线性代数 Linear Algebra

第1章 行列式

性质

1. $A^T = A$
2. 一行的k倍可以提到行列式外面
3. 一分为二
4. 两行元素一样，行列式值为0
5. 两行元素成比例，行列式值为0.
6. 一行的倍数加到另一行值不变
7. 两行对调值相反
8. 行列式的展开

计算技巧

A. Vandermonde 行列式

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

A.1 求行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$$V_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdot(d-a)(d-b)(d-c)\cdot(c-a)(c-b)\cdot(b-a)$$

则 D_4 为 V_5 中元素 x^3 的余子式 M_{45}.

由于 V_5 中元素 x^3 的代数余子式 A_{45} 为 V_5 展开式 x^3 的系数.

故 $A_{45} = -(a+b+c+d)\cdot(d-a)(d-b)(d-c)\cdot(c-a)(c-b)\cdot(b-a)$

于是 $D_4 = M_{45} = -A_{45} = (a+b+c+d)\cdot(d-a)(d-b)(d-c)\cdot(c-a)(c-b)\cdot(b-a)$ ☐

B. 每行(列)元素之和相等：加边，提公因子，化零.

C、分块行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix}=|A||B| \qquad D_n=\begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$$

D、三对角非零型

D.1 计算
$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

基本方法：按第一行/列展开得

$\overset{\alpha}{\text{递推}}+(\overset{\beta}{\quad})$型 $\begin{cases} \alpha,\beta \text{ 可计算} \to \\ \alpha,\beta \text{ 不可计算} \\ \to \text{转置、对称性} \end{cases}$

D_n 按第一列一分为二，有

$$D_n=\begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=aD_{n-1}+b\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

对第二项，有

$$b\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(n\text{阶})}=b\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=b^2\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(n-1\text{阶})}=\cdots=b^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=b^n$$

故 $D_n=aD_{n-1}+b^n$ ① 同理 $D_n=D_n^T=bD_{n-1}^T+a^n=bD_{n-1}+a^n$ ②

由 ①②

$$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

□

D.2 求行列式
$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}.$$

(1) 当 $a=b$ 时，用加的后化零法

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

(2) 当 $a \neq b$ 时,

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a) D_{n-1} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} = (x-a) D_{n-1} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & x-b & x-a & \cdots & a-b & a-b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-b \end{vmatrix}$$

$$= (x-a) D_{n-1} + a (x-b)^{n-1} \quad ①$$

同理, $D_n = D_n^T = (x-b) D_{n-1}^T + b(x-a)^{n-1} = (x-b) D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}$ ②

由 ①②

$$D_n = \frac{b(x-a)^n - a(x-b)^n}{b-a}$$

$\square$

第二章 矩阵 向量

矩阵运算

1.方阵的数乘与其行列式.

一般地，若 A 是 n 阶方阵，则对 $\forall k\in\mathbb{R}$，有 $|kA|=k^n|A|$.

2.对于同阶方阵乘积的行列式，有 $|A_1A_2\cdots A_k| = |A_1||A_2|\cdots|A_k|$

转置矩阵

1. $(kA)^T = kA^T$ （k 是数）
2. $(A_1A_2\cdots A_k)^T = A_k^T\cdots A_2^T A_1^T$

分块矩阵

若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$.

初等变换与初等矩阵

对矩阵 A 进行一次初等行（列）变换等价于在其左（右）侧乘一个相应的初等阵.

等价关系

矩阵 A 通过有限次初等变换变成矩阵 B，则矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A\to B$

逆矩阵

对于 n 阶方阵 A，若存在同阶方阵 B 使得 $AB=BA=E$，则称 A 是可逆阵，B 是 A 的逆阵，记作 $B=A^{-1}$

1. $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A^{-1}|}$
2. $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$ （k 是数，且 $k\neq0$）
3. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ （可换序）
4. $(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

分块矩阵的逆阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

求可逆阵的逆阵的方法：伴随矩阵法、初等变换法

$(A|E)\to(E|A^{-1})$ $\boxed{(A|B)\to(E|A^{-1}B)}$

伴随矩阵

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则称矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ 为 A 的伴随矩阵.

