (矩阵的分解) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$，其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

证明 应用定理 2.4.2，定理 2.5.1 和定理 2.5.2，对 $\boldsymbol{A}$ 施行 s 次初等行变换 (即依次左乘 s 个 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$) 变为行简化梯形矩阵 $\boldsymbol{D}$，则 $\boldsymbol{D}$ 有 r 个非零行，每行的首个非零元素为 1；再对 $\boldsymbol{D}$ 施行 t 次适当的初等列变换 (即依次右乘 t 个 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$) 即可变为标准形矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$. 于是有

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{\Lambda}.$$

记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}$，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}$，立得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$.

由于初等矩阵都是可逆矩阵，所以由可逆矩阵的基本性质即得 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵. 定理证毕. □

推论5、**推论 2.6.5** 任一 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均可以表示成有限个 n 阶初等矩阵的乘积. 进一步，任一可逆矩阵可以只经过行的初等变换化为单位阵，也可以只经过列的初等变换化为单位阵.

证明 第一个结论由定理 2.6.4 的结论直接得到. 进一步的结论由定理 2.6.4 的证明过程中的结论得到. □

这个结论告诉我们：当方阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列行的初等变换化为单位阵 $\boldsymbol{E}$ 时，相同的一系列行的初等变换就把 $\boldsymbol{E}$ 化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 从而就得出了用初等行变换求逆矩阵的方法. 它可以叙述为：将 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})$ 经过一系列行的初等变换化为 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 这一方法的优点在于，不必求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 和计算 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

例 2.6.10 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+(-1)r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+(-5)r_3]{r_1+(-2)r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

为了防止计算出错, 先按照初等变换法算得逆矩阵, 再用定义来验证一下所得的矩阵确实是所求逆矩阵. 在上例中, 经过直接验算可知上式成立（即验证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$).

我们也可以用列的初等变换来求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{仅用初等列变换}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

它与前面的初等行变换求逆矩阵的方法，即

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{仅用初等行变换}}(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{A}^{-1})$$

是一致的.

这种求逆的方法也可用于一类矩阵方程的求解.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 即可通过先求逆矩阵，再作矩阵乘法求得具体解 $\boldsymbol{X}$. 我们也可通过只作初等行变换将

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})\rightarrow(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

来得到方程的具体解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

类似地, 对矩阵方程 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 的解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$, 可通过只作初等列变换将

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

来得到.

例 2.6.11　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解　这是一个矩阵方程求解问题. 将矩阵方程变形为 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$. 因为

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

所以 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆. 采用行变换

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{A})\\
=&\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}\\
\xrightarrow{r_3+r_2}&\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&5&-2&-2\\0&-1&0&-4&3&2\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}\\
\xrightarrow{r_2\times(-1)}&\begin{pmatrix}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

于是

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}.$$

□

最后, 我们给出可逆矩阵在矩阵乘法中与秩有关的一个性质.

定理7、**定理 2.6.6**　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵, 则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{PA})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AQ})=\mathrm{r}(\boldsymbol{PAQ}).$$

证明　由于可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以表示为有限个初等矩阵的乘积, 而初等变换又不改变矩阵的秩, 故结论成立.　□

例 2.6.12　证明: 任一秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总可以表示为 r 个秩为 1 的矩阵的和.

证明　因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 由定理2.6.4，存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+\cdots+\boldsymbol{E}_{rr})\boldsymbol{Q},$$

其中，$\boldsymbol{E}_{ii}\ (i=1,2,\cdots,r)$ 是第 i 行与第 i 列交叉位置的元素为 1, 其他元素均为零的 $m\times n$ 矩阵. 由上式可得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PE}_{11}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{PE}_{22}\boldsymbol{Q}+\cdots+\boldsymbol{PE}_{rr}\boldsymbol{Q}.$$

再由定理 2.6.6 知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{PE}_{ii}\boldsymbol{Q})=\mathrm{r}(\boldsymbol{E}_{ii})=1$. 故所需结论成立.　□

- 设A为 $m\times l$ 矩阵，B为 l 阶可逆阵，C是 $l\times n$ 矩阵，
  则一般情况下 $r(ABC)\neq r(AC)$

2.7　向量组的线性相关与线性无关

本节介绍向量组的线性相关与线性无关, 极大线性无关组以及向量组的秩等概念. 它们不但在线性方程组理论中起着重要的作用, 也是代数学中十分重要的基本概念.

在本章第 3 节，我们介绍了矩阵可以按行 (列) 分块, 得到的向量分别为行 (列) 向量. 因此 n 维向量可以看作矩阵, 按矩阵的运算规则进行运算.

若干个同维数的列向量 (或同维数的行向量) 所组成的集合称为向量组. 矩阵的列向量组和行向量组都是只含有限个向量的向量组. 反之, 一个含有限个向量的向量组总可以构成一个矩阵. 例如, m 个 n 维列向量所组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成一个 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times m}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_m)$. n 个 m 维行向量所组成的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}$ 构成一个 $n\times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{B}_{n\times m}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

e.g. $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_m\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\cdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\cdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_m\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\cdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_m\end{pmatrix}$

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$

综上所述, 含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

2.7.1　线性相关与线性无关

定义16、**定义 2.7.1** (向量的线性组合, 线性表示)　给定 n 维向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$ 和同维向量 $\boldsymbol{\beta}$, 如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 A 的一个线性组合或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示.

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示, 也就是方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}$$

$\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\cdots\\\alpha_m\end{pmatrix}$

有解.