$\boxed{AA^*=A^*A=|A|E}$ $\to A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

$\to |A^*|=|A|^{n-1}$

在准对角阵 $A=\mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{nn})$ 中，若 A_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$ 均可逆，则 A 可逆，有

$A^{-1}=\mathrm{diag}(A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}, \cdots, A_{nn}^{-1})$

秩 若 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$P,Q$ 是 m,n 阶可逆阵，则

$$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$$

基本向量组 任意 n 维向量均可由 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示，向量组 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 也称为 n 维基本向量.

$$e_1=(1,0,\cdots,0)^T \quad e_2=(0,1,\cdots,0)^T \quad \cdots \quad e_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

线性相关性 向量组A线性相关 ($A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$)

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ (即 $Ax=0$) 有非零解

$\Leftrightarrow$ 向量组A中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示

$\Leftrightarrow$ 部分相关，整体必相关

$\Leftrightarrow$ $r(A)<r$ $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 向量个数大于其维数

若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，而向量组 $B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，则向量 β 可由向量组A线性表示，且表示式唯一.

极大无关组 求极大无关组：$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\xrightarrow[\text{化为行梯形}]{\text{仅使用初等行变换}}(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)$

找出 $\{\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\}$ 的极大无关组对应的 $\{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\}$ 即为A的极大无关组.

向量组的秩 设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$；$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是两个同维数的向量组，若A可以由B线性表示，则有 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\leq r\{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n\}$.

等价的向量组必有相同的秩.

秩 和秩定理 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

积秩定理 $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$

若 A. B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$.

证明技巧 A. 推论：$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$ (可换序)

$r(A_{m\times n})=r \Leftrightarrow$ 存在 $P_{m\times r}$, $Q_{r\times n}$ 满足 $A=PQ$，且 $r(P_{m\times r})=r(Q_{r\times n})=r$

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$$

B. 改写：如 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$ 可写作 $(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0$

B.1 设 $A_{n\times m}$，$B_{m\times n}$，其中 $n<m$，若 $AB=E_n$，求证 B 的列向量线性无关.

设 $B=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)$ 其中 β_i 是 B 第 i 列的列向量

即证 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$ 当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时.

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0$$

两边同乘 A. 有

$$AB\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=E_n\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=A\cdot 0=0$$ 故 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

证毕. □

B.2 已知三阶矩阵 A 与三维向量 x，使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关，且满足 $A^3x=3Ax-2A^2x$

(1) 记 $P=(x, Ax, A^2x)$，求矩阵 B 使得 $A=PBP^{-1}$.

(2) 求行列式 $|A+E|$.

(1) $AP=A(x, Ax, A^2x)=(Ax, A^2x, 3Ax-2A^2x)=(x, Ax, A^2x)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$

由 $AP=PB$. $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$

(2) 由 $A=PBP^{-1}$. $A+E=PBP^{-1}+PEP^{-1}=P(B+E)P^{-1}$.

故 $(A+E)\sim(B+E)$

故 $|A+E|=|B+E|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4$. □

C. 矩阵运算的综合运用

C.1 若 n 阶方阵 A, B 满足 $AB=A+B$，求证 $AB=BA$

由于 $(A-E)(B-E)=AB-(A+B)+E^2=E$

故 $(A-E)^{-1}=B-E$

又 $E=(B-E)(A-E)=BA-(B+A)+E^2 \Rightarrow BA=B+A$

故 $BA=B+A=A+B=AB$ □

C.2 设矩阵 A 可逆，其每行元素之和为常数 a，求证：(1) $a\neq0$；(2) A^{-1} 的每行元素之和为 $\frac{1}{a}$.

(1) 由每行元素之和为 a，加边化1，有

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\1&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$ 若 $a=0$，则 $|A|=0$ 与题设矛盾. 故 $a\neq0$.

(2) 设 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}$，则 $A\xi=a\xi$　故 $A^{-1}\xi=\frac{1}{a}\xi$　则 A^{-1} 每行元素之和为 $\frac{1}{a}$.

□

D. 有关向量组的证明

D.1 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 2)$ 线性相关，对任一非零向量 β.

求证：存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得向量组 $\alpha_1+k_1\beta,\ \alpha_2+k_2\beta,\cdots,\alpha_m+k_m\beta$ 线性相关.

由题，存在不全为 0 的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使得 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_m\alpha_m=0$ (*)

若存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $c_1(\alpha_1+k_1\beta)+c_2(\alpha_2+k_2\beta)+\cdots+c_m(\alpha_m+k_m\beta)=0$

代入(*)，有 $(c_1k_1+c_2k_2+\cdots+c_mk_m)\beta=0$ 由于 $\beta\neq 0$，故 $(c_1k_1+c_2k_2+\cdots+c_mk_m)=0$

由于 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 不全为 0，故 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 存在不全为 0 的解. $\square$

D.2 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，$A\beta\neq 0$.

试证明向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_n$ 线性无关.

设存在 $k,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得 $k\beta+\sum_{i=1}^{n}k_i(\beta+\alpha_i)=0$ 即 $(k+\sum_{i=1}^{n}k_i)\beta=\sum_{i=1}^{n}(-k_i)\alpha_i$

两边同乘 A. 有 $(k+\sum_{i=1}^{n}k_i)A\beta=\sum_{i=1}^{n}(-k_i)A\alpha_i=0$ 又 $A\beta\neq 0$

故 $k+\sum_{i=1}^{n}k_i=0$ 又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是基础解系

故 $\sum_{i=1}^{n}k_i=0 \Rightarrow k=0$ 故 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_n$ 线性无关. $\square$

第3章 线性方程组解的结构

有解判定 线性方程组有解 $\Leftrightarrow$ 系数阵的秩 = 增广阵的秩

当 $r(A)=r(B)=n$ 时，方程组有唯一解；当 $r(A)=r(B)<r$ 时，方程组有无穷多组解。

解的结构 齐次线性方程组的通解：基础解系的线性组合。

齐次方程组的系数阵 A 的秩为 r，则其基础解系的向量个数为 $n-r$。

非齐次线性方程组的通解：导出组基础解系的线性组合 + 特解。

证明技巧 A. 同解的证明

A.1 证明：$\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}x=0$ 与 $Ax=0$ 同解 $\Leftrightarrow$ $A^Ty=b$ 有解，其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$\Rightarrow$：当 $\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}x=0$ 与 $Ax=0$ 同解时，存在一系列可逆阵 $P_s,\cdots,P_2,P_1$ 使得 $P_s\cdots P_2P_1\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}=A$

故 $r\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}=r(A)$ $\qquad r(A^T\ b)=r\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}=r(A)=r(A^T)$ 故方程组 $A^Ty=b$ 有解。

$\Leftarrow$：方程组 $A^Ty=b$ 有解，则 b 可由 A^T 列向量线性表示 $\Leftrightarrow$ b^T 可由 A 行向量表示。

故 $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}$ 故 $A\leftrightarrow\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}$ 故 $Ax=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}x=0$ 同解。 □

B. 利用方程组判断线性相关性

B.1 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T$ $(i=1,2,\cdots,r;\ r<n)$ 是 n 维实向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。

已知 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$ 的非零解向量。

试判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性相关性。

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 $\qquad$ 所以 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_r^T$ 线性无关

令 $k_1\alpha_1^T+k_2\alpha_2^T+\cdots+k_r\alpha_r^T+k\beta^T=0^T$

同乘 β，有 $\quad k_1\alpha_1^T\beta+k_2\alpha_2^T\beta+\cdots+k_r\alpha_r^T\beta+k\beta^T\beta=0$