例 2.7.1　零向量是任何向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合. 这是因为

$$\boldsymbol{\theta}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_m.$$

例 2.7.2　对于向量组 $\boldsymbol{\beta}=(2,-5,3,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 因为

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+(-5)\boldsymbol{\varepsilon}_2+3\boldsymbol{\varepsilon}_3+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_4.$$

所以 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 的线性组合. 一般地, 设

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}},$$

那么任何 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 都可表示成

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n.$$

即任何 n 维向量都可由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表示. 向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 也称为 n 维**基本向量组**.

例 2.7.3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 试将 $\boldsymbol{\beta}=(2,3,1)^{\mathrm{T}}$ 表示成向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 即

$$(2,3,1)^{\mathrm{T}}=(x_1,0,0)^{\mathrm{T}}+(x_2,x_2,0)^{\mathrm{T}}+(x_3,x_3,x_3)^{\mathrm{T}}=(x_1+x_2+x_3,x_2+x_3,x_3)^{\mathrm{T}}.$$

于是得到关于 x_1,x_2,x_3 的线性方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2,\\ \qquad\ x_2+x_3=3,\\ \qquad\qquad\ x_3=1, \end{cases}$$

这是一个标准的阶梯形线性方程组, 它有唯一的一组解 $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=1$. 因此得

$$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

□

例 2.7.4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}=(3,-3,6)^{\mathrm{T}}$. 试将 $\boldsymbol{\beta}$ 表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

解 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 则得线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3=3,\\ x_1-x_2=-3,\\ x_2+x_3=6. \end{cases}$$

第二个方程加上第三个方程后即得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3=3,\\ x_2+x_3=6. \end{cases}$$

让 x_3 为自由未知量. 任取 $x_3=t$, 得方程组的一般解为

$$x_1=3-t,\quad x_2=6-t,\quad x_3=t,$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}=(3-t)\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(6-t)\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+t\cdot\boldsymbol{\alpha}_3.$$

若取 $t=2$, 则得 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$. □

上述例题启示我们，向量的线性表示与线性方程组求解之间有着密切的关系.

定义17、**定义 2.7.2** (等价向量组)　设有两个向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 及 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$, 若 A 组中的每一个向量都可由向量组 B 线性表示, 则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示. 若两个向量组 A, B 可以相互线性表示, 则称这两个向量组等价.

例如, 对于向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$, 与向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, 不难验证有下面关系:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_2=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

由于这两个向量组能相互线性表示, 因此向量组 A 与向量组 B 等价.

不难验证向量组之间的等价具有通常等价关系的以下 3 个性质:

(1) 自反性: 任一向量组与它自身等价;

(2) 对称性: 若向量组 A 与 B 等价, 则向量组 B 也与 A 等价;

(3) 传递性: 若向量组 A 与 B 等价, 且向量组 B 与 C 等价, 则向量组 A 与 C 也等价.

定义18、**定义 2.7.3** (线性相关与线性无关)　给一向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta},$$

则称向量组 A 是线性相关的. 如果只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时, 上述等式才成立, 则称这组向量是线性无关的.

注　由定义可知，向量组 A 或线性相关，或线性无关，两者必居其一. 而向量组的线性相关与否跟这些向量的次序无关，也跟这个向量组是行向量组还是列向量组都没有关系.

设有向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，其构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_m)$, 则向量组 A 线性相关的充要条件是，齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}$ (即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\theta}$) 有非零解.

例如, 对于 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,3,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,4,-2)^{\mathrm{T}}$, 存在一组数 $(1,-1,1)$ 使 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

关于线性相关与线性无关，还有下列最基本的结论:

(1) 一个向量线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$.

证明　若 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$, 可任取 $k\neq 0$, 使 $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$; 反之, 若 $k\neq 0,\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$, 则 $k\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$, 故要存在 $k\neq 0$, 使 $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$, 则必有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$. □

所证明的事实也可以说明: 一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$.

(2) 包含零向量的向量组必是线性相关的.

证明　不失一般性, 考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\theta}$, 取 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0,k_{m+1}=1$, 则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_{m+1}\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}.$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\theta}$ 线性相关. □

(3) 如果一向量组的部分向量组线性相关, 则该向量组也线性相关. 部分相关,整体必相关.

证明　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有 r 个 $(r\leqslant s)$ 向量线性相关, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 即存在一组不全为零的实数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{\theta}.$$

从而

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\theta},$$

且 $k_1,k_2\cdots,k_r,0,\cdots,0$ 这 s 个数不全为零, 因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. □

注　这个结论的等价说法是:

(4) 如果一个向量组线性无关, 则其中任一个部分向量组也线性无关. 整体无关, 部分必无关

我们通常会说, 对于一个向量组而言, 如果部分相关, 则整体相关; 如果整体无关, 则部分无关. □

例 2.7.5　证明: n 维基本向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是线性无关的.

证明　设有 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots k_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{\theta}$. 即

$$k_1(1,0,\cdots,0)+k_2(0,1,\cdots,0)+\cdots+k_n(0,0,\cdots,1)=(0,0,\cdots,0),$$

从而

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(0,0,\cdots,0).$$

这仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时才成立, 所以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关. □

例 2.7.6　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 试证向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$$

也线性无关.