由题 $\alpha_i^T\beta=0$ $\quad$ 故 $k\beta^T\beta=0$ $\quad$ 又 $\beta\neq0$，有 $\beta^T\beta=|\beta|^2>0$

故 $k=0$ $\quad$ 又 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_r^T$ 线性无关，故 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关。 □

B.2 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$B\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $n<m$。若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关。

<法一> 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，其中 β_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 B 的列向量。

若有 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$，即 $(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=Bx=0$

则有 $ABx=0$ 即 $Ex=0$ $\Rightarrow$ $x=0$ 故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关。

<法二> $r(B)\le n$ $\quad$ 又 $r(B)\ge r(AB)=r(E)=n$ $\quad$ 故 $r(B)=n$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关。 □

第4章 矩阵的特征值与特征向量

相似矩阵

$A\sim B \iff B=P^{-1}AP$

性质：$A\sim B \Rightarrow |A|=|B|$　　$A\sim B \Rightarrow A^{-1}\sim B^{-1}$　　$A\sim B \Rightarrow A^n\sim B^n$　$kA\sim kB$　$f(A)\sim f(B)$

几何意义：同一个线性变换在不同坐标系下的表示

特征值、特征向量

由 $A=P\Lambda P^{-1}$，有 $AP=P\Lambda$．设 $P(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$　$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，有 $\boxed{A\xi_i=\lambda_i\xi_i \ (i=1,2,\cdots,n)}$

求特征值、求特征向量：1. 求 $|\lambda E-A|=0$ 的所有根，即为 A 的全部特征值．

2. 对每个特征值，求解 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$.

3. 写出 A 属于 λ_i 的特征向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$．

若矩阵A有特征值 λ，特征向量 ξ，则 $f(A)$ 有特征值 $f(\lambda)$，特征向量 ξ．

相似不变量

相似矩阵具有相同特征多项式，从而具有相同特征值．

迹 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$　$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$，故相似阵具有相同的迹和行列式．

A.1　A.2

可对角化的条件

n阶矩阵可对角化 $\iff$ 有n个线性无关的特征向量 $\iff$ 每个 k_i 重特征值对应 k_i 个特征向量，$r(\lambda_i E-A)=n-k_i$.

且主对角线由特征值构成，相似变换矩阵由属于相应特征值的特征向量组成.

向量内积、夹角、正交

若 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则 $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$．若 $(\alpha,\beta)=0$ 则 α 与 β 正交，$\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{\pi}{2}$．

$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 称为 α 的长度或模　　$\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$ 称为 α 与 β 的夹角.

Schmidt 正交化：由线性无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可构造出正交组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 与之等价，且 ξ_i 可表示为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 线性组合

Schmidt 正交化步骤：1. 令 $\xi_1=\alpha_1$

2. $\xi_{l+1}=\alpha_{l+1}-\frac{(\alpha_{l+1},\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}\xi_1-\cdots-\frac{(\alpha_{l+1},\xi_l)}{\|\xi_l\|^2}\xi_l$

正交阵：若 A 满足 $A^TA=E$，则称 A 为正交阵．$A^TA=E \iff A^T=A^{-1}$

若 A、B 均为正交阵，则 AB 也为正交阵．

若 A 为n阶正交阵，λ 为A的特征值，α 为n维列向量，则：$\|A\|^2=1$　$(A\alpha)^T(\overline{A\alpha})=\alpha^T\overline{\alpha}$　$|\lambda|=1$

实对称阵的对角化

实对称阵的性质：1. 特征值均为实数.

2. $\boxed{\text{属于不同特征值的特征向量相互正交.}}$

若A是实对称阵，则存在同阶正交阵 P 使得 P^TAP 是实对角矩阵．

步骤：1. 解 $|\lambda E-A|=0$ 得特征值 λ_i

2. 求 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的基础解系得特征向量 ξ_i.