证明　设有常数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\theta}$, 即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\theta}.$$

将此式重新整理得

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}.$$

因为已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 要上式成立, 必须

$$\begin{cases}k_1+k_3=0,\\ k_1+k_2=0,\\ k_2+k_3=0.\end{cases}$$

解之得 $k_1=k_2=k_3=0$. 故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关. □

例 2.7.7　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 又设

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

证明　设有常数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\theta}$, 即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\theta}$$

将此式重新整理得

$$(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(2k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}.$$

因为已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 上式成立的充要条件是

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0, \\ k_1-k_2=0, \\ 2k_1+k_3=0. \end{cases}$$

此方程组有无穷多非零解，例如 $k_1=1,k_2=1,k_3=-2$ 就是一组非零解. 从而有 $1\cdot\boldsymbol{\beta}_1+1\cdot\boldsymbol{\beta}_2-2\cdot\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\theta}$. 故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关. □

利用定义判别一个向量组是线性相关还是线性无关, 这显然是最基本的方法. 下面我们讨论, 对于线性相关与线性无关这两种类型的向量组, 其中的向量之间呈现的不同关系. 利用这些关系去判别向量组的线性相关或线性无关也是非常有效的方法.

定理8. **定理 2.7.1**　向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是, 向量组 A 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证明　必要性. 设向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则必有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$(不妨设 $k_1\neq 0$), 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}.$$

从而

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

充分性. 设向量组 A 中有某个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示, 即有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1}$, 使

$$\boldsymbol{\alpha}_m=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}.$$

于是

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+(-1)\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}.$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1},-1$ 这 m 个数不全为 0, 所以向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性相关. □

注　在此定理中, 若 $m=2$, 即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关的充要条件是这两个向量的分量成比例. 从几何上看, 即两个 2 维或 3 维向量构成的向量组线性相关, 表示这两个向量共线.

需要注意的是, 该定理不是要求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中每一个向量都可由其余向量线性表示, 而是只要有一个就可以了.

例如, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,6)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5)$, 显然有 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 并易见 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 都可由其余向量线性表示. 但 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 却不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 来线性表示.

该定理的逆否命题是: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m\geqslant 2)$ 线性无关的充分必要条件是其中任何一个向量都不能由其余向量线性表示.

定理9. **定理 2.7.2** 设向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 而向量组 $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由向量组 A 线性表示, 并且表示式是唯一的.

证明 由于向量组 $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\beta$ 线性相关, 所以存在不全为零的 $r+1$ 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}.$$

如果 $k=0$, 则 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 必不全为零. 于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{\theta}.$$

这与向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关矛盾, 所以 $k\neq 0$. 于是有

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示.

下面再证唯一性. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 的两种表示式为

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$
$$\boldsymbol{\beta}=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\mu_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

两式相减得

$$(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_r-\mu_r)\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{\theta}.$$

由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关知: $\lambda_i-\mu_i=0\ (i=1,2,\cdots,r)$, 即 $\lambda_i=\mu_i$. 所以向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的表示式唯一. □

例 2.7.8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 不可能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

证明 由定理 2.7.1 与定理 2.7.2 立即得到所述结论. □

例 2.7.9 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}\ (m\geqslant 2)$ 线性相关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.

证明 (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 所以部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 也线性无关. 又已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性相关, 所以由定理 2.7.2 知，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.

(2) 假设 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，由 (1) 的结果，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，于是得到 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，与假设矛盾. 从而结论成立. □

2.7.2 向量的线性相关性与矩阵秩的关系

下面的定理使我们得以通过矩阵的初等变换, 利用矩阵的秩来判定向量组线性相关与线性无关性.

定理10. **定理 2.7.3** n 维列向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<r$, 其中矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_r)$. 换言之, 该向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$.

证明　必要性. 设向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 则存在不全为零的 r 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ (不妨设 $k_r \neq 0$), 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{\theta}.$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}_r = -\frac{k_1}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}.$$

对 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_r)$ 施行初等列变换

$$c_r + \frac{k_1}{k_r}c_1 + \frac{k_2}{k_r}c_2 + \cdots + \frac{k_{r-1}}{k_r}c_{r-1}$$

可将 $\boldsymbol{A}$ 的第 r 列变成 $\boldsymbol{\theta}$, 故 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{c} (\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{r-1}\ \boldsymbol{\theta})$, 所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{r-1}) < r.$$

充分性. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = s < r$, 可用初等列变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为列梯形矩阵, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{r\times r}$, 使得 $\boldsymbol{AQ} = (\boldsymbol{C}_{n\times s}\ \boldsymbol{O}_{n\times(r-s)})$. 这时至少可得 $q_{1r}\boldsymbol{\alpha}_1 + q_{2r}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + q_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{\theta}$, 而 $q_{1r}, q_{2r}, \cdots, q_{rr}$ 不全为零, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关. □

推论6、**推论 2.7.4**　向量的个数 m 大于其维数 n, 则向量组线性相关. 广义的共线、共面

证明　因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m, n) < m$, 所以由定理 2.7.3 立即得到此推论. □

推论7、**推论 2.7.5**　n 个 n 维向量线性无关的充要条件是其行列式不为零. $|a_1 a_2 \cdots a_n| \neq 0$.

证明　因为一个方阵为满秩矩阵的充要条件是其行列式不为零, 于是由定理 2.7.3 立得此推论. □

例 2.7.10　设 n 维列向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵. 试证向量组 $\boldsymbol{B\alpha}_1, \boldsymbol{B\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{B\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵.

证明　必要性. 设 $\boldsymbol{B\alpha}_1, \boldsymbol{B\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{B\alpha}_n$ 线性无关, 则由推论 2.7.5 知 $\boldsymbol{B\alpha}_1, \boldsymbol{B\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{B\alpha}_n$ 构成的行列式不等于零. $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则按分块矩阵的乘法得

$$(\boldsymbol{B\alpha}_1\ \boldsymbol{B\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{B\alpha}_n) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n) = \boldsymbol{BA}.$$

因此有 $|\boldsymbol{BA}| \neq 0$. 从而 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$, 故 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵.

充分性. 设 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵. 令

$$k_1\boldsymbol{B\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{B\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{B\alpha}_n = \boldsymbol{\theta},$$

用 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 左乘两端, 得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\theta}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关知: $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. 故 $\boldsymbol{B\alpha}_1, \boldsymbol{B\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{B\alpha}_n$ 线性无关. □

推论 2.7.6　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times m}$ 的秩 $\mathrm{r}(A) = r \leqslant m$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的某 r 列 (行) 所组成的矩阵含有不等于零的 r 阶子式, 则此 r 个列 (行) 向量线性无关.

证明　不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 所成的矩阵含有非零的 r 阶子式, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_r)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}$$

的秩为 r, 等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 所含向量的个数. 由定理 2.7.3 知这个向量组线性无关. □

例 2.7.11　判断下列向量组:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,-3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-2,3)$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,3,4),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,3,4)$

各自的线性相关性.

解　(1) 作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 并进行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3+(\frac{1}{2})r_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

最后的梯形矩阵有两个非零行, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 矩阵的秩小于向量的个数 3. 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2) 法一：作矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

易知, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

法二：因为 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$, 由推论 2.7.6 知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. □

2.7.3　极大无关组与向量组的秩

类比

定义19. **定义 2.7.4** (极大无关组)　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是某一向量组的部分组，满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

(2) 在原向量组中任取向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}$ 都线性相关, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是原向量组的一个极大线性无关组, 简称**极大无关组**.

由定义可知, 仅含有零向量的向量组没有极大线性无关组, 而一个线性无关的向量组的极大无关组即是其本身.

求一个向量组极大无关组的理论基础

一般地，设矩阵 $A=(\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_n)$ 经一系列行初等变换化为

$$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n).$$

由初等变换与初等矩阵的关系，存在可逆阵 P，使

$$PA=(P\alpha_1\ P\alpha_2\ \cdots\ P\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=B.$$

对任意子向量组 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 及其之外的一个向量 α_{ik}，由于

$$(P\alpha_{i1},P\alpha_{i2},\cdots,P\alpha_{ir})=(\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir})$$

$$\Rightarrow P(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir})=(\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir})$$

$$\therefore r(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir})=r(\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir})$$

$\therefore\ \alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 线性无关 $\Leftrightarrow \beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir}$ 线性无关

[例 2.7.13] P65.

另一方面，若 $\alpha_{ik}=l_1\alpha_{i1}+l_2\alpha_{i2}+\cdots+l_r\alpha_{ir}$，则有

$$P\alpha_{ik}=l_1P\alpha_{i1}+l_2P\alpha_{i2}+\cdots+l_rP\alpha_{ir}$$

$$\beta_{ik}=l_1\beta_{i1}+l_2\beta_{i2}+\cdots+l_r\beta_{ir}.$$

反之，若 $\beta_{ik}=l_1\beta_{i1}+l_2\beta_{i2}+\cdots+l_r\beta_{ir}$，则有

$$P^{-1}\beta_{ik}=l_1P^{-1}\beta_{i1}+l_2P^{-1}\beta_{i2}+\cdots+l_rP^{-1}\beta_{ir}.$$

$$\alpha_{ik}=l_1\alpha_{i1}+l_2\alpha_{i2}+\cdots+l_r\alpha_{ir}$$

$$\therefore\ \alpha_{ik}=l_1\alpha_{i1}+l_2\alpha_{i2}+\cdots+l_r\alpha_{ir}\Leftrightarrow\beta_{ik}=l_1\beta_{i1}+l_2\beta_{i2}+\cdots+l_r\beta_{ir}.$$

定理11、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由另一向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则 $r\le s$.

证明：设

$$\begin{cases}\alpha_1=g_{11}\beta_1+g_{21}\beta_2+\cdots+g_{s1}\beta_s\\ \alpha_2=g_{12}\beta_1+g_{22}\beta_2+\cdots+g_{s2}\beta_s\\ \cdots\quad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ \alpha_r=g_{1r}\beta_1+g_{2r}\beta_2+\cdots+g_{sr}\beta_s\end{cases}\Leftrightarrow(\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_r)=(\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_s)\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\xi_1 & \xi_2 & & \xi_r\end{array}\\ \begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}g_{11}\\g_{21}\\\cdots\\g_{s1}\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}g_{12}\\g_{22}\\\cdots\\g_{s2}\end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix}g_{1r}\\g_{2r}\\\cdots\\g_{sr}\end{matrix}}\end{pmatrix}_{Q}\end{array}$$

若 $r>s$，则 $r(Q)<r$，从而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性相关！

即存在不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)(k_1,k_2,\cdots,k_r)^T=0$.

由于 $(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_r\end{pmatrix}=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_s)\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&\cdots&g_{1r}\\g_{21}&g_{22}&\cdots&g_{2r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\g_{s1}&g_{s2}&\cdots&g_{sr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_r\end{pmatrix}$

故 $(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_r\end{pmatrix}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

这表明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，矛盾. 故必有 $r\le s$.