3. 将特征向量单位化：$\eta_i=\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|}$　　则 $P=(\eta_1\cdots\eta_n)$，$P^TAP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

B. 可对角化证明

B.1 已知n阶矩阵 A 有关系式 $A^2-3A+2E=0$，试证 A 可对角化。

由 $A^2-3A+2E=0$，有 $(A-E)(A-2E)=0$

1° 当 $A=E$ 或 $A=2E$ 时，显然成立。

2° 当 $A\neq E$ 且 $A\neq 2E$ 时，设 A 的特征值为 λ，特征向量为 ξ，$\xi\neq 0$.

故 $(A^2-3A+2E)\boxed{\xi}=0 \Rightarrow (\lambda^2-3\lambda+2)\xi=0$

故 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$。

对于 $\lambda=1$，$2E-A$ 的非零列向量是方程 $(E-A)x=0$ 的解。

故至少有 $r(2E-A)$ 个属于 $\lambda=1$ 的特征向量。

同理，至少有 $r(E-A)$ 个属于 $\lambda=2$ 的特征向量。

$r(2E-A)+r(E-A)=\boxed{r(2E-A)+r(A-E)\geq r(E)}=n$.

故有n个线性无关的特征向量，A 可对角化. □

C、正交阵的性质

C.1 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 为n维正交向量组，$Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交阵，$\beta_i=Q\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,r$.

证明 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$ 也为正交向量组。

由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 为n维正交向量组

有 $\boxed{(\alpha_i,\alpha_j)=\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}}$　　又 $\beta_i=Q\alpha_i$.

有 $(\beta_i,\beta_j)=\beta_i^T\beta_j=(Q\alpha_i)^T(Q\alpha_j)=\alpha_i^T(Q^TQ)\alpha_j=\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$.

故 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$ 也为正交向量组。 □

C.2 证明：若 A,B 是同阶的正交矩阵，且 $|A|=-|B|$，则有 $|A+B|=0$.

$|A+B|=|A\boxed{(A^T+B^T)}B|=|A||A^T+B^T||B|=-|A+B|$

故 $|A+B|=0$

D、特征值

D.1 已知三阶实对称阵 A 的每一行和均为3，且其特征值均为正整数，$|A|=3$，求矩阵 A.

设 $B=Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l}\text{由 } A\sim B\text{，有 } |A|=|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=3\\ \text{又 } \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in N^*\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=3$

即 $B=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$

对于 $\lambda=3$. $\boxed{A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$ 故 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是其特征向量　　$\alpha_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T$

对于 $\lambda=1$. 设 $\xi=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$　$\boxed{(\xi_1,\xi)=0}\Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$

取 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$　$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$　　$\alpha_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0)^T$　$\alpha_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6})^T$.

则 $Q=(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$　　$A=Q^{-1}BQ=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}$ □

D.2 设 A 为3阶矩阵，满足 $|3E+A|=0$，$AA^T=4E$，$|A|<0$. 求 A^* 的全部特征值.

由于 $|3E+A| = (-1)^3|-3E-A| = -|-3E-A| = 0$

所以 A 有特征值 $\lambda=-3$　　由 $AA^T=4E$，有 $|A|^2 = 4^3 = 64$，又 $|A|<0$，故 $|A|=-8$.

于是 $A^* = |A|A^{-1} = -8A^{-1}$

因 A 有特征值 $\lambda=-3$，所以 A^{-1} 有特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{3}$. 于是 A^* 特征值 $-8\lambda_1 = -\frac{8}{3}$

由 $AA^T=4E$　$A^{-1} = \frac{1}{4}A^T$.

因 A 有特征值 $\lambda=-3$，所以 A^T 有特征值 -3　故 A^{-1} 有特征值 $-\frac{3}{4}$.　于是 A^* 特征值 $(-8)\times(-\frac{3}{4}) = 6$

另一方面，$|A^*| = |A|^2 = (-8)^2 = 64$　　设 A^* 第3个特征值为 λ_3，则 $|A^*| = \frac{8}{3}\times 6\times \lambda_3$　故 $\lambda_3 = 4$.

故 A^* 的特征值为 $\frac{8}{3}, 6, 4$.

□

第5章 实二次型

二次型的矩阵

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\cdots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=x^TAx$$ 其中 A 是对称阵.

线性变换、非退化线性变换、正交变换

合同

设 A,B 是两同阶方阵, 若存在可逆阵 P 使得 $B=P^TAP$, 则称 B 合同于 A.

称 B 为 A 的合同矩阵, P 是 A 到 B 的合同变换矩阵.

$A\simeq B$, 则 $B\simeq A$, $A^T\simeq B^T$. $A\simeq B$, 则 $r(A)=r(B)$. 若 A 可逆, $A\simeq B$, 则 $A^{-1}\simeq B^{-1}$.

把二次型化为标准形:

1. 正交矩阵法: 设 A 为实二次型 $f(x)$ 的矩阵. 2. 配方法

(1) 求解特征方程 $|\lambda E-A|=0$

(2) 对每个特征值 λ_i 求解 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的基础解系

(3) 标准正交化为正交矩阵 P

则存在非退化的线性替换 $x=Py$ 使 $f(x)=g(y)=y^T\Lambda y$

3. 合同变换法 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$ 化为非对角元为0.

先做列初等变换, 再做相应的行初等变换.

二次型的规范形

实二次型经过非退化的线性替换得到如下形式的二次型:

$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2\ (r\le n)$, 称为原二次型的实规范形. r 称为该二次型的秩.

惯性定理: 存在实可逆阵将实对称阵合同变换为 $\mathrm{diag}(E_p,-E_{r-p},O_{n-r})$. p 唯一确定, 称为原二次型的正惯性指数,

$r-p$ 为负惯性指数.

正定二次型

设 $f(x)=x^TAx$ 为实二次型, 若当实向量 $x\neq0$ 时都有 $x^TAx>0$, 则称 f 为正定二次型, 称 A 为正定矩阵.

A 为正定阵 $\Leftrightarrow$ A 的特征值均为正 $\Leftrightarrow$ A 的正惯性指数为 n $\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式均为正 $\Leftrightarrow$ $A\simeq E$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{A=P^TP\ (P可逆)}$

计算 & 证明

A. 求棘手的正惯性指数

A.1 求下列二次型的正惯性指数和负惯性指数

$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, 其中 $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ $n\geq2$.

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}\left(-\tfrac{1}{n}x_1-\cdots-\tfrac{1}{n}x_{i-1}+\tfrac{n-1}{n}x_i-\tfrac{1}{n}x_{i+1}-\cdots-\tfrac{1}{n}x_n\right)^2=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2}{n}\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1-\frac1n&-\frac1n&\cdots&-\frac1n\\-\frac1n&1-\frac1n&\cdots&-\frac1n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-\frac1n&-\frac1n&\cdots&1-\frac1n\end{pmatrix}$ $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-(1-\frac1n)&-\frac1n&\cdots&-\frac1n\\-\frac1n&\lambda-(1-\frac1n)&\cdots&-\frac1n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-\frac1n&-\frac1n&\cdots&\lambda-(1-\frac1n)\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\left[\lambda-(1-\tfrac1n)+(n-1)\cdot\tfrac1n\right]\left[\lambda-(1-\tfrac1n)-\tfrac1n\right]^{n-1}=\lambda(\lambda-1)^{n-1}$$

故 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$ ($n-1$ 重)

正惯性指数为 $n-1$, 负惯性指数为 0. □

B. 对称正定的证明

B.1 证明：若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定，则 A^* 也对称正定.

先证明 A^{-1} 对称正定. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$ 故 A^{-1} 对称

存在可逆阵 P 使得 $A=P^TP$. 故 $A^{-1}=(P^{-1})(P^T)^{-1}=(P^{-1})(P^{-1})^T$ 故 A^{-1} 正定

再证明 A^* 对称正定. 由 $AA^*=|A|E$ 有 $A^*=|A|A^{-1}$.