定理11、**定理 2.7.7**　设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大线性无关组, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任一向量均可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示, 且表示法唯一.

推论8、**推论 2.7.8**　向量组与它的任意一个极大线性无关组等价.

推论9、**推论 2.7.9**　一个向量组的各个极大无关组之间是等价的.

推论10、**推论 2.7.10**　两个向量组等价的充要条件是一组的一个极大无关组与另一组的一个极大无关组等价.

证明　由定理 2.7.2 立即证得定理 2.7.7 . 三个推论也只是定义和以上结论的直接应用. □

例 2.7.12　求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大线性无关组, 其中

$$\alpha_1=(1,1,0),\ \alpha_2=(1,0,0),\ \alpha_3=(0,1,0).$$

解　显然 $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 又易见 α_1 与 α_2 线性无关. 故 α_1,α_2 是一个极大无关组, 同理可知 α_1,α_3; α_2,α_3 也都是极大无关组. □

在实际计算时, 对列向量组所成的矩阵施行初等行变换得到行梯形矩阵后，可立即给出其极大无关组，并容易将其余向量表示成该极大无关组中向量的线性组合.

例 2.7.13　设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

试求该向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，并用此极大无关组表示其余向量

解　用初等行变换将矩阵 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$ 化为行梯形矩阵

$$\begin{aligned}A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)&=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\2&-1&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\&\xlongequal{记为}(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)=B.\end{aligned}$$

与此同时有

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\to(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3),$$
$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4)\to(\beta_1\ \beta_2\ \beta_4).$$

由这些阶梯形可知:

矩阵 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$ 的秩为 3, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

矩阵 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 的秩为 3, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

矩阵 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4)$ 的秩为 3, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关.

于是由定义 2.7.4 知, 部分组 α_1, α_2, α_3 以及部分组 α_1, α_2, α_4 都是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大无关组.

不仅如此, 由于矩阵 $(\beta_2\ \beta_3\ \beta_4)$ 有非零 3 阶子式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, 知其秩为 3, 因而矩阵 $(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$ 的秩为 3(定理 2.5.1). 从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也是一个极大无关组. 同理可知, $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 也是一个极大无关组. 所以可任取一个为本例中向量组的极大无关组. 以极大无关组 α_1, α_2, α_3 为例, α_4 可以表示为 $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$. □

以上两个例子都告诉我们: 一个向量组的极大无关组可能不是唯一的, 但同一向量组不同的极大无关组所含的向量的个数是相同的. 这并不是偶然的, 其实我们有

推论11、**定理 2.7.11** 一个向量组的各个极大无关组所含向量的个数相同.

证明 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 及向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 都是某一个向量组的极大无关组, 不妨设都是列向量组, 并记 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_r)$, $B=(\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_s)$. 按定理 2.7.7, A 组可以由 B 组线性表示, 写为

$$\begin{cases} \alpha_1=k_{11}\beta_1+k_{21}\beta_2+\cdots+k_{s1}\beta_s, \\ \alpha_2=k_{12}\beta_1+k_{22}\beta_2+\cdots+k_{s2}\beta_s, \\ \quad\cdots\cdots \\ \alpha_r=k_{1r}\beta_1+k_{2r}\beta_2+\cdots+k_{sr}\beta_s, \end{cases}$$

用矩阵表示为 $A=BK$, 其中

$$K=(k_{ij})_{s\times r}=(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r),\quad 其中\ k_j=(k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{sj})^{\mathrm{T}}.$$

我们先证 $r\leqslant s$. 用反证法. 假设 $r>s$, 则由于矩阵 K 的秩小于 r, 从而矩阵 K 中的 r 个 s 维向量 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 线性相关. 于是有不全为零的数 l_1, $l_2,\cdots,l_r$ 使得

$$l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_rk_r=\theta,$$

即

$$K(l_1,l_2,\cdots,l_r)^{\mathrm{T}}=\theta.$$

从而

$$A(l_1,l_2,\cdots,l_r)^{\mathrm{T}}=BK(l_1,l_2,\cdots,l_r)^{\mathrm{T}}=\theta.$$

即

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_r\alpha_r=\theta,$$

这与 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为极大无关组矛盾. 所以有 $r\leqslant s$.

同理, 按定理 2.7.7 , B 组向量可以由 A 组向量线性表示, 又得到 $s\leqslant r$. 所以得 $r=s$. □

定义20、**定义 2.7.5** (向量组的秩) 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大无关组所含向量的个数定义为该**向量组的秩**, 记为 $\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$. 规定仅含零向量的向量组的秩为 0.

例 2.7.14　设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix}.$$

按 a,b 的不同取值, 指出向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 一个极大线性无关组以及其秩 r.

解

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix}.$$

1) $a\neq 1,b\neq 2$ 时, 极大无关组为该向量组本身, $r=4$.

2) $a\neq 1,b=2$ 时, 一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, $r=3$.

$a=1,b\neq 2$ 时, 一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$, $r=3$.

3) $a=1$ 且 $b=2$ 时, 一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, $r=2$. □

推论12、**定理 2.7.12**　设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$; $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是两个同维数的向量组, 若向量组 A 可以由向量组 B 线性表示, 则必有 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}\leqslant \mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$. 进一步有: 等价的向量组必有相同的秩.

证明　记 $r=\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$, $s=\mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$. 不妨设向量组 A 的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$, 向量组 B 的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，而据定理 2.7.7 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 于是仿照定理 2.7.11 的证明即可证得 $r\leqslant s$.