$(A^*)^T=|A|(A^{-1})^T=|A|A^{-1}=A^*$. 故 A^* 对称

由 A^{-1} 正定，$|A|>0$. 对任意非零向量 x，有 $x^TA^*x=x^T|A|A^{-1}x=|A|(x^TA^{-1}x)>0$. 故 A^* 正定.

因此 A^* 对称正定. $\square$

B.2 设 A 为 m 阶正定矩阵，$B\in\mathbb{R}^{m\times n}$，求证：$B^TAB$ 为正定矩阵的充要条件是 $r(B)=n$.

($\Rightarrow$) 设 B^TAB 是正定阵，则对任意实 n 维向量 $x\neq0$，有

$x^T(B^TAB)x>0$ 即 $(Bx)^TA(Bx)>0$

因 A 是正定阵，故 $Bx\neq0$，故 $Bx=0$ 只有零解. $r(B)=n$.

($\Leftarrow$) 因 $(B^TAB)^T=B^TA^TB=B^TAB$ 故 B^TAB 为实对称阵.

若 $r(B)=n$. 则 $Bx=0$ 只有零解. 则对任意实 n 维向量 $x\neq0$，有 $Bx\neq0$

又因 A 是正定阵，故对于 $Bx\neq0$ 有 $(Bx)^TA(Bx)>0$

于是 $x\neq0$ 时，$x^T(B^TAB)x>0$，故 B^TAB 是正定矩阵. $\square$

B.3 设 A 是 n 阶矩阵，求证：A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在正定阵 S 和正交阵 Q，使得 $A=SQ$.

($\Leftarrow$) 由于 S、Q 均可逆，故 $SQ=A$ 可逆.

($\Rightarrow$) 因 A 可逆，故 AA^T 是正定阵. 设 AA^T 特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. $(\lambda_i>0,\ i=1,2,\cdots,n)$.

则存在正交阵 P 使得 $P^T(AA^T)P=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n)$ (*)

令 $S=P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2}\cdots\sqrt{\lambda_n})P^T$，则由 (*) $AA^T=S^2$ 于是 $A=SS(A^T)^{-1}$.

由于 $S\simeq\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2}\cdots\sqrt{\lambda_n})$ 是正定矩阵. 故 S 是正定矩阵.

令 $Q=S(A^T)^{-1}$

$Q^TQ=(S(A^T)^{-1})^T(S(A^T)^{-1})=A^{-1}S^TS(A^T)^{-1}=A^{-1}S^2(A^T)^{-1}=A^{-1}AA^T(A^T)^{-1}=E$

故 Q 是正交矩阵. 使得 $A=SQ$ 成立 $\square$

C. 矩阵的挖洞法

C.1 设 $A=(a_{ij})_n$ 为正定矩阵，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

试证：(1) $f(x)=\begin{vmatrix}A & x\\ x^T & 0\end{vmatrix}$ 为负定二次型；(2) $|A|\leq a_{nn}|A_{n-1}|$，其中 $|A_{n-1}|$ 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式.

(1) $\forall x\neq0$，由于 $\begin{pmatrix}A & x\\ x^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -A^{-1}x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ x^T & -x^TA^{-1}x\end{pmatrix}$ 取行列式，有 $f(x)=-x^TA^{-1}x|A|$

由 A 正定，$|A|>0$，A^{-1} 正定，$x^TA^{-1}x>0$ 故 $f(x)<0$，$f(x)$ 为负定二次型

(2) 令 $y=(a_{1n}\ a_{2n}\ \cdots\ a_{n-1,n})^T$ $g(y)=\begin{vmatrix}A_{n-1} & y\\ y^T & 0\end{vmatrix}$ 由于 A_{n-1} 正定，由 (1) 知 $g(y)<0$.

于是 $|A|=\begin{vmatrix}A_{n-1} & 0\\ y^T & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A_{n-1} & y\\ y^T & 0\end{vmatrix}=a_{nn}|A_{n-1}|+g(y)\leq a_{nn}|A_{n-1}|$ $\square$

第6章 线性空间与线性变换

数环、数域

数环：对于加、减、乘封闭.

数域：至少含有两个互异数的数环，且对除法封闭.

线性空间

1. 对加法、乘法封闭
2. 加法满足：交换律、结合律、零元素、负元素
3. 乘法满足：分配律、数因子分配律、结合律、1元素.

性质：0元素、负元素唯一. $0x=0^*$ $\quad (-1)x=-x$ $\quad \lambda 0^*=0^*$ $\quad \lambda x=0^*$ $\lambda=0$ 或 $x=0^*$

基、维数、坐标

线性相关(无关)、极大无关组构成基. 基的个数即为维数，坐标一一对应.

基变换：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是n维线性空间V的两组基，则 $(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)P$,

且 $P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 称为基底 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 到 $\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$ 的过渡矩阵. 有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$

已知两组基 α_i,β_i 坐标和某向量在 α_i 下坐标，求解向量在 β_i 下坐标：

$(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)=(e_1\,e_2\,e_3\,e_4)A$, $(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4)=(e_1\,e_2\,e_3\,e_4)B \Rightarrow (\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)A^{-1}B$

故 $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}(A^{-1}B)^{-1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}B^{-1}A$

已知两组基 α_i,β_i 坐标和某向量在 e_i 下坐标，求解向量在 α_i, β_i 下坐标：

$(A \mid B \mid \eta)\rightarrow(E \mid C \mid \eta_1)$ $\quad \eta_1$ 为 α_i 下坐标 $\quad$ C是 α_i 到 β_i 过渡阵.

β_i 下坐标 $\eta_2=C^{-1}\eta_1=\cdots$

线性空间的子空间

验证一个非空子集是否为子空间，只需验证是否对加法、乘法封闭，8条算律自然满足. 写作 $span\{\alpha_1,\cdots,\alpha_i\}$

对于子空间 $span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 若 $r(A)=r$，则 $\dim(A)=n-r$.

子空间的交与和：$W_1\cap W_2=\{\alpha \mid \alpha\in W_1, \alpha\in W_2\}$. $\quad W_1+W_2=\{\gamma \mid \gamma=\alpha+\beta, \alpha\in W_1, \beta\in W_2\}$

交与和的维数公式：$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$.

直和 $W_1\oplus W_2 \Leftrightarrow W_1\cap W_2=\{0\} \Leftrightarrow \dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)$.

线性变换

映射：

若满足 $T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta$，则为线性映射.

若 $V_1=V_2$，则为线性变换.

像空间：$Im(T)$ 像的集合 求 $Im(T)$ 的一组基底 $\Leftrightarrow$ 求极大无关组.

核空间：$ker(T)$ 零元素的集合 求 $ker(T)$ 的一组基底 $\Leftrightarrow$ 求 $Ax=0$ 的基础解系.

$r(A)=r$ $\quad \dim(ker(T))=n-r$ $\quad \dim(Im(T))=r$

$\dim(ker(T))+\dim(Im(T))=n$.

线性变换的矩阵表示

两个线性变换相等 $\Leftrightarrow$ 对 V 的任一向量的像相等. $\Leftrightarrow$ $T_1\varepsilon_i = T_2\varepsilon_i$, $T_1 = T_2$

$$T(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n) = (T\varepsilon_1\,T\varepsilon_2\cdots T\varepsilon_n) = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

在 n 维线性空间 V 中取两组基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 与 $w_1, w_2, \cdots, w_n$. 设 $(w_1\,w_2\cdots w_n) = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)P$.

并设 V 上的线性变换 T 在两组基底下的矩阵为 A, B. 则 $B = P^{-1}AP$, 即 $A \sim B$.

$A \sim B \Leftrightarrow A, B$ 是 V 上的线性变换 T 在不同基底下的矩阵.