进一步，若向量组 A 与向量组 B 等价，则 B 也可以由向量组 A 线性表示. 则由上面所证结果得 $s\leqslant r$. 于是证得 $r=s$. □

例 2.7.15　设 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全不为零. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量都线性无关.

证明　对 $n=1$, 由题设易知，$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 均是非零向量，显然其中的任何一个向量都是线性无关的. 下面都是对 $n\geqslant 2$ 的情况给予证明.

法一: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中的 n 个向量，其中 $1\leqslant i\leqslant n+1$. 令

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+l_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+l_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\boldsymbol{\theta}.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 代入上式整理得

$$\begin{aligned}&(l_1+l_{n+1}k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(l_{i-1}+l_{n+1}k_{i-1})\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+l_{n+1}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\\&+(l_{i+1}+l_{n+1}k_{i+1})\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+(l_n+l_{n+1}k_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\theta}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以有

$$l_1+l_{n+1}k_1=0,\cdots,l_{i-1}+l_{n+1}k_{i-1}=0,l_{n+1}k_i=0,$$
$$l_{i+1}+l_{n+1}k_{i+1}=0,\cdots,l_n+l_{n+1}k_n=0.$$

因为 $l_{n+1}k_i=0$ 且 $k_i\neq 0$, 所以 $l_{n+1}=0$. 从而

$$l_1=\cdots=l_{i-1}=l_{i+1}=\cdots=l_n=0.$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性无关. 这就得到了所需结论.

法二：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中的 n 个向量，其中 $1\leqslant i\leqslant n+1$. 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{i-1}\ \boldsymbol{\alpha}_{i+1}\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1})$, 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0&k_1\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0&k_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&\cdots&0&k_{i-1}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&k_i\\0&0&\cdots&0&1&\cdots&0&k_{i+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&1&k_n\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

由于 $k_i\neq 0$, 容易计算得 $|\boldsymbol{B}|=(-1)^{n+i}k_i\neq 0$. 又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，由定理 2.7.3 知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=n$, 从而 $|(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)|\neq 0$. 由例 2.2.7 得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$. 再由定理 2.7.3 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性无关. 这就证得了所需结论.

法三：设向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 向量组 $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 由已知条件可知 A 能被 B 线性表示. 反之，B 中的 $n-1$ 个与 A 中相同的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 显然能由 A 线性表示，而另一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 也能被 A 中相同的向量表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\frac{1}{k_i}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-k_n\boldsymbol{\alpha}_n).$$

从而 B 也能被 A 线性表示. 故 A 与 B 是等价向量组，由定理 2.7.12 知它们有相同的秩. 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$, 所以向量组 A 线性无关，上述结论对任一 $i\ (1\leqslant i\leqslant n+1)$ 均成立. 这就得到所需结论. □

例中的方法一是利用线性相关性的定义，方法二是利用矩阵的秩与向量组线性无关的关系，方法三是利用等价向量组有相同秩的结论，再由向量组的线性无关与秩的关系而导出结论. 下面还要讨论向量组的秩与矩阵的秩之间的关系.

矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**；$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**.

例如, 对于矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$\boldsymbol{A}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0,0)$, 其行秩显然为 2. 这是由于部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的唯一一个极大线性无关组.

$\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_4=(4,0,0)^{\mathrm{T}}$, 可以验证部分组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为列向量组的一个极大无关组, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩也为 2. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩显然也是 2. 从这个例子我们可以看到, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩、列秩和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩都相等. 这一现象并不是特例，而是对任意一个矩阵都成立的结论.

定理12. **定理 2.7.13**　任一矩阵的秩与其列秩、行秩均相等.

证明: 设 $A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的极大无关组, 即

$r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}=r$.

$\because r(A)=r(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)\geqslant r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=r$.

另一方面, 根据极大无关组的定义: $\beta_{r+1},\beta_{r+2},\cdots,\beta_n$ 均可由 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表示.

故存在可逆阵 Q, 使 $AQ=(\xi_1,\cdots,\xi_r,0,\cdots,0)=B$

于是, $r(A)=r(AQ)=r(B)\leq r$. 从而有

$r(A)=r=r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$.

易知 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的基本向量组 $E:e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是一个极大无关组, 其秩为 n.

作为本章结尾，我们给出关于矩阵和、矩阵乘积的秩的几个重要结果.

定理13. **定理 2.7.14**　(1) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$;

(2) $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$;

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-n$.

证明: (1) 设 $A=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$　$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 以及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 分别是矩阵 A, B 列向量组的极大无关组, 则

$r(A+B)=r\{\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n\}\leq r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$

$\leq r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}\leq r(A)+r(B)$

(2) 设

$$
A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \quad & \alpha_l\end{array}\end{array}
\qquad
B=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\beta_1\\ \beta_2\\ \\ \beta_l\end{array}\end{array}
$$

$$
AB=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \cdots\\ \gamma_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}}
\qquad
AB=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \cdots\\ \gamma_m\end{array}\end{array}\\ \begin{array}{cccc}\xi_1 & \xi_2 & \quad & \xi_n\end{array}\end{array}
$$

γ 可由 β 线性表示

$r(AB)=r(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m)\leq r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l\}=r(B)$

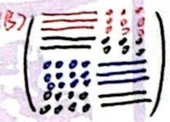
$$AB=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\boxed{(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_l)}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

ξ可由α线性表示

$$r(AB)=r\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}\le r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}=r(A)$$

(5) 考虑如下矩阵的秩:

$$r\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$$

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}=$$  $$\rightarrow \begin{vmatrix} \boxed{B'} & 0 \\ 0 & \boxed{A'} \end{vmatrix}\ne 0$$

$$r\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$$

$$r\begin{pmatrix} B & E \\ AB & 0 \end{pmatrix}=r(-AB)+r(E)=r(AB)+n$$

$$\begin{pmatrix} B & E \\ AB & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & \boxed{E} \\ \cancel{AB} & \cancel{0} \end{pmatrix}r(AB) \rightarrow \begin{vmatrix} * & \boxed{E} \\ \square & 0 \end{vmatrix}\ne 0$$

$r(AB)$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & E \\ 0 & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & E \\ -AB & 0 \end{pmatrix}$$

相当于可逆阵, 秩不变

$$r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\le r\begin{pmatrix} B & E \\ 0 & A \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} B & E \\ -AB & 0 \end{pmatrix}=r(AB)+n.$$

不妨设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 的极大无关组线性表示, 于是应用定理 2.7.13 与定理 2.7.12 可得

[例19] 设n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关. $\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$. $k_1,k_2,\cdots,k_n$不全为0.

证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$当中任意n个都线性无关.

1° 若不包括 α_{n+1}, 显然.

2° 若包括 α_{n+1}. 设为 $A_i=\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$.

$A_0=\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n$.

由于 $\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$.

$$\alpha_i=\frac{1}{k_i}(\alpha_{n+1}-k_1\alpha_1-\cdots-k_{i-1}\alpha_{i-1}-k_{i+1}\alpha_{i+1}-\cdots-k_n\alpha_n).$$

$\therefore$ 向量组 A_i 与 A_0 可以互相线性表示.

习 题 二

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$;

(2) 若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

2. 计算下列矩阵的乘积:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;　(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1\ 2)$;

(5) $\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$;

(6) $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=(1\ 2\ 3)$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$;

(2) 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BA}$, 求 $\boldsymbol{C}^n$ (n 为正整数).

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}, \boldsymbol{AC}$, 问 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}, \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 是否成立?

(2) 计算 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 以此验证 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

5. 举例说明下列命题是错误的:

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$, 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(-3\ 2\ 1)$, 计算 $\boldsymbol{A}^n$, $\boldsymbol{B}^n$ ($n\in\mathbf{N}$).

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{4\times4}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{B}_{4\times4}=(\boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_4\ \boldsymbol{\alpha}_1)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量, 且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=2$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$.

8. 已知实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件: (1) $a_{ij}=\boldsymbol{A}_{ij}$, $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 a_{ij} 代数余子式 $(i,j=$

$1,2,3)$; (2) $a_{11} \neq 0$. 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

9. 设多项式 $f(x)=3x^2-2x+5$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $f(\boldsymbol{A})$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, 试问关系式:

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

是否成立? 何时成立?

11. 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换. 证明:

(1) 如果 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 都与 $\boldsymbol{A}$ 可交换, 那么 $\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$ 也与 $\boldsymbol{A}$ 可交换;

(2) 如果 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换, 那么 $\boldsymbol{B}$ 的 $k(k>0)$ 次幂 $\boldsymbol{B}^k$ 也与 $\boldsymbol{A}$ 可交换.

12. 求所有与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 可交换的三阶矩阵.

13. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 n 阶对称阵和 n 阶反对称阵, 证明:

(1) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是对称矩阵, $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是反对称矩阵;

(2) $\boldsymbol{AB}$ 是反对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

14. 利用分块的方法, 求下列矩阵的乘积:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$, 求 $|\boldsymbol{B}|$.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$, $|\boldsymbol{A}|<0$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

17. 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 化为标准形.

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, 用行初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行简化梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$.

19. 用初等变换把矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ 化为行简化梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 并求初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4$ 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$.

20. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{PA}$ 为行简化梯形矩阵;

(2) 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{QA}^{\mathrm{T}}$ 为行简化梯形矩阵.

21. 求下列矩阵的秩:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & b & a+b & a-b \\ c & d & c+d & c-d \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{pmatrix}.$$

22. 试问下列矩阵是否可逆? 如果可逆, 求出其逆矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\ (a_i \in \mathbf{R}).$$

23. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 求实数 x 和 y.

24. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 试计算 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, 由此给出 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

25. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 求

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}, (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$;　　$A(A+E)=6E$　　$A^{-1}=\frac{1}{6}(A+E)$

(2) $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^{-1}$.　　$(A+E)^{-1}=\frac{1}{6}(A)$

$(A+4E)(A-3E)=-6E$

26. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

27. 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

28. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$:

(1) 证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵;　　$A+B-AB-E=-E$

(2) 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.　　$A(E-B)-(E-B)=-E$

$\underline{(A-E)}\underline{(B-E)}=\underline{E}$

29. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\1&4&3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$, $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$, $|(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})|$.

30. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$与 $\boldsymbol{B}$ 均为可逆阵, 试给出 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 的逆阵, 其中 $\boldsymbol{C}$ 为任意矩阵. 由此求矩阵 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&2&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

31. 试利用矩阵的初等变换, 求下列方阵的逆阵:

(1) $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$.

32. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

33. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

34. 已知 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{B}^*$.

35. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等正数, 求 a_{11}.

36. 已知 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$, 试用初等变换法求 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

37. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均可逆. 证明 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆, 并求其逆阵.

38. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为同阶矩阵, $\boldsymbol{BC}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$, 试用分块矩阵方法证明: $|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{CC}^{\mathrm{T}}|$.

$A^{-1}+B^{-1}=\underline{A^{-1}A}(A^{-1}+B^{-1})\underline{BB^{-1}}=A^{-1}(AA^{-1}B+AB^{-1}B)B^{-1}$

$=A^{-1}(B+A)B^{-1}$ 可逆

39. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_m$, $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$, 求证 $m=n$ 且

$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[A^{-1}(B+A)B^{-1}]^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

40. 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量, 证明:

(1) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1$;

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

41. 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1$. 证明:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵;

(2) $\boldsymbol{A}$ 是幂幺阵 (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$).

42. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

43. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 证明 $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$, 并求 $|(\boldsymbol{A}^*)^*|$.

44. 证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = r$ 充要条件是存在两个矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times r}, \boldsymbol{Q}_{r\times n}$ 满足 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$, 其中 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_{m\times r}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{Q}_{r\times n}) = r$.

45. 设 $\boldsymbol{\beta} = (2,2,6)$, 用 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,2,3), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,3)$ 线性表示 $\boldsymbol{\beta}$.

46. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,3), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,t)$.

(1) 问当 t 为何值时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关?

(2) 问当 t 为何值时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关?

(3) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时, 将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

47. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 若 $\boldsymbol{\beta}_1 = p\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + t\boldsymbol{\alpha}_2 + 2t\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 问 p, t 为何值时, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关? 线性无关?

48. 证明 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

49. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 其中 $n < m$, $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, 证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关.

50. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维的线性无关列向量, 证明: 任意 n 维列向量必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一地线性表示.

51. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 都不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}$ 等价.

52. 已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \leqslant n)$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}$ 是任意 n 维向量, 证明: 向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中至多有一个向量能由其前面的向量线性表示.

53. 求下列向量组的秩和一个极大线性无关组:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,4)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,2), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,5,-3,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,7,-5,-4)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4=(2,2,-2,-3)^{\mathrm{T}}$.

54. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,3,5)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4=(4,-2,5,6)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(-3,-1,-5,-7)^{\mathrm{T}}$. 求该向量组的一个极大线性无关组, 并用以表示其余的向量.

55. 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$ 具有相同的秩, 且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 求 a,b 的值.

56. 设有向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$ 和向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+6)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_3=(2,1,a+4)^{\mathrm{T}}$, 试问:

(1) 当 a 为何值时, 向量组 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价?

(2) 当 a 为何值时, 向量组 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价?

57. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$, 证明: 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 有相同的秩.

58. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 有相同的秩, 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 等价.

59. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 为同维向量, 且 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=r_1,\ \mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}=r_2,\ \mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}=r_3$, 证明: $\max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2$.

60. 设向量组 A 与向量组 B 的秩相等, 且 A 组能由 B 组线性表示. 证明: A 组与 B 组等价.　取极大无关组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$　$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$　$\therefore (\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)P \Rightarrow (\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)P^{-1}$. B可由A线性表示

61. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 阶矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.　$\therefore\ A\Leftrightarrow B$

62. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵, 且 $m>n$, 证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})<m$.

$r(A)=r$　$A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$A\Leftrightarrow B$

南京大学
NANJING UNIVERSITY

线性代数第二章小结

矩阵　向量　对角矩阵　数量矩阵　单位矩阵　三角形矩阵　(反)对称矩阵　转置矩阵

非奇异/奇异矩阵　矩阵多项式　分块矩阵　初等变换　初等矩阵　等价矩阵　梯形矩阵

简化梯形矩阵　标准形矩阵　矩阵的秩　矩阵的子式　逆矩阵　伴随矩阵

向量的线性组合　向量的线性表示　等价向量组　线性相关与线性无关　极大无关组

向量组的秩　行秩　列秩

$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$　　$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$　　$|kA|=k^n|A|$

$AB=C=c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$.

$|AB|=|A||B|$ (方阵)　　$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

$(A^T)^T=A$　　$|A^T|=|A|$　　$(A+B)^T=A^T+B^T$　　$(AB)^T=B^TA^T$.

分块矩阵乘法的条件：前的列分法与后的行分法相同.

行(列)初等变换 $\Leftrightarrow$ 在矩阵左(右)乘相应初等阵

$r(A^T)=r(A)$

求矩阵的秩：初等行(列)变换化为行(列)梯形矩阵，非0行(列)数.

$(A^{-1})^{-1}=A$.　$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$　　$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.　　$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$　　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

伴随阵 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}^T$．$A_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式.

$AA^*=A^*A=|A|E$.　$\Rightarrow$　$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$；$|A^*|=|A|^{n-1}$；

矩阵可逆 $|A|\neq0$.　$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

初等变换法求逆阵：对AE进行行初等变换，化为行简化梯形矩阵.

部分相关整体必相关，整体无关部分必无关.

n维列向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A)<r$　其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$.

求列向量的极大无关组 $\Rightarrow$ 化为行梯形矩阵 $\Rightarrow$ 求秩、极大无关组 $\Rightarrow$ 列表示、线性组合、

等价的向量组必有相同的秩.　A可由B线性表示 $\Rightarrow r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}\le r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$.

$r(A+B)\le r(A)+r(B)$

$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$

A、B n阶方阵：$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$.　　$A^{*(2n)}=kA$　　$A^{*(2n+1)}=kA^*